C252-27

LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LOS PROCESOS ITERATIVOS. ANÁLISIS DE UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Lina Mónica OVIEDO, Ana María KANASHIRO

Facultad de Ingeniería Química - Universidad Nacional del Litoral
25 de mayo 2820 - Dpto. 6 - 3000 - Santa Fé - República Argentina
loviedo@fiqus.unl.edu.ar - akanashi@fiqus.unl.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Polimodal - Superior.

Palabras Claves: procesos iterativos, análisis gráfico, análisis numérico, curso de perfeccionamiento.

RESUMEN

La matemática constituye una *realidad cultural* compuesta por conceptos, proposiciones, teorías, etc. (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de situaciones problemáticas.
Desde una perspectiva didáctica la premisa principal es analizar el funcionamiento de las situaciones didácticas, es decir, poder determinar qué características de cada situación resultan determinantes para la evolución del comportamiento y los conocimientos de los alumnos.
El uso de distinta representaciones semióticas debería permitir un mayor control de significado de los objetos matemáticos, es decir posibilitar la realización de un control entre el significado en juego y las situaciones que se plantean a los alumnos.
La cuestión esencial en relación a una situación de aprendizaje consiste en determinar si la propuesta permite articular los problemas ligados a la noción, las concepciones que sobre esta noción poseen los alumnos y el saber matemático.
Se analizan, en el presente artículo, una serie de actividades relacionadas con los procesos iterativos numéricos y gráficos correspondientes a un curso de perfeccionamiento docente a distancia y destinado a profesores de nivel medio y superior. Dichas actividades están pensadas para que el docente las aplique directamente en el aula.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo consiste en el análisis de una serie de actividades propuestas en un curso a distancia que involucran procesos iterativos numéricos y gráficos, destinados a profesores del nivel medio y superior.
Los **objetivos** del mismo consisten en:

Generales

- Presentar a los docentes una serie de actividades que involucren procesos iterativos numéricos, gráficos y geométricos y que permitan introducir intuitivamente las nociones de límite, infinito, sucesión, convergencia, periodicidad y caos.

- Descubrir la riqueza matemática que implica trabajar con dichos procesos.
- Encontrar las conexiones que existen entre los procesos iterativos y otros conceptos matemáticos.
- Establecer criterios para la selección de actividades de aula que estimulen el pensamiento crítico y creativo.

Específicos

- Componer funciones numérica y gráficamente.
- Construir caminos en los gráficos cartesianos.
- Iterar funciones numérica y gráficamente.
- Clasificar puntos fijos en atractores o repulsores.
- Investigar si la sucesión generada es convergente, divergente o periódica.
- Determinar el número de iteraciones necesarias para decidir la convergencia.

FUNDAMENTACIÓN

1) Matemática

Existen dos maneras de estudiar a las funciones:

a) Según el currículo clásico de la Educación Polimodal el tratamiento del tema está estructurado para posibilitar que el alumno adquiera un cierto nivel cultural respecto de las mismas.

b) Otra manera de abordarlas son las sucesiones, las mismas posibilitan la entrada al estudio del análisis, comprender los números reales y ciertos temas de topología.

Estamos interesados en el estudio de las sucesiones recursivas, es decir las que se originan a partir de la iteración de una función dada y realizaremos su abordaje de dos maneras distintas:

b_1- Estudio clásico con el tratamiento ε - N, lo que permite determinar si la sucesión es monótona, acotada, realizar el estudio funcional, etc., pero para llevarlo a cabo se precisa de sólidos conocimientos del análisis y se requiere de una manipulación segura de dichos objetos.

b_2- Estudio a partir de la iteración de funciones, utilizando instrumentos funcionales que no poseen estatutos iguales a los anteriores pero que permiten realizar un estudio de las sucesiones recursivas generadas por funciones tales como x^2, $x + c$ con $c \in \Re$, $\sqrt{x}$, etc.

Además la generación de una sucesión a partir de una función determinada puede realizarse de dos maneras totalmente independientes pero que permiten arribar a los mismos resultados, por una parte la iteración numérica, que puede realizarse con el auxilio de una calculadora y por otra el análisis gráfico un procedimiento geométrico sencillo que consiste en la construcción de caminos (Alson-1995).

