C112-3

EN LA BÚSQUEDA COLABORATIVA DE CRITERIOS DE DISEÑO DE BUENOS PROBLEMAS CON NUEVOS RECURSOS

María Sandra FOFFANO, Marcel David POCHULU, Liliana Mónica SAIDÓN

Instituto Parroquial Nuestra Señora del Pilar – Pilar – Buenos Aires – Argentina
Universidad Nacional de Villa María – Villa María – Córdoba – Argentina
Centro de Investigación Babbage – Buenos Aires – Argentina
Arturo Jareutche 1550 – (5900) Villa María – Provincia de Córdoba
TE. Nº 0353–4533687/154083433
fliapaz@cotelcam.com.ar - mpochulu@arnet.com.ar - liliana.saidon@centrobabbage.com

Nivel Educativo: Tercer Ciclo Educación General Básica, Educación Polimodal/Nivel Medio y Educación Superior.

Palabras Claves: utilitarios, diseño, problemas, colaboración telemática.

RESUMEN

Los nuevos recursos respaldan el desarrollo de buenos problemas y el diálogo entre colegas instala el diseño como tema de análisis y (auto)crítica. Al dialogar con nuestros pares, interpelamos nuestra producción de oficio, dilucidando criterios, aquilatándolos y fijando prioridades en una inter–consulta profesional. Se vislumbran así, decisiones en cada problema, a veces acordes a anticipaciones y experiencias; otras, recién reflexionadas tras comunicarse. Avistamos el revés de la compleja trama de diversificadas racionalidades afectada por enraizadas costumbres, límites y condiciones de nuestro campo y de la dinámica institucional que –*habitus* mediante– opera por nosotros en más de una de nuestras decisiones espontáneas. Así, diseñar cobra entidad dentro del repertorio de tareas docentes, donde cooperar y vincularnos aflora inherente a nuestra profesión en divergencia al modelo: “cada maestrito con su librito”.

INTRODUCCIÓN

El ingreso de recursos informáticos a la escuela data de más de 20 años, aunque su empleo sistemático y oficial es comparativamente reciente. La publicación y comunicación de estudios y evaluaciones que den cuenta de resultados y de propuestas discutidas entre integrantes del sistema educativo, aún están en vías de desarrollo. Hacemos alusión puntualmente a propuestas donde:

– Los recursos informáticos no ocupen el centro de por sí, sino en tanto respalden el problema (al encauzar el planteo, facilitar una ilustración, exhibir representaciones, sistematizar exploraciones, enriquecer la experimentación, pautar la computación, agilizar cálculos o activar la resolución) o los conceptos matemáticos involucrados (permitiendo operar o experimentar; vincular, distinguiéndolas, la nominación apropiada y las referencias de la interfase; correlacionar la operatoria adecuada con las fórmulas, discerniendo unas de otras) o el aprendizaje y/o la resolución disciplinar.

– Se consideren las diversas perspectivas, examinando en particular la de nuestros alumnos y diferenciándola de la nuestra.

Apartando el empirismo silvestre, distinguimos lo que pondría en evidencia el utilitario (lo que objetivamente expone) de las apreciaciones que pueden llegan a construirse .Lo evidente desde nuestro cuantiosamente estructurado punto de mira matemático, puede no serlo para nuestros alumnos. Su enfoque dista del nuestro cualitativamente al extremo de divergir lo observable y pedirles que conjeturen a partir de lo que observan (a simple vista, expuesto en pantalla) puede desencadenar un diálogo de sordos.

Eventualmente, las acciones de búsqueda activa (en operaciones que incluso el utilitario respalda) van develando lo que era necesario examinar en descubrimientos tácitamente solidarios a la conjetura esperada. Esa activa búsqueda, ese esperado encuentro, esos descubrimientos que en clase se encaminarán a formalizaciones y registrarán vinculándolos al currículum disciplinar, pueden impulsarse a través de intervenciones que, cuando premeditamos o rescatamos sistemáticamente, conforman lo que llamaremos diseño.

Hemos registrado que, tal como nos sucede, al prepararse a emplear un recurso informático, cada profesor, de modo aislado, relega explicitar(se) netos criterios para trabajar significativamente (disciplinar y/o didácticamente), en pos de decidir qué software usar y en qué términos (distribución de tiempo y espacio) y contexto. Cuestiones muy importantes, desde luego, pero que no soslayan a las que dan fundamento y sustento al diseño. Las que, de hecho, lo constituyen en un verdadero diseño.

En nuestra experiencia, el intercambio de propuestas de trabajo entre colegas, instala el diseño como tema y consecuente objeto de estudio, análisis y (auto) crítica. Diseñar cobra entidad y al sumarse al manifiesto repertorio de tareas docentes, colaborar al respecto – en marcos de mutuo respeto de aportes y críticas– emerge como sustancial a nuestra profesión, a un modo de ejercerla opuesto al del lema “cada maestrito con su librito”.

