C453-37

LOS ENIGMAS MATEMÁTICOS COMO FUENTE HISTÓRICA DE LA MATEMÁTICA DISCRETA

José L. AGUADO, Emilio AGUIRRE, Laura A. RÉBORA, María E. VELÁZQUEZ

Facultad de Ciencias Exactas - UNCPBA
Campus Universitario -7000 Tandil - Argentina
jaguado@exa.unicen.edu.ar

Nivel Educativo: Educación polimodal y superior.

Palabras Claves: enigmas matemáticos, matemática discreta.

RESUMEN

La historia entera de la matemática se entreteje con juegos o enigmas matemáticos que han llevado al estudio de muchas áreas de matemática. Hay una larga lista de problemas de matemática aplicada fuera del cálculo infinitesimal.
Un reciente y muy actual tema es por ejemplo la criptografía matemática que está basada en la Teoría de Números (el estudio de los enteros positivos 1, 2, 3, ...), y se aplica ampliamente, entre otros, en seguridad informática y banca electrónica.
La matemática usada en estas aplicaciones se llama colectivamente *matemática discreta*. “Discreto” aquí se usa como el opuesto de “continuo”; también este término es a menudo usado en el sentido más restrictivo de “finito”.
El objetivo de este trabajo es investigar cómo “el método de matemática discreta”, inspirado en fuentes históricas, puede venir en ayuda para la formación de profesores de matemática y proveerles otros elementos a la hora de motivar a sus alumnos.

INTRODUCCIÓN

Para la mayoría de los estudiantes, la primera y a menudo única área de matemática aprendida en la universidad es el cálculo (o análisis) y algún curso casi informativo de Álgebra Lineal. Y a veces tan sólo a fin de encarar el estudio de métodos estadísticos. Pero el cálculo también es muy técnico. Toma mucho trabajo incluso introducir sus nociones fundamentales como continuidad o derivada. Conseguir un sentimiento sobre la potencia de sus métodos, y comprender sus aplicaciones importantes en detalle, tarda años de estudio.
Si se desea formar matemáticos, ingenieros o científicos de la computación, o analistas de sistemas esta inversión en tiempo es necesaria. Pero si la meta es desarrollar un sentimiento sobre qué otros temas trata la matemática, dónde los métodos matemáticos pueden ser útiles, y qué tipo de preguntas se hacen los matemáticos mientras avanzan en sus trabajos de investigación, también es posible buscar la respuesta en otras áreas de la matemática.
Hay una larga historia de éxitos de matemática aplicada fuera del cálculo.
Un reciente y muy actual tema es por ejemplo la criptografía matemática que está basada en la Teoría de Números (el estudio de los enteros positivos 1, 2, 3...), y se aplica ampliamente,

entre otros, en seguridad informática y banca electrónica. Otras áreas importantes en matemática discreta aplicada incluyen programación lineal, teoría de códigos y la teoría de la informática misma.
La matemática usada en estas aplicaciones se llama colectivamente *matemática discreta*. “Discreto” aquí se usa como el opuesto de “continuo”; también este término es a menudo usado en el sentido más restrictivo de “finito”.
El objetivo de este trabajo es investigar cómo “el método de matemática discreta” puede venir en ayuda para la formación de profesores de matemática y proveerles otros elementos a la hora de motivar a sus alumnos.