2) Didáctica

Según Douady (1986) los conceptos matemáticos juegan alternativamente el rol de instrumentos para resolver un problema y de objeto que toma un lugar en la construcción de un saber organizado. Los mismos son importantes para avanzar en la investigación de un problema, desbloquear una situación y hacer evolucionar las concepciones, para que permitan cambio de representaciones espontáneos, producidos por la iniciativa de los alumnos o cambios de representaciones provocadas por la intervención de otro alumno o del maestro.

El propósito de esta investigación fue analizar:

1) la diversidad de vías de accesos a un problema.
2) la multiplicidad cognitiva de los alumnos en una misma clase.

En consecuencia se tornó importante estudiar las condiciones de organización de los cambios de registros a los fines del aprendizaje.

MARCOS DE REFERENCIA

Marco de referencia didáctica

Realizamos este análisis en el marco de las nociones teóricas desarrolladas por Chevallard (1991-1992) acerca de la Teoría Antropológica de la Didáctica.

Marco de referencia matemático

Los sistemas dinámicos discretos son procesos que evolucionan con el tiempo, cuando están cuantificados con un paso fijo predeterminado. Esta concepción conduce a ecuaciones en diferencias para las magnitudes involucradas.

Marco de referencia metodológico

Los usuarios del curso dispondrán del material didáctico adecuado, una guía autocontenida para adquirir las nociones relacionadas con los procesos iterativos de manera autónoma, esto es con una participación mínima del docente que atenderá consultas a través de la plataforma e-learning.

ANÁLISIS DE LA PROPUESTA

Estamos interesados en que el alumno adquiera el concepto matemático, lo que Duval (1993-1998) y D'Amore (2005) denominan noética. Según estos autores no hay noética sin semiótica.
Cada concepto matemático no es un objeto real y está obligado a utilizar representaciones de distintas naturaleza. Teniendo en cuenta lo anterior, el concepto y el objeto matemático por conceptualizar no es una cosa en el sentido de Aristóteles (D'Amore- 2005) por lo tanto no existe accesibilidad objetiva a la percepción.
Surge la necesidad de representaciones semióticas, es decir recurrir a signos concretos para representarlos. En este curso se trabajará la iteración de funciones a partir de métodos **simbólicos-numéricos** y **gráficos**". Es decir con dos tipos de registros distintos, con diferentes representaciones.*"Estas presentaciones han sido tratadas utilizando distintas nociones surgidas en el campo didáctico (cambio de marco, ostensivos…), en el campo semiótico y cognitivo ("registros" en los trabajos de Duval)"* (Lacasta Zabalza, 2000). El trabajo con ostensivos distintos, realizando cambios entre los mismos, posibilita que el estudiante avance en las fases del problema y que sus concepciones evolucionen. Consideramos que en el tema iteración de funciones los distintos registros se conjugan de manera evidente.
El registro numérico- simbólico conlleva realizar la **i**teración de funciones con el auxilio de la calculadora. Mientras que el registro gráfico la misma se realiza con el auxilio de técnicas gráficas elementales.
La actividad matemática se efectúa sobre los objetos y sobre los representantes surgiendo así la paradoja del pensamiento matemático; las representaciones semióticas posibilitan la actividad sobre los objetos matemáticos pero el aprendizaje de los mismos es un aprendizaje conceptual:

1- El que aprende puede confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas.

2- Ahora bien, ¿cómo se logra el dominio de los tratamientos matemáticos, ligados a las representaciones semióticas, si no tiene ya una conceptualación de los objetos matemáticos?

Según Duval (1993) la adquisición conceptual de un objeto matemático se basa sobre dos de sus características fuertes:

- el uso de más de un registro de representación semiótica,
- la creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo de progreso de conocimiento.