En un diálogo de mutua y auto indagación de motivos, interpelamos nuestra producción de oficio en una ínterconsulta profesional. Avistamos la compleja trama de razones afectada por costumbres enraizadas, límites y condiciones de nuestro campo y de la dinámica institucional que – habitus mediante – opera por nosotros en determinaciones espontáneas. Se vislumbran, así, decisiones tomadas según anticipaciones y experiencias previas de los profesores o improvisadas primero y reflexionadas tras el intercambio (a menudo telemático). De esta forma, los nuevos recursos no sólo respaldan, también suscitan –en colaboración de recíproco enriquecimiento dialéctico – el diseño didáctico–disciplinar de buenos problemas de matemática[1].

Expondremos a continuación, tres propuestas de trabajo pensadas para alumnos y empleando recursos informáticos. Cada propuesta es considerada versión aún en proceso y resultado de una sucesión de etapas de diseño, cuyo detrás de escena vamos a compartir. Mostraremos cómo el análisis propio o el que surge del intercambio, perfila alternativas e impulsa a repensar, justificar y develar criterios que llevan a decidir y, en una segunda fase, revisar criterios de lo que puede conducir a nuevos cambios del diseño.

EXPLORANDO FUNCIONES EXPONENCIALES: INVESTIGACIÓN SOBRE GRAFICOS SIMÉTRICOS

La propuesta lleva a investigar, empleando un graficador, la modificación que va sufriendo

[1] La referencia es a buenos problemas a nivel escolar. Los buenos problemas escolares son los que promueven el aprendizaje de matemática. En el ámbito de la matemática, los buenos problemas devienen motores y motivos del desarrollo de la ciencia. Es importante distinguir unos de otros aún cuando a partir de ciertos niveles pudieran converger.

una gráfica al operar ciertos cambios en su ecuación. Para ello, se guía la exploración de los alumnos para que efectúen comparaciones entre las diversas representaciones vinculadas a las correspondientes ecuaciones, pasen al examen de sus parámetros y variables y lleguen a analizar la función exponencial para arribar a conclusiones generales. La práctica cotidiana establece que graficar en clase, requiere considerable tiempo, dados los diversos obstáculos que presentan los alumnos – desde la elección de escala adecuada a la ejecución correcta de cálculos para hallar las imágenes, hasta la destreza en la unión de los puntos obtenidos con una curva – para trazar cada función sin tropiezos.

No obstante, muchos profesores creemos preciso que los alumnos recorran el camino de graficación a mano para que en consonancia con el pausado compás de concreción de determinación de puntos para el trazo, identifiquen –en sus propios ritmos– lo que determina la forma de la curva, antes de emplazarles la inmediatez automática de un utilitario de graficación. Entonces sí, presentarles un graficador (los hay muy buenos, incluso y disponibles en castellano, en el repertorio del software libre). Usado correctamente, les aliviará el trazado y permitirá concentrarse en el análisis de aspectos destacables que el gráfico y, sobre todo, el registro de su tratamiento pueda proveerles. Ya abordada la etapa manual, el uso de un graficador facilita la observación de relaciones y propiedades que establecen las ecuaciones y los parámetros de las funciones, a partir del acceso a:

- una exploración que podría considerarse “experimental” (con el atractivo que este estilo conlleva)
- la sistemática puesta a prueba de conjeturas por la agilidad y fidelidad con que se reflejan los cambios de cada variable,
- el estudio metódico tanto de los datos obtenidos como de las operaciones con los valores, calculados con precisión inmediata.

El utilitario empleado presenta la ventaja de evitar el arduo trajín del trazado; brindar un gráfico exento de las imperfecciones del trazado en pizarrón o carpeta. Por otra parte, permite centrarse en los propósitos de las tareas: el alumno se predispone mejor a multiplicar intentos, seguir indicaciones del docente y a examinar con atención los resultados. Incluso, se detectan las relaciones implicadas en mejor tiempo y forma. Secundamos las consideraciones describiendo una instancia del trabajo.

Se plantea una serie de pares de ecuaciones como, por ejemplo, $y=3^x$ e $y=(1/3)^x$ que el grupo de alumnos graficará para comparar y detectar la simetría que las funciones mantienen. Luego deberán determinar cómo debe modificarse una función $y= a^x$ para que su gráfica presente la simetría observada en el grupo de pares propuestos.

Las actividades que conforman la propuesta se secuencian del siguiente modo:

- ✓ Organización de grupos de trabajo de dos o tres alumnos de acuerdo a la disponibilidad de computadoras.
- ✓ Distribución de copias del las guías de trabajo (una a cada alumno) y planteo de los términos del análisis a realizar.
- ✓ Realización del trabajo con la asistencia del docente en los casos que sea solicitada.
- ✓ Confección de un informe de trabajo que los alumnos deben realizar con un procesador de textos, donde se incluyen gráficos, observaciones, consideraciones y ejercitación de aplicación de los contenidos estudiados.
- ✓ Coevaluación en una puesta en común, tanto de las observaciones como de las conclusiones y ejercitación planteada.