CÓMO EL PARADIGMA CONTINUO HA INFLUIDO EN LOS PROGRAMAS DE LAS CARRERAS UNIVERSITARIAS

Hay muchas maneras de dividir matemática en una dicotomía de dos culturas. Una importante es Discreto vs. Continuo. Hasta casi finales del siglo XX, el paradigma continuo era dominante, como puede dar testimonio la simple anotación: una familia importante de espacios de Banach de funciones continuas son denotadas por L^p, con una L importante, mientras su análogo discreto se denota por el más humilde l^p. Una función de una variable continua es denotada por $f(x)$, donde el continuo f se escribe al mismo nivel que el argumento continuo x, pero si el argumento es discreto, entonces se da a la función el nombre abolicionista de “sucesión”, al argumento discreto se lo llama n y se escribe en el incómodo formato f_n.
De hecho, el paradigma continuo nace del hecho que el mundo real engaña nuestra intuición presentándole la ilusión de un modelo continuo. El universo de objetos no es continuo, es discreto. Cuando vemos una película, tenemos la apariencia de continuidad, pero de hecho consiste en una sucesión discreta de marcos. Cuando miramos una fotografía, tenemos la sensación de una imagen continua pero realmente es una colección de píxeles discretos. En un nivel más fundamental, sabemos ahora que la energía y la materia (y probablemente tiempo y también espacio) son discretos. La recta real continua que vemos es una creación de nuestro cerebro y sistema nervioso. Se postula que los modelos discretos “son males necesarios para aproximar este mundo real” debido a la innata naturaleza “discreta” de la computadora digital. Irónicamente, la verdad es lo opuesto. En consecuencia, el análisis continuo y la geometría son también aproximaciones del mundo real, necesarios por los recursos muy limitados del intelecto humano.
Pero es verdad que el cálculo es el campo más importante de la matemática. Su aparición en el siglo XVII señaló el nacimiento de la matemática moderna y fue la llave para las aplicaciones exitosas de la matemática en las ciencias. Los esfuerzos que dedicaron Cauchy, Weierstrass y Dedekind entre muchos otros hacia una fundación rigurosa del análisis dieron sus frutos a fines del siglo IXX, pero se hace necesario lidiar con conjuntos infinitos, lo que trae aparejado la aparición de las Paradojas del Infinito. Este precedente ontológico de dos siglos tan sólo para definir los fundamentos del análisis debería poner en guardia a los didácticos de la ciencia cuando analizan la enseñanza del cálculo en la universidad y la ruptura con el nivel de enseñanza media. Debe concederse que la geometría real y análisis son simplificaciones necesarias para permitirles a los humanos progresar en ciencia y matemática, pero ahora que un Esclavo Digital ha llegado (la computadora), podemos empezar el estudio de la matemática discreta con mayor profundidad. Esta necesidad de estudiar la matemática discreta con mayor atención, se ha puesto de manifiesto en la discusión sobre la matemática que requiere la formación de un Computador Científico. Hemos descubierto que es bastante distinto a lo que se incluye en los programas de matemática de las ingenierías clásicas.

La metodología utilizada en computación se nutre de resultados principalmente de áreas tales como lógica, álgebra booleana, combinatoria, teoría de grafos, teoría de números y geometría combinatoria; temas todos englobados en lo que hoy se llama matemática discreta. En la sección siguiente esperamos poder ilustrar que esta matemática discreta es un espacio que se ha venido construyendo desde épocas muy tempranas y donde se discuten métodos y resultado muy antiguos, a menudo remontándose aún mucho más atrás al tiempo de los grandes matemáticos griegos.

UN POCO DE HISTORIA SOBRE LOS ENIGMAS MATEMÁTICOS

Los *enigmas matemáticos o acertijos* (*puzzles*) varían desde problemas simples a muy profundos que todavía no han sido resueltos por los matemáticos profesionales. La historia entera de matemática se entreteje con juegos matemáticos que han llevado al estudio de muchas áreas de matemática. Juegos con números, figuras geométricas, problemas de redes y problemas de combinatoria están entre los tipos conocidos de enigmas que derivaron en la matemática discreta.
Esta matemática está viva, con más nuevas ideas y más urgentes problemas no resueltos que antes. La matemática discreta es un arte, donde la belleza de ideas y métodos son tan importantes como su dificultad o pertinencia.
El papiro Rhind muestra que los antiguos egipcios basaron su matemática principalmente en problemas de tipo de enigma. Por ejemplo en este papiro, escrito en alrededor de 1850 AC, se ve un tipo bastante familiar de enigma.