ANÁLISIS DE LOS EJERCICIOS SELECCIONADOS

Premisas

1- Desde el punto de vista matemático los problemas ponen en práctica los caracteres esenciales de las nociones lo que justifica científicamente su empleo.
2- Los enunciados tienen sentido para los alumnos.
3- Teniendo en cuenta sus conocimientos, los alumnos pueden comenzar un procedimiento de resolución, pero ellos no pueden resolver completamente el problema.
4- Los conocimientos a los que se aspira mediante el aprendizaje (contenidos o métodos) son las herramientas adaptadas al problema.
5- El problema está formulado en dos marcos (representaciones) distintos.

Progresión en el tema

El avance en el tema y por ende en la construcción del conocimiento se realiza de manera gradual. Las nociones matemáticas se presentan de modo secuenciado y cuando se consideran necesarias.

I- Iteración gráfica de funciones

Esta actividad introduce la idea básica de iteración gráfica a través de un proceso algorítmico informal de movimientos repetidos “adelante y atrás” entre una curva y la diagonal (recta y = x) que conectan segmentos horizontales y verticales (Construcción de caminos según Pedro Alson). Este proceso se conoce con el nombre de iteración gráfica de funciones. La intersección de la curva con la diagonal es un punto especial. Si uno comienza el proceso iterativo en dicho punto no puede salir del mismo y por lo tanto este punto recibe el nombre de punto fijo.

La iteración gráfica de funciones produce solamente escaleras o espirales y si los caminos se dirigen al punto fijo, este se nomina atractor y si se alejan del mismo, repulsor.

Imagine la trayectoria de un punto que comienza en el eje x y que se mueve repetidamente “adelante y atrás” entre una curva y la diagonal siguiendo estos pasos:

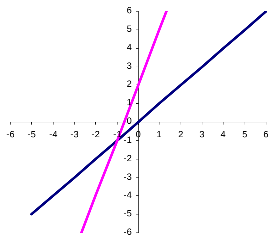
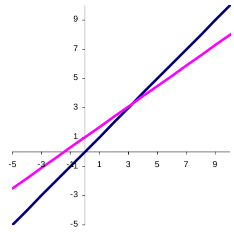
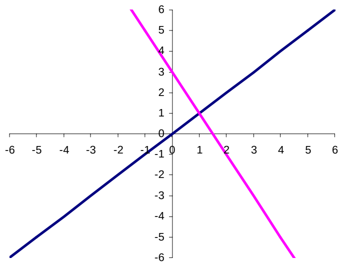
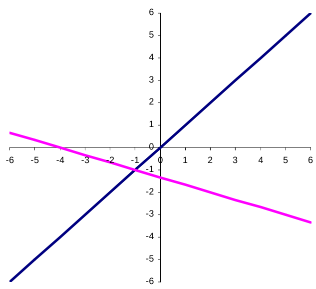
a) muévase arriba o abajo hacia la curva.
b) muévase a la derecha o izquierda hacia la diagonal.

Para crear la trayectoria dibuje primero un segmento vertical a la curva y desde ahí uno horizontal a la diagonal. El proceso geométrico en que se centra esta actividad es la repetición secuenciada de estos dos pasos una y otra vez, en cada uno se utiliza el último punto obtenido como el siguiente punto inicial.

En estas primeras actividades las representaciones gráficas desempeñan un papel fundamental, predominando la iteración gráfica y la determinación gráfica de puntos fijos como así también el posterior análisis de sus comportamientos en comparación con los otros tipos de representaciones.

Actividad 1: Escaleras y espirales

Realice la iteración gráfica para cada una de las siguiente funciones teniendo en cuenta los valores iniciales (x_0) indicados:

 *a)* $x_0 = -2$; *b)* $x_0 = 1$	 *a)* $x_0 = -5$; *b)* $x_0 = 9$
 *a)* $x_0 = -1$; *b)* $x_0 = 3$	 *a)* $x_0 = -2$; *b)* $x_0 = 2$

a) Dé aproximadamente las coordenadas del punto fijo.

b) Clasifique, en cada uno de los casos al punto fijo en atractor o repulsor.

Analizando los resultados de la actividad anterior, elabore una conclusión para responder a las siguientes preguntas:

c) ¿Qué relación existe entre la pendiente de la recta, el tipo de trayectoria y el tipo de punto fijo?

d) ¿Afecta la localización del punto inicial el comportamiento de la iteración?