La secuencia se organizó acorde a los objetivos propuestos y en pos de rescatar lo emergente respecto de contenidos[2] o diseño. Compartimos algunas observaciones que surgieron a lo

[2] Apareció, por ejemplo, la necesidad de discernir entre ecuaciones, fórmulas y formato de ingreso requerido por el utilitario.

largo del intercambio telemático con colegas y del examen tras la puesta en práctica. Las alternativas del planteo del problema que consideramos en el intercambio, fueron:

- ✓ Presentar el conjunto de ecuaciones de a pares (pares cuyos gráficos guardan determinada simetría) para que los grupos conjeturaran por exploración y detección (apelando al utilitario) el correlato entre fórmulas de las ecuaciones y relación de sus correspondientes gráficos. Tras el examen de observaciones, anotar las modificaciones que deduzcan necesarias para lograr que diversas ecuaciones presenten curvas de ciertas simetrías respecto de la representación original.
- ✓ Presentar un conjunto disperso de ecuaciones para que los estudiantes encontraran, tras graficarlas, algún criterio para agruparlas. El resto de la propuesta se mantenía virtualmente idéntico.

La última opción implicaba un desafío de mayor nivel (más alto requerimiento de autonomía, búsqueda de estrategias, organización de la tarea distribuyendo funciones con compañeros para alcanzar la resolución a tiempo, monitoreo más amplio, etc.). Por otra parte, siendo el planteo más abierto (así como los posibles caminos a la resolución), cobraba mayor importancia registrar los descubrimientos alcanzados, mientras la etapa de aplicación resultaba menos relevante. Sin duda parecía más abierta la segunda alternativa. La primera, más pautada, podría hasta tildarse de conductista, pero fue por la que se optó en la ocasión de trabajo con los alumnos. Los criterios de diseño que primaron para elegirla fueron:

- ✓ La actividad introducía el tema y se intentaba que recavaran información y examinaran variedad de gráficas antes de detenerse en deducciones complicadas por la apertura de la segunda alternativa.
- ✓ La disponibilidad del laboratorio para la clase de matemática es escasa y la segunda alternativa requería un plazo más extenso.
- ✓ Algunos grupos no tenían experiencia operatoria ni conocimientos suficientes para organizar su propia exploración y otorgar sentido a los resultados.
- ✓ Los estudiantes que más respaldo necesitaban no sabrían "dónde" mirar y para llevarlos a lograr lo que se pedía, finalmente "ayudaríamos" más de la cuenta, "conduciéndolos" al lugar donde nosotros queremos que miren y "vean".

Si una alta proporción de los estudiantes tendría que ser guiados, sin que surja espontáneamente el modo de organizarse para establecer conjeturas desde sus propias observaciones, lo más conveniente era sincerar la necesidad de pautas tal como las que se proponían en la primera alternativa. Decisión de diseño que dista de ser absoluta: derivó de considerar la coyuntura, las condiciones, el encuadre y grupo en particular entre otras variables.

Resulta evidente la necesidad de la presencia del docente, pues es quien puede examinar si el estudio, las construcciones, las observaciones o las conclusiones son adecuadas y se atienen a lo que se solicitaba e intervenir de aparecer un obstáculo.

Vale mencionar un ejemplo: sin discernir los requerimientos del utilitario para el ingreso de fórmulas del formato de la ecuación en la guía, en lugar de respetar la sintaxis que la ayuda del programa señala, algún grupo simplemente copió del documento – de formato Word en este caso – una ecuación y así como fue ingresada, el utilitario la interpretó como función lineal y como tal la trazó.

Hasta cierto punto, el grupo parecía no registrar el error, aceptando el gráfico aunque contara con conocimientos para saber que no era el que correspondía. La intervención docente los llevó a registrar este resultado incorrecto pero no a detectar el error de ejecución que lo originara. En el laboratorio de informática, se indicó la necesidad de ingresar acorde a la sintaxis requerida. En clase, se retomó el tema para examinar una cuestión no anticipada en el diseño pero de modo alguno trivial: la distinción entre fórmula de una ecuación, reglas de sintaxis del utilitario y operatoria de ingreso (teclas y caracteres representativos de signos).

Las consideraciones previas abren el debate sobre determinantes del diseño. Mencionemos, por ejemplo: grupo humano al que se dirige la propuesta (conocimiento y experiencia sobre contenidos involucrados), disponibilidad del laboratorio; alcance del planteo en tanto abra interrogantes (en ámbitos diferentes al laboratorio, con otros tiempos). En definitiva, todo lo que el docente con su experiencia y conocimiento de las condiciones en que desarrollará la propuesta considere adecuado regular para llevarla adelante.