Siete casas tienen cada una siete gatos. Cada gato mata siete ratones. Cada ratón había comido siete granos. Cada grano habría producido siete espigas. Cada espiga tiene siete granos ¿Cuál es el total de granos?

Problemas parecidos aparecen en el libro de Fibonacci, *Liber Abaci* escrito en 1202 basados en la misma idea (y en el número 7). Fibonacci es famoso por su descubrimiento de la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... donde cada número es la suma de los dos anteriores. La riqueza matemática de esta sucesión es tal que actualmente hay una publicación periódica consagrada a temas relacionados a la misma. Sin embargo la sucesión no aparece en el trabajo de Fibonacci, sino sólo el famoso Problema de los Conejos:

Un hombre tiene una pareja de conejos. ¿Cuántos parejas de conejos pueden producirse de esta pareja al cabo de un año si se supone que todos los meses cada pareja engendra una nueva pareja y cada pareja deviene productiva al segundo mes de nacida?

Hegesippus dice que Josephus salvó su vida de la siguiente manera. Según cuenta, después de que los romanos habían capturado Jotapat, Josephus y cuarenta judíos tomaron refugio en una cueva. Josephus, con mucha aversión, encontró que, exceptuando él y otro hombre, los demás estaban resueltos a suicidarse para no caer en manos de sus conquistadores. Temiendo mostrar su oposición demasiado abiertamente consintió, pero declaró que el procedimiento debía llevarse a cabo de una manera ordenada, y sugirió:

que se colocaran en un círculo y que cada tercera persona debía matarse hasta que quedara una, quién debía comprometer también su suicidio

Se dice que él y el otro hombre se pusieron en los lugares 16 y 31 respectivamente y así salvaron sus vidas.
Una versión medieval del problema circuló en la forma siguiente:

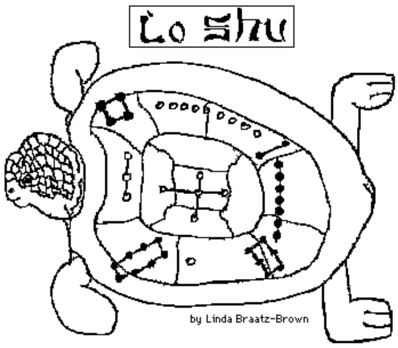
Una nave, llevando como pasajeros a 15 turcos y a 15 cristianos, encontró una tormenta, y para salvar la nave y tripulación, la mitad de los pasajeros tuvo que ser tirado en el mar.

Los pasajeros, todos de acuerdo, se pusieron en un círculo, y cada noveno hombre, contando de un cierto punto fue lanzado al mar.

Se deseaba encontrar un arreglo según el cual se salvan todos los cristianos. En este caso si C simboliza un cristiano y T un turco nosotros debemos colocar a los hombres así: CCCCTTTTTCCTCCCTCTTCCTTTCTTCCT

Una de las referencias más antiguas sobre enigmas en ajedrez se atribuye al matemático árabe Ibn Kallikan que, en 1256, propone el problema de los granos de trigo, 1 en el primer cuadrado del tablero ajedrez, 2 en el segundo, 4 en el tercer, 8 en el cuarto etc.
El problema más antiguo que involucra piezas de ajedrez se debe Guarini di Forli quién en 1512 pregunta cómo dos caballos blancos podrían intercambiarse con dos caballos negros si se colocan en las esquinas de un tablero de 3 x 3.

Los cuadrados mágicos consisten de un cuadrado de n x n llenado por los números 1, 2, 3,..., n^2, de manera que cada fila, cada columna y ambas diagonales principales sumen al mismo número. Se sabe que es posible remontarse hasta 2200 AC, cuando los chinos lo llamaron el problema del río Lo-Shu.