Análisis de la actividad

ACTIVIDAD 1		Escaleras y Espirales
TAREA		Iterar gráficamente funciones. Determinar si los puntos fijos son atractores o repulsores. Generar una sucesión de puntos.
TÉCNICA	Técnica	Geométrica: Trazar en la gráfica segmentos horizontales y verticales.
	Dispositivo	Gráfica de la función a iterar y de la función identidad.
	Gesto	Construcción de caminos. Trazado de segmentos horizontales y verticales.
TECNOLOGÍA		Representación gráfica de funciones lineales y afínes. Puntos fijos: atractores o repulsores. Pendiente.
TEORÍA		Funciones. Convergencia. Recta en $\Re^2$. Sucesiones. Noción no formal de límite

Actividad 2: Importancia de la Pendiente

En esta actividad considere la iteración de la función y = m x.

Describa cómo varía el comportamiento de la iteración cuando la pendiente de la recta se incrementa de:

a) valores menores que a mayores que –1

b) valores menores que a mayores que 0.

c) valores menores que a mayores que 1.

d) Describa el comportamiento especial de la iteración gráfica cuando la pendiente de la recta es: d_1) 1 d_2) -1

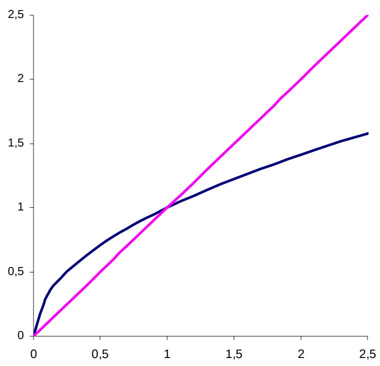
Análisis de la actividad

ACTIVIDAD 2		Importancia de la pendiente
TAREA		Realizar la gráfica de la función lineal y afin para distintos valores de la pendiente. Iterar gráficamente funciones. Determinar si los puntos fijos son atractores o repulsores. Analizar el comportamiento de la iteración de la función lineal cuando varía el valor de su pendiente.
TÉCNICA	Técnica	Geométrica: Trazar en la gráfica segmentos horizontales y verticales.
	Dispositivo	Gráfica de la función a iterar y de la función identidad.
	Gesto	Construcción de caminos. Trazado de segmentos horizontales y verticales.
TECNOLOGÍA		Representación gráfica de funciones lineales y afines. Puntos fijos: atractores o repulsores. Escaleras- Espirales Pendiente.
TEORÍA		Funciones. Convergencia. Recta en $\Re^2$. Sucesiones. Noción no formal de límite.

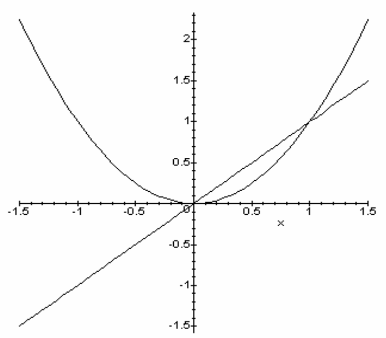
Se propone jugar con las pendientes de las rectas, establecer la relación que existe entre las pendientes de las gráficas consideradas y los puntos fijos, lo cual conlleva realizar un estudio exploratorio (Bosch- Gascón, 1994- pág. 317) de las distintas gráficas, ¿cómo es el punto fijo si m> 1?, ¿cómo es el punto fijo si m < 1?, ¿ y si la pendiente es negativa?, etc. Es a partir del dominio y desarrollo de las técnicas ya vistas que se pueden generar nuevas técnicas, modificando las ya conocidas. Es aquí donde aparece la necesidad de elementos teóricos nuevos destinados a interpretar y justificar las nuevas técnicas y sus interrelaciones.