SORTEANDO OBSTÁCULOS COOPERATIVAMENTE PARA DISEÑAR

En el último trabajo práctico del curso de capacitación denominado: *Resolución de Problemas con Utilitarios Geométricos,* de *Centro Babbage,* los docentes diseñan propuestas con utilitarios dinámicos con los que a lo largo del cuatrimestre se familiarizaron, resolviendo genuinos problemas. Diseñar un problema apelando a recursos que ya dominan, acorde a criterios con los que dicen coincidir, siguiendo pautas simples parece una tarea sencilla. Sin embargo, en seis años de evolución del curso, registramos indicios de obstáculos de distinto tipo y reiterados deslices. Analizaremos un par (sistemática y sugestivamente recurrentes) a través del estudio de una propuesta (y del progreso que la identificación situada de criterios parece promover más efectivamente que la discusión teórica. Sin pormenorizar, anotamos en escueto listado, diversos rasgos de la etapa de diseño final:

- ✓ La presión del final – examen final – puede inmovilizar o llevar a refugiarse en costumbres, ilusiones[3] o estereotipos[4].
- ✓ La atención genuina de puesta en práctica aún en un ámbito (el laboratorio) poco transitado puede resolverse con propuestas muy pautadas que escamotean la experimentación.
- ✓ El andamiaje a exploraciones que lleven a la emergencia de contenidos puede reducirse a considerar que el utilitario evidencia lo que se quiere enseñar (optimismo objetivo instrumental).
- ✓ El empleo de útiles cuyo tratamiento de los objetos geométricos implica todo un cambio conceptual puede diluirse en la expectativa de visualización inmediata[5]

Aunque el último trabajo práctico no es exactamente el momento ideal para insistir en la revisión como parte integral del diseño, muchos profesores evalúan críticamente sus propuestas y las reformulan. En los primeros intentos es frecuente que se eludan las posibilidades de comprensión de sus alumnos:

- ✓ resignándose a la aparición de resultados, incluso, soplados en la guía o al compás de preguntas sugerentes.
- ✓ obviando procurar situaciones o intervenciones pertinentes, confiando en la apertura espontánea a la validación.
- ✓ homologando realizaciones a atribución de sentido, a conceptualizaciones e incluso a conceptos formalizados.

[3] Lo homogeneidad de la clase es una ilusión usual aunque en el laboratorio, incluso se exaltan las disparidades y hay diferencias frente a cada computador

[4] Estamos hablando tanto del estereotipo de propuesta que no da la oportunidad al estudiante de organizar experiencias espaciales porque ofrece la materia como una estructura preorganizada, con todos los conceptos, definiciones y deducciones preconcebidas por el profesor, que sabe cuál es su uso con todo detalle —o mejor dicho, por el autor del libro de texto que ha establecido la estructura que expone cuidadosamente todos sus secretos – como del clásico abordaje y tratamiento **estático** de los objetos geométricos en lugar del de la matemática relacional, más acorde al que ofrecen los utilitarios ***dinámicos***.

[5] Creencia propia de una representación empirista del aprendizaje concordante con la enseñanza demostrativa.

Según nuestra experiencia, las devoluciones en intercambio colaborativo, promueven, aunque no garantizan, la revisión reflexiva, que lleva a la evolución de las propuestas iniciales que se van modificando hasta constituir verdaderos problemas.
Aunque esto no explota cabalmente el potencial de los utilitarios (los problemas tradicionales no son dinámicos en su planteo, ni suelen ser abiertos o prestarse a la exploración), es frecuente comenzar con propuestas convencionales, alterando el enunciado oportunamente para que impulsen a la investigación. Las actividades son inicialmente más estáticas que dinámicas y, experiencia y reflexión mediante, se expanda el encuadre tradicional incorporando la nueva perspectiva. Analicemos ejemplos representativos:
<u>Demostración de un teorema o propiedad</u>
a) Presentación "textual" habitual: *Demuestra que: "La altura de un triángulo rectángulo, del ángulo recto a la hipotenusa, lo divide en dos triángulos semejantes", o "En cualquier triángulo rectángulo, son complementarios entre sí sus ángulos no rectos", o "los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180º".*
b) Vía utilitarios geométricos en una primera "traducción" se podría formular así: *"Explorando dinámicamente la construcción de un triángulo rectángulo, ¿podrías conjeturar alguna regularidad en la relación entre los ángulos y triángulos en que lo divide la altura perpendicular a la hipotenusa?"*
c) En estilo expositivo[6]: *"Traza un triángulo rectángulo, marca la altura (...). Toma medidas. Investiga relaciones entre ángulos y triángulos creados. Deforma la construcción y analiza propiedades que se conservan (...) y formular alguna conjetura."*
d) Alternativa de exploración empírica y hacia el descubrimiento de procedimientos válidos: *¿Cómo harías para conseguir que en un triángulo, dos de los ángulos sumen 90º?* o *¿Cómo harías para conseguir que en un triángulo, dos de los ángulos resulten mutuamente complementarios?*
Aquí aparece un desafío de acción tal que en el camino de establecer la estrategia óptima, se re–descubre funcionalmente una de las propiedades más conocidas de la suma de los ángulos de los triángulos y se evidencia la de complementariedad recíproca entre los ángulos no rectos de un triángulo rectángulo.
Para establecer un planteo de estilo más algebraico[7] podríamos formularlo así: *¿Cómo harías para conseguir que en un triángulo, dos de los ángulos <u>sumen entre ambos, lo mismo que el tercero</u>? Busca figuras en las que una parte de sus ángulos sumen lo mismo que la restante.*
Hacemos notar que despojar a las consignas de toda formulación o connotación colegial evita que los estudiantes se procuren una económica respuesta automática apelando a la memoria de asociación escolarizada y avancen a explorar cómo funciona la construcción implicada para poder mostrar o demostrar (en acción) o describir una explicación (quizá, valiéndose de construcciones auxiliares).
Las conjeturas pueden formularse de diferentes formas, y no es habitual que de la mera observación de una construcción, se desencadenen espontáneamente. Por evidente que