A principios del Siglo XVI, Cornelius Agrippa construyó cuadrados para n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y los asoció con los siete planetas conocidos entonces (incluso el Sol y la Luna). Un grabado famoso de Dürero, *La Melancolía,* hecho en 1514 incluye también un cuadrado mágico.
Dar una fórmula para el número total de cuadrados mágicos de un orden dado es todavía un problema no resuelto. Incluso para el caso n = 5 sigue sin resolverse. Para n = 4 hay 880 cuadrados mágicos. Veblen en 1908, usó métodos matriciales para estudiar cuadrados mágicos.
Otros nombre en la lista de antiguos inventores es Cardano, que concibió un juego que consiste en varios anillos en una barra. Aparece en la edición de 1550 de su libro *De Subtililate*. Este problema es similar a las Torres de Hanoi. Después, en 1883, Lucas (el creador del problema de las Torres de Hanoi) da una bonita solución al problema de los anillos de Cardano usando aritmética binaria.
Tartaglia, quién simultáneamente con Cardano describió un método para hallar las soluciones algebraicas de la ecuación cúbica, fue otro inventor famoso de recreos matemáticos. Concibió muchos problemas aritméticos, y contribuyó a los problemas con pesas.
Bachet fue famoso como poeta, matemático y traductor de la Academia Francesa. Es conocido por su traducción de 1621 de la Arithmetica de Diofanto (el libro que Fermat estaba leyendo cuando escribió al margen con su famoso Ultimo Teorema).

Bachet también fue conocido como un coleccionista de enigmas matemáticos que publicó en su libro *Problèmes plaisans et délectables qui font par les nombres*, en 1612. Este libro contiene muchos de los problemas mencionados anteriormente. Por ejemplo el siguiente problema con pesas:
¿Cuál es el menor número de pesas que pueden usarse en una balanza con platillos para pesar cualquier número entero de libras de 1 a 40 inclusive, si las pesas pueden ponerse en cualquiera de los platillos de la balanza?
Hoy día, este tipo de problemas aparece en cualquier examen para alumnos de un curso de matemática discreta.
Euler es quizás el matemático cuyos enigmas han llevado a las disciplinas matemáticas más profundas. Además de problemas sobre cuadrados mágicos y problemas sobre número consideró también viajes del caballo en el tablero de ajedrez, el problema de los treinta y seis oficiales y el de los siete puentes de Königsberg.
Transcribimos un párrafo del artículo original de Euler, de la revista anual de la Academia de S. Petersburgo, 1736, Leonh. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis.* Comentarii Academiae Petropolitane ad annum MDCCXXXVI, Tomus VIII, págs. 128-140.
El Problema, bastante conocido, según me dijeron, era el siguiente: Hay una isla A en Königsberg (Regiomons), Prusia, llamada der Kneiphof, y el río que la rodea está dividido en dos brazos, tal como puede verse en la figura; los brazos de este río están cruzados por siete puentes; ***a****,* ***b****,* ***c****,* ***d****,* ***e****,* ***f*** *y* ***g****.*

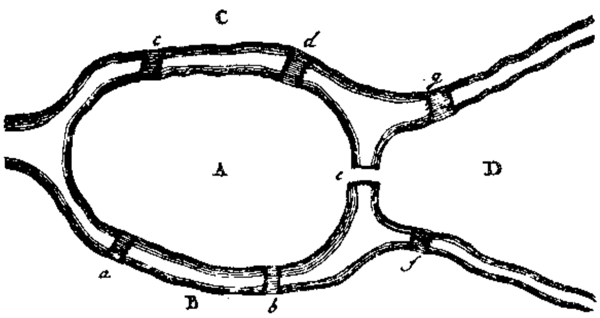


Figura 1

Se propuso, acerca de estos puentes, la siguiente cuestión: quien podía trazar un recorrido tal que pasara por cada puente una sola vez y no más. Me dijeron que unos negaban que esto fuera posible y otros lo dudaban; ninguno, sin embargo, lo afirmaba. Yo, a partir de esto, formulé según mi idea, el problema muy general de averiguar, sea cual fuere la forma del río y su distribución en brazos, y sea cual fuere el número de puentes, si se podía pasar o no por cada puente una sola vez.