Actividad 3: Otras escaleras y espirales

Realice la iteración gráfica de las siguientes funciones para los valores iniciales propuestos.; y, si es posible, -1,2.



a) $x_0 = 0{,}5$; *b)* $x_0 = 2$



a) $x_0 = 0{,}5$; *b)* $x_0 = 2$; *c)* $x_0 = -1{,}2$

a) Dé aproximadamente las coordenadas del punto fijo.
b) Clasifique, en cada uno de los casos al punto fijo en atractor o repulsor.
c) Analizando los resultados de la actividad anterior, elabore una conclusión para responder a las siguientes preguntas:
d) ¿Afecta la localización del punto inicial el comportamiento de la iteración?. ¿En qué caso?. ¿Cómo?
e) ¿Puede dar, en este momento, la definición de punto fijo?.

Análisis de la actividad

Se trabaja la iteración gráfica de la función cuadrática y $\sqrt{x}$.

ACTIVIDAD 3 Otras escaleras y espirales		
TAREA		Iterar gráficamente las funciones cuadrática y $\sqrt{x}$. Determinar si los puntos fijos son atractores o repulsores. Analizar resultados Generar una sucesión de puntos.
TÉCNICA	Técnica	Geométrica: Trazar en la gráfica segmentos horizontales y verticales.
	Dispositivo	Gráfica de la función a iterar y de la función identidad.
	Gesto	Construcción de caminos. Trazado de segmentos horizontales y verticales.
TECNOLOGÍA		Representación gráfica de función cuadrática y $\sqrt{x}$. Puntos fijos: atractores o repulsores. Dependencia de las condiciones iniciales.
TEORÍA		Funciones. Convergencia. Sucesiones. Noción no formal de límite.

Actividad 4: Composición de funciones

El proceso conocido como composición de funciones es uno de los conceptos algebraicos más básicos bajo el cual se construye el estudio de la iteración y el caos.

Composición de funciones: la formación de una función compuesta f(g(x)) es una nueva función que se obtiene aplicando g al argumento x seguida de otra f aplicada a g(x):

a	**g (x)**	**g(a)**	**f (x)**	**f(g(a))**

Máquina para componer funciones

Para obtener f (g(a)) comenzar con a y obtener el valor funcional g(a), luego usar g(a) como el próximo argumento y obtener el valor funcional f(g(a)).

Debemos pensar el diagrama de composición como una máquina g(x) que procesa el material a y obtiene el producto g(a). La máquina f(x) procesa este producto, g(a) y produce otro producto f(g(a)).

i) Use el valor de la entrada dada para determinar la salida en cada una de las siguientes composiciones. Use la salida de g(x) como el valor de entrada de f(x).

a)

4	$g(x) = x^2$		$f(x) = x+1$	

b)

-2	$g(x) = 3x$		$f(x) = x^2$	

c)

5 **$g(x) = (4x)^2$** **$f(x) = x-25$**

ii) Dibuje su propio diagrama y determine el valor de f(g(x)) para cada par de funciones dadas. Use x = 1 como el primer valor de entrada.

a) $g(x) = x + 3$, $f(x) = x^2$.
b) $g(x) = x^2$, $f(x) = x + 3$.
c) $g(x) = 2x + 5$, $f(x) = 0,5\ (x-5)$

iii) Utilice los pares definidos en ii) a-b-c para calcular las siguientes composiciones:

a) g(g(x)) b) g(f(x)) c) f(f(x))

considere, en todo los casos, como entrada x = -1.

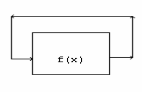
Esto verde va después de la tabla (**)

Análisis de la actividad

ACTIVIDAD 4 Composición de Funciones		
TAREA		Componer funciones. Iterar funciones. Generar una sucesión numérica.
TÉCNICA	Técnica	<u>Numérica</u>: En cada paso evaluar una función en el resultado del paso anterior.
	Dispositivo	Máquina para componer funciones. Ecuaciones que representan a una función. Calculadora.
	Gesto	Tomar un valor del dominio de la función, calcular la imagen por la primer función y al resultado calcularle la imagen por la segunda función. Apretar la tecla de la calculadora de manera correcta. Leer el display de la calculadora.
TECNOLOGÍA		Composición de funciones.
TEORÍA		Funciones. Sucesiones. Noción no formal de límite.