[6] El estilo es claramente expositivo, más allá del empleo del utilitario y de la supuesta guía para la acción: **expone** al interlocutor a una única presentación a la que el "director de escena" lo conduce paso a paso sin adelantarle siquiera el propósito, para que el espectador no pueda sino corroborar lo que "**allí** aparece" y no le quede sino avalarlo (como si **allí** estuviera objetivamente expuesto). Si el destinatario supera la posición que le asignan y se encumbra como activo lector (o mejor, coautor), recupera su autonomía para lograr efectivamente **re**presentar al proyectarle al boceto su transacción de sentido. Quizá la suya, no sea la canónica directamente reproducida pero sí dé pie a las intervenciones didácticas para alcanzar una más enriquecida y próxima a la institucional. Este albur habitual en las propuestas de enseñanza (que el destinatario devenga protagonista), puede estar, eventualmente, favorecido por el cambio de contrato propio del trabajo en laboratorio y con utilitarios. Pero, claro, no es predestinación vinculante al empleo de recursos informáticos.
[7] Podemos considerar **variables didácticas** a las alternativas (subrayadas) de cada una de las opciones de formulación del desafío.

aparezca a los ojos del docente, es poco probable que se elabore conjetura alguna por examen (mediciones, búsqueda de relaciones).
Es más factible que se despierten sospechas metódicas a partir de un patrón de resultados proveniente de acciones llevadas adelante con una finalidad, es decir, acciones que se proponen para alcanzar un objetivo, resolver un problema. Son las acciones en situaciones determinadas las que dan las "claves", las acciones que funcionan primero como recursos adecuados más o menos implícitos antes de ser distinguidos, identificados, nominados y re–empleados concientemente en una formulación conjetural.
Conviene tener presente que el conocimiento no comienza con percepciones u observaciones, o con la recopilación de datos o de hechos, sino con problemas, donde la conjetura se despierta tras contrastar resultados de diversas tentativas de resolución en acción. Los utilitarios permiten darle a los objetos geométricos un tratamiento organizado para propósitos prácticos sin la exigencia de formalización o formulación analítica previa, que suele inmovilizar a muchos de los estudiantes. La elaboración de una "regla de acción" (que entraña una conjetura) resulta a posteriori de sucesivos esfuerzos prácticos por alcanzar un resultado o lograr mayor efectividad en una operación.
Como es frecuente que los alumnos habilidosos, para encontrarle la vuelta operativa al problema mantengan tácito el procedimiento porque no logran articularlo suficientemente rápida y completamente, conviene diseñar en los problemas la necesidad de un logro y la de comunicar el modo de alcanzarlo en desafíos que interpelan, por ejemplo, con preguntas de la forma: *"¿cómo harían para lograr que...?"*.
Preguntas con este estilo conducen a que sea necesario lograr un desempeño exitoso, prestar atención exhaustiva a los detalles de producción y elaborar un mensaje explicativo, portador de la conjetura en cuestión.
La conjetura aparece, así, como técnica codificada antes que como producto de la visualización. Con los utilitarios, se puede llegar a las conjeturas vía el orden que impone el "diestro", el habilidoso, a sus acciones al correlacionarlas con los resultados prácticos más allá de las habituales apelaciones al examen analítico en que lo formal es prerrequisito (que, por lo general, sólo algunos de los estudiantes llega a cumplir).
Al relacionar y condicionar lo que *se pretende hacer* con lo que *se logra hacer*, al contrastar lo proyectado con los resultados obtenidos, se apela al utilitario para resolver el problema con una metodología proyectual que permite plantear la reflexión sobre algo que simultáneamente se está creando (en la interacción entre el estudiante y el objeto) y controlando. Se enriquece así la significación del objeto geométrico y permite ampliar el campo de análisis, práctico antes que formal, llegando a las conjeturas a través de la acción.
A través de un auténtico trabajo colaborativo entre los cursantes y tutores, se logran preparar los desafíos con propiciación de la exploración / experimentación en lugar de formularlos apelando a una respuesta analítica. Esto es, se logra abrir preguntas en que el análisis aparezca – si es que lo hace – al final de los logros de acción en lugar de interpelaciones del tipo: *¿Qué clase de triángulos parecen ser AOP y BOP?* o *¿Cuáles parecen ser los lados congruentes? (Medir para comprobar)*; o *¿En qué caso estos dos triángulos son congruentes? Justificar*; etc.
Pensando en un diseño que propicie acción de entrada y que los descubrimientos resulten del trabajo de exploración de los resultados de las acciones, tendríamos: *En el boceto, aparece un cuadrilátero ABCD con las bisectrices de A y B trazadas, intersectadas en P. Verás que sobre AB se trazó un punto al azar O que determina los triángulos APO y BPO. Ahora bien, ¿Cómo harías para que APO y BPO resulten congruentes? ¿Encontrás algún modo, o más de uno? ¿Cómo le explicarías a un compañero la manera de lograrlo?*
Si comparamos, estamos frente a un problema supuestamente idéntico (al menos en contenidos y "visualización" desencadenada) pero diseñado para apelar primero a la acción.