Euler no fue el primero en examinar el problema de viajes del caballo en el tablero de ajedrez. De Moivre y Montmort lo habían tratado y resuelto en el siglo XVIII después que hubo sido propuesto por Taylor. Ozanam y Montucla citan las soluciones de De Moivre y Montmort. Euler, en 1759 siguiendo una sugerencia de L. Bertrand de Ginebra, fue el primero en hacer un análisis matemático serio de este problema, introduciendo conceptos que devinieron muy importantes en la teoría de grafos actual. Lagrange también contribuyó a la comprensión del problema de los viajes del caballo, como hizo Vandermonde.
El problema de los siete puentes Königsberg marcó el comienzo de la Teoría de Grafos y la Topología. Curiosamente la idea de la solución de Euler es combinatoria, pero hoy en día, la Topología es presentada como el estudio de las funciones continuas, cuando de hecho es una forma de geometría.

Martin Gardner es en la actualidad uno de los más importantes inventores profesionales modernos de enigmas, también recopilador y coleccionista. Gardner escribió una columna muy buena en *Scientific American* por aproximadamente 30 años.
El más famoso de recientes enigmas es el del *cubo de Rubik* inventado por el húngaro Ernö Rubik. Adquirió una fama increíble. Fue inventado en 1974, patentado en 1975 y se puso en el mercado en Hungría en 1977. Sin embargo realmente no empezó como una manía hasta 1981. Ya en 1982 se habían vendido 10 millones de cubos en Hungría, más que la población del país. Se estima que se vendieron 100 millones a nivel mundial. Realmente es un enigma basado en la teoría de grupos, aunque no muchas personas saben esto.
El cubo consiste en 27 cubos más pequeños que, en la configuración inicial, están coloreados para que las 6 caras del cubo grande estén coloreadas en 6 colores distintos. Pueden rodarse los 9 cubos que forman una cara para obtener 45 configuraciones. Hay 43 252 003 274 489 856 000$\sim 4.32520\times 10^{19}$ arreglos diferentes de los cubos pequeños. La resolución de este problema muestra la importancia de la noción de clases conjugadas y conmutadores en un grupo.

CÓMO CREAR UN ESPACIO PARA EL RAZONAMIENTO DISCRETO EN EL SABER ENSEÑADO Y CUÁLES SON LOS PELIGROS

Es importante comprender que no puede hacerse matemática sin pruebas. Declarar los hechos meramente, sin decir algo sobre por qué estos hechos son válidos, está muy lejos del espíritu de la matemática y hacerlo así imposibilita dar cualquier idea sobre cómo funciona esta ciencia. Por eso, dondequiera que es posible, nosotros los formadores de matemáticos damos las pruebas de los teoremas.
Otro ingrediente importante de matemática es la resolución de problemas. Nadie será capaz de aprender cualquier rama de la matemática sin “ensuciarse las manos” ni probar las ideas aprendidas si no puede aplicarlas en la solución de problemas. Para algunos, esto puede sonar atemorizante, pero de hecho la mayoría las personas realizamos este tipo de actividad casi cada día: cuando jugamos una partida de ajedrez o resolvemos un enigma, estamos resolviendo problemas de matemática discreta.
Hemos comprobado la utilidad de enfrentar a alumnos de matemática discreta enunciando problemas en el estilo de los enigmas matemáticos: una motivación espontánea. La familiaridad con los elementos involucrados, la posibilidad de ensayar soluciones heurísticas, sin la presión acuciante de recitar bien plegarias como “para todo ε existe un δ...”, los anima inmediatamente, a trabajar solos o en grupos, a conjeturar soluciones y a generalizar sus resultados. Contar con un número suficiente de computadoras para que realicen sus comprobaciones es, por ahora, nuestro mayor anhelo. La aparición de contraejemplos naturales cuando realizan una conjetura falsa es en este caso una experiencia que reafirma en los alumnos la certidumbre de que están “trabajando en matemática” y, lejos de desanimarlos, los motiva a buscar un apoyo teórico..
Mientras el análisis discreto es conceptualmente más simple y más “real” que el análisis continuo, técnicamente es tan difícil como este último. Los hechos bastante simples, elementales, pueden ser sumamente difíciles de demostrar, y algunas tales pruebas pueden requerir tomar cursos avanzados. En estos casos, nosotros declararemos por lo menos que la prueba es muy técnica y va más allá del alcance del curso.
¿Entonces, se argüirá, en qué se fundaría la propuesta de perder tiempo en temas discretos, si no están justificados por necesidades curriculares?
Damos nuestra respuesta a través del siguiente ejemplo:

Dada la información que ningún ser humano tiene más de 300.000 cabellos en su cabeza y que según un censo reciente la ciudad de Mar del Plata tiene una población de más de 600.000 habitantes, entonces hay al menos dos habitantes de esa ciudad que tienen la misma cantidad de cabellos.

Si podemos conseguir que un grupo de alumnos sea capaz de descubrir una ley matemática escondida en la resolución del enigma anterior, habremos logrado en el contexto áulico que el saber sabio sufra la "transposición didáctica" natural señalada por Chevallard para llegar a convertirse en *saber enseñado.*
De hecho, el ejemplo seleccionado es una muestra de que la evaluación que vamos a realizar puede efectuarse sobre un tema que trasciende el universo escolar.
Nuestra experiencia como docentes tanto de la universidad como del nivel polimodal, nos inclina a pensar en la posibilidad de incluir en este último, temas de matemática discreta con las adaptaciones necesarias.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aguado, José L., Diez, Graciela, Rébora, Laura,*Diagramas de Karnaugh y Principio de Inclusión y Exclusión,* IX Encuentro Nacional I Internacional Sobre Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería. Universidad Tecnológica, Facultad Regional Nacional, Concepción del Uruguay, 2000.
[2] Aguado, José L., Diez, Graciela, Rébora, Laura, *Descripción de una Experiencia didáctica aplicada a un problema elemental de Conteo*, IV Taller Internacional Sobre la Enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura, Instituto Politécnico José Antonio Echeverría, La Habana, Cuba, 2000.
[3] Aguado, José L., Rébora, Laura, Velázquez, María, *Contando Cifras*, ECADIM, UNAN, Managua, Nicaragua, del 7 al 9 de febrero 2001.
[4] Aguado, José L., Rébora, Laura, Velázquez, María, *La Ronda de Josefo*, RELME XV, Universidad de El Salvador, Buenos Aires, Argentina, 2001.
[5] Aguado, José L., Rébora, Laura, Velázquez, María, *El extraño algoritmo del Profesor Toto,* II Congreso Internacional sobre la enseñanza de la Matemática por Computadora Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago Costa Rica, 2001.
[6] *Aguado, José L., Rébora, Laura, Velázquez, María,* Desarrollos en Series de Potencia de Funciones Racionales, *XI EMCI, San Miguel de Tucumán*, 2003.
[7] *Aguado, José Luis, Rébora, Laura, Velázquez, María,* Calculadora vs. Teoría, *XXVI REM, UMA, Rió IV, Córdoba*, 2003.
[8] Aguado, José Luis , Aguirre, Emilio, Rébora, Laura, *Un Ejercicio Metalógico, XII EMCI, San Juan,* 2004.
[9] Gardner, Martín, *Carnaval Matemático* Alianza Editorial, 1983.
[10] Gavrilov, G. P., Saposhenko, A. A. *Problemas de Matemática Discreta*. Editorial MIR, 1980.
[11] Niven, Ivan, Matemática de las Opciones o cómo contar sin contar. Red Olímpica 1995.
[12] St-Andrews Home Page
http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/history/HistTopics/Mathematical_games.html