Actividad 5: Iteración numérica de funciones

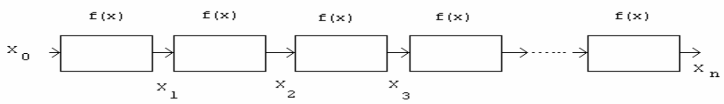
El proceso de iteración es el resultado de hacer algo una y otra vez , repetidamente. Iteración como una composición de funciones: El proceso recursivo de la iteración es la composición de una función con ella misma una y otra vez, la salida de un paso es la entrada para el paso posterior. Esto se ilustra en el siguiente diagrama:



Resultando, a partir de este proceso la siguiente secuencia de valores funcionales:

$$f_0(x) = x;\ f_1(x) = f(x);\ f_2(x) = f(f(x)), \ldots, f_{n+1}(x) = f(f_n(x))).$$

Otra manera de ver la iteración es considerar como argumento inicial x_0 y usarlo para obtener el valor $f(x_0) = x_1$. Luego usar x_1 como el próximo argumento y obtener el próximo valor adicional, $f(x_1) = x_2$ y así sucesivamente. Esto se ilustra en el siguiente diagrama:



Resultando, a partir de este proceso la siguiente secuencia de valores funcionales: $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

i) Realice la iteración hasta n = 8 de la función $\sqrt{x}$ *para los siguientes valores iniciales: 0,2; 0,85; 64; 1850. Use la calculadora y registre el resultado en la siguiente tabla. ¿ Hacia que valores parecen aproximarse las secuencias?*

	0,2	**0,85**	**4**	**1850**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Continúe el proceso de iteración para corroborar su conjetura.

ii) Use su calculadora para iterar la función $g(x) = x^2$*. Comience con el valor* x_0 *indicado y realice a iteración 8 veces. Registre en la tabla la secuencia resultante:*

	1	**5**	**0,2**	**-3**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				

Al hacer el análisis de la tabla anterior ¿qué noción aparece?
¿qué noción informal surge a partir del estudio del número de iteraciones y el valor inicial elegido?

Análisis de la actividad

Se produce el cambio de registro (marco) del gráfico al numérico lo que posibilita el progreso del conocimiento.

ACTIVIDAD 5 Iteración numérica funciones		
TAREA		Iterar funciones. Generar una sucesión numérica.
TÉCNICA	Técnica	Numérica: En cada paso evaluar una función en el resultado del paso anterior.
	Dispositivo	Ecuaciones que representan a una función. Calculadora. Tabla.
	Gesto	Tomar un valor del dominio de la función y realizar la repetida evaluación de la función. Apretar la tecla de la calculadora de manera correcta. Leer el display de la calculadora. Registrar los datos en una tabla.
TECNOLOGÍA		Composición de funciones.
TEORÍA		Funciones. Sucesiones. Noción no formal de límite. ε- N

Actividad 6: Importancia del valor inicial

Describa el comportamiento de la secuencia iterada que resulta de la iteración de $g(x) = x^2$ para:

- ***a)*** *cualquier valor inicial mayor que 1.*
- ***b)*** *cualquier valor inicial comprendido entre 0 y 1.*
- ***c)*** *cualquier valor inicial entre –1 y 0.*
- ***d)*** *cualquier valor inicial menor que –1.*

Análisis de la actividad

ACTIVIDAD 6 Importancia del valor inicial		
TAREA		Iterar funciones para valores iniciales propuestos. Generar una sucesión numérica. Analizar el comportamiento de la iteración en cada caso. Establecer tendencias.
TÉCNICA	Técnica	<u>Numérica</u>: En cada paso evaluar una función en el resultado del paso anterior.
	Dispositivo	Función cuadrática. Calculadora. Tabla.
	Gesto	Tomar un valor del dominio de la función y realizar la repetida evaluación de la función. Apretar la tecla de la calculadora de manera correcta. Leer el display de la calculadora. Registrar los datos en una tabla.
TECNOLOGÍA		Composición de funciones.
TEORÍA		Funciones. Sucesiones. Noción no formal de límite. ε- N