Pero dándole algunas vueltas al diseño, lo convertimos en problema con todas las de la ley, pues parte de la presunción de logro de vías de análisis tras las de acción en contraste con las posibilidades nuestras en que esos tipos de acción ya están interiorizados y hasta a nivel tácito.
Por último, podríamos conjeturar que, respecto a la categorización de problemas, los modelos internalizados, la matriz de aprendizaje (las creencias implícitas sustentadas en la experiencia vivida como alumnos y eventualmente corroborada a lo largo de nuestra formación), parecen mucho más resistentes a la influencia de estudios teóricos e incluso a la incorporación de medios y herramientas que al impacto de la práctica compartida y a lo vivencial. En tal sentido, experiencias de diseños colaborativos de problemas cumpliría no sólo un propósito disciplinar, sino también, de formación didáctica en la provisión de un modelo alternativo al convencional.

TEORÍA DE NÚMEROS EN EGB Y EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Una de las dificultades más frecuentes que acarrean los alumnos de EGB en Teoría de Números – y que persisten aún en estudiantes que ingresan a carreras docentes de Matemática – deviene del hecho de considerar que un número es irracional cuando no se le encuentra con relativa facilidad un período a su expansión decimal. Incluso, subyace la idea de que el período de cualquier número racional debe contener sólo unos pocos dígitos, por lo cual, muchas de las expansiones decimales que efectúan con una calculadora tienden a reforzarles estas hipótesis, en tanto observan que no existe una aparente relación en la secuencia de números que muestra el visor.
Así, con la intención de desterrar estas falsas concepciones introdujimos a los estudiantes, tanto del Profesorado en Matemática como de EGB3, en un micromundo, tal como lo concibe Balacheff y Kaput (1996). Vale destacar que este micromundo es un *diseño* (con correspondiente selección y recorte) que desarrollamos como docentes, el cual apela a facilidades y alternativas habilitadas por un utilitario, y no una oferta objetiva y prevista de un software educativo particular.
No obstante ello, asumimos que el utilitario también determinará, en cierta forma, el tipo de retroalimentación que se producirá como consecuencia de las acciones y decisiones que toma el alumno durante la exploración. Puesto que no están predeterminadas las acciones del estudiante, él podrá explorar la estructura de los objetos, sus relaciones y registros representacionales que le suministra este micromundo, pudiendo generar nuevos objetos complejos a partir de los primitivos originales.
La actividad que les planteamos inicia cuando requerimos que formulen conjeturas e hipótesis acerca de las regularidades que pudieran encontrar en el período de los números racionales de la forma $a / 7$, con $a \in$ IN y $0 \leq a \leq 7$.
Sabemos de antemano que la consigna es totalmente abierta (la de formular conjeturas e hipótesis acerca de regularidades que puedan encontrarse) y resulta ambigua para muchos estudiantes, por lo cual es natural que nos pregunten: "*Pero, ¿qué es lo que tenemos que buscar?*". Al respecto, no dejamos de reconocer que para que un alumno se apropie de una situación, es necesario que pueda comprender cuál es la "situación" que se le plantea, entender qué es lo que se busca, e iniciar procedimientos de resolución cuyos resultados puedan ser evaluados, como bien lo expresa Saíz (1996). Pero la decisión de plantear una consigna totalmente abierta pretende "reproducir", por un lado, la verdadera actividad que suele llevarse a cabo en un contexto de investigación en Matemática, donde muchas veces la

búsqueda de los procedimientos de solución se relacionan fundamentalmente con el pensamiento intuitivo (*inside*) y formas especiales de la actividad heurística (*"eurekas"*).
Por el otro, pretendemos trascender el enfoque tradicional en que subyace, respecto de estos temas, una representación de la Matemática como ciencia acabada, bellamente ordenada y reducida a teorías y definiciones presentadas tal como han sido expuestas; ocultando condiciones o cuestiones que les dieron origen y dificultades que se presentaron en el camino de construcción.
Frente a estas instancias de aparente desconcierto y desasosiego por parte de los alumnos, se nos hace indispensable lograr que comprendan que pueden decidir individualmente la resolución del problema, los pasos a seguir; que pueden probar, que cuentan con el tiempo suficiente para ello, que pueden buscar distintas estrategias sin preocuparse por la presentación, que pueden borrar, tachar y volver a empezar, que es bueno atreverse a actuar, arriesgarse e inclusive a equivocarse.
Superados los primeros momentos de "resistencia", comienzan a aparecer las primeras hipótesis, lo que anima y entusiasma a otros grupos a identificar nuevas explicaciones o regularidades. Se establece de este modo un ambiente de cooperación en el aula, donde los alumnos trabajan juntos e interactúan unos con otros, contribuyendo a la construcción de conceptos; principalmente por la estimulación que realizamos como docentes para que sean defendidas las ideas ante las alternativas que presentan los demás.
Así, por ejemplo, una de las regularidades que encuentran con cierta facilidad deviene de obtener un múltiplo de 3 al sumar todos los dígitos del período, lo que da pie a sugerirles a los alumnos (si no surge espontáneamente en algún grupo de trabajo) que dividan al período en partes de igual cantidad de dígitos, y posteriormente sumen las mismas (Figura 1).

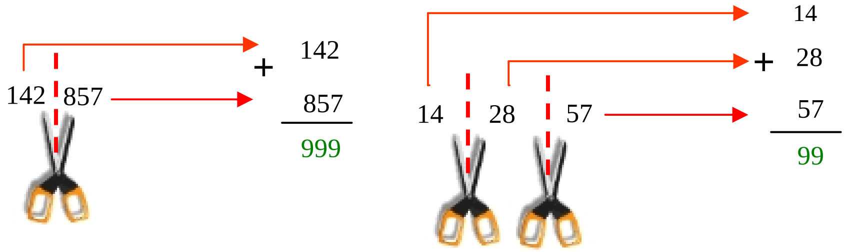

Figura 1: Análisis del período de 1/7

De esta forma, es posible observar que se obtiene una secuencia de nueves, lo cual habría permitido conocer la totalidad del período del número si se hubiesen conocido sólo algunos dígitos iniciales (como máximo la mitad de ellos). Igualmente determinan que el período tiene una longitud igual a 6, lo que resulta sugestivo pensando que el denominador es 7, y que es cíclico si se tiene en cuenta la siguiente secuencia: $1/7 = 0,\overline{142857}$, $3/7 = 0,\overline{428571}$, $2/7 = 0,\overline{285714}$, $6/7 = 0,\overline{857142}$, $4/7 = 0,\overline{571428}$, $5/7 = 0,\overline{714285}$.
La explicación a estos comportamientos no resulta trivial si no media nuestra orientación como coordinadores de la tarea, ya que puede ser analizado con diferentes niveles de complejidad y profundidad, tales como: restos que arroja la división (para alumnos de EGB3), o congruencias (para alumnos superiores). Como el desafío comporta que los alumnos expongan y pongan a prueba el pensamiento personal, las hipótesis son discutidas, analizadas y consensuadas, lo que hace necesario iniciar el proceso de institucionalización del conocimiento matemático así construido. Aquí, la formalización y generalización de los resultados adquiere relevancia, puesto que entre todos los rigores científicos, el matemático es sin duda el más sutil e imprescindible – como lo expresa Alsina y Guzmán (1996) – porque el propio oficio se hunde si el rigor brilla por su ausencia.