CONCLUSIONES

- ✓ Las nociones Iteración de Funciones y Punto Fijo se construyen a partir de estas 6 actividades.
- ✓ Esta propuesta conlleva trabajar con distintos registros semióticos: geométrico, numérico y simbólico.
- ✓ La secuenciación de los ejercicios permite a los alumnos alcanzar el dominio de ciertas técnicas, algunas sencillas como manejar una calculadora, otras que requieren mayor esfuerzo como trabajar en la construcción de caminos para llevar a cabo la iteración gráfica.
- ✓ El dominio de estas técnicas hace que las mismas se constituyan en gestos de base.
- ✓ La utilización de caminos en las representaciones gráficas se constituye en una herramienta de validación (Bloch, 2000, pag. 235) ya que se relaciona con conocimientos previos de los alumnos como las funciones lineales, afines, cuadráticas, etc.
- ✓ El dominio de la técnica gráfica (análisis gráfico) permite trabajar la iteración de funciones como una composición de la función con ella misma de manera reiterada.
- ✓ La representación gráfica de funciones y la utilización de los caminos contribuyen a la construcción del conocimiento acerca de las funciones como objetos y permiten que los conceptos se constituyan en nuevos objetos que disponen de un medio para operar sobre los primeros.

- ✓ Las transformaciones horizontales y verticales son instrumentos para componer gráficamente funciones y es, a través de esta estructura, que se desarrolla, sin definir límite, continuidad y derivada, una parte del cálculo propio de la enseñanza media (Lacasta Zabalza, 2000, pag. 4).

La técnica gráfica está bien explicitada y permite llevar a cabo de una manera correcta la construcción de caminos, el proceso algorítmico de movimientos repetidos arriba y abajo entre una curva y la diagonal con segmentos horizontales y verticales conectados.

Pensamos que es conveniente dominar primero la técnica gráfica para iterar funciones antes de presentar la iteración numérica, ya que consideramos que el análisis gráfico permite percibir de una manera mucho más atractiva y dinámica la iteración de una función.

En la presentación de los ejercicios de la guía existe una secuencia lógica de pensamiento ya que los mismos permiten ordenar cuestiones, problemas, técnicas (construcción de caminos), tecnologías (punto fijo atractor, repulsor).

BIBLIOGRAFÍA

- ✓ Bloch, Isabelle- 1999- L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'elève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique- détermination d'un milieu-connaissances et savoirs- Recherches en Didactique des Mathématiques- La Pensée Sauvage - Vol 19/2, pág. 135- 194.
- ✓ Chevallard, Y. , Bosch, M. y Gascón, J.(1997). Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.
- ✓ Chevallard, Yves- 1991- La transposición didáctica – del saber sabio al saber enseñado- Aique Grupo Editor.
- ✓ Chevallard, Yves- 1992- Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives aportes par une approche anthropologique- Recherches en Didactique des Mathématiques- La Pensée Sauvage – Vol 12/1, pág. 73- 112. Francia.
- ✓ Douady, Regine (1986**)** Juego de Campos y Dialéctica Herramienta–Objeto. Recherches en Didactique des Mathemathiques. Vol. 7 pp.5-31
- ✓ Duval, R- 1998- Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamientos- págs 173-201-Investigaciones en Matemática Educativa. Ed. Hitt, Fernando- México
- ✓ Duval, R.-1999- Argumentar, demostrar , explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?- Editorial Iberoamérica- México.
- ✓ Godino, J. D. y Batanero, C.(1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactiques des Mathématiques, Vol 14(3):325-355
- ✓ Lacasta Zabalza, E. (2000)- Determinación de concepciones y funcionamiento del gráfico cartesiano de funciones: problemática didáctica. XIV Jornadas del Seminario Interuniversitario en Didáctica de Las Matemáticas (SIIDM)- Cangas do Morrazo (Pontevedra)- España.
- ✓ Oviedo, L. (2003)- La enseñanza de los sistemas dinámicos discretos como medio para analizar dificultades cognitivas en cuanto a las nociones de función y número real en la transición escuela media-universidad. Tesis de Maestría. UNRC.