Es en esta etapa donde comienzan a surgir y perfilarse, por parte de los alumnos y a veces inducidas por nosotros, preguntas como: *¿Cuántos y cuáles son los racionales que comparten estas características en su período? ¿Puedo anticipar la longitud del período de un racional? ¿Cuál es la mínima cantidad de dígitos que requiero conocer del período de un racional para completar la serie restante?* entre otras.
Tratar de arribar, o acercarnos al menos, a respuestas parciales para estas preguntas conduciría a un trabajo tedioso si lo pensamos sólo con el uso de una calculadora o con lápiz y papel, pero sumamente sencillo si disponemos de algún software como *Maple* o *Mathematica*, ya que es configurable para que muestre en pantalla la cantidad de dígitos que uno desea. En consecuencia, podríamos trabajar con 50, 500 o más dígitos, y determinar el período de una cantidad considerable de números racionales para llegar a "convencernos" de que cierta fenomenología está presente en muchos de ellos.
En estas instancias, el software puede ayudarnos notablemente a efectuar la exploración de estos micromundos, y en el camino de búsqueda de explicaciones a estas regularidades transitamos por contenidos matemáticos de los más variados, como la Función φ de Euler, Divisibilidad de los Enteros, Congruencias y Restos de Cocientes (Aritmética Modular), Grupos Cíclicos, etc., los que son readaptados para cada nivel y en muchos casos, sin otorgarles sus nombres formales dentro de la Matemática.
Vale aclarar que las operaciones previstas necesariamente se incluyen en el marco de juego propuesto a los alumnos – como configurar para 50 ó 500 dígitos, explorar el 1/49 o el 1/17, analizar patrones secuenciales de determinado modo – ya que no son fenomenologías "espontáneas" o "propias" de la interacción con el utilitario, sino más bien, devienen del diseño de la actividad.
Insistamos en que de no mediar devoluciones, análisis y reflexiones con el grupo de estudiantes, no obra tal fenomenología que no es parte integral del micromundo y si esto no está anticipado y previsto por parte nuestra, pueden no alcanzarse las situaciones descriptas, aún con todas las chances y potencialidad que pudiera tener el software. Incluso, la no "devolución" – en el caso de uno o más grupos – puede obedecer a diversos motivos, entre los cuales mencionamos la necesidad de ajustes del diseño de la actividad, puesto que los estudiantes podrían operar, registrar todos los resultados y ser el docente el único que estuviera llevando la apreciación más allá de una serie de operaciones y actividades realizadas, sin atribución de sentido simétrico para los estudiantes.
De la misma manera, al compartir la propuesta con colegas, anticipamos, como una cuestión de diseño, la propia institucionalización del conocimiento matemático, puesto que de este modo favorece al desarrollo de la situación problemática, ya sea por las construcciones que se llevan a cabo, por los propios aprendizajes que se construyen, o por las concepciones que intentamos modificar. Asimismo, destacamos que el diseño de la propuesta presenta las condiciones sugeridas por Douady, en Saiz (1996) para seleccionar verdaderas situaciones problemáticas para los alumnos, tales como: El enunciado tiene sentido en el campo de conocimientos del alumno y de la currícula escolar; el alumno puede determinar lo que puede ser una respuesta al problema, siendo independiente de su capacidad para concebir una estrategia de respuesta o la validación de una propuesta; el alumno puede iniciar un procedimiento de resolución, aunque la solución no es evidente, puesto que no puede proveer una respuesta completa sin desarrollar una argumentación que lo conduce a preguntas que no sabe responder inmediatamente; el problema es matemáticamente rico, en el sentido que involucra una red de conceptos bastante importante, pero no demasiados para que el alumno pueda abarcar su complejidad; el problema es abierto por la diversidad de preguntas que el alumno puede plantearse y por las diferentes estrategias que puede poner en acción; y el conocimiento que se desea lograr con el aprendizaje es el recurso científico para responder eficazmente al problema.

CONCLUSIONES

Ciertos utilitarios, de tratamiento dinámico, relacional y/o funcional de objetos matemáticos, ofrecen al docente y sus alumnos, un virtual banco de pruebas conceptual para redescubrir experimentalmente contenidos que, vía institucionalización, conformarán conocimientos. Concebir problemas valiéndose de esta interacción constructiva es un desafío de diseño que replantea nuestro rol.

Diseñar va más allá de preparar la clase, aunque por años se ha llamado así "preparar la clase" o "preparar el examen" sin mayores caracterizaciones. No es menester del empleo de herramientas (tradicionales o novedosas como los utilitarios) ni se agota en aceptar recursos (tecnológicos o no), ni dominar operatorias informáticas. En ocasiones resulta una buena clase no anticipada más que en un breve esbozo mental previo o surge de repentina inspiración (en la que reflexión y experiencia Interjuegan tácitamente lo suyo). Incluso – o sobre todo – en tales casos, la conciencia del diseño implicado en el desempeño espontáneo permite recuperar a posteriori inteligibilidad y características acorde a criterios que podamos distinguir (algunos, amalgamados en la complejidad viva de enseñar, no admiten identificación atómica). Como los útiles informáticos, con su novedad, ponen en evidencia la necesidad de diseñar y como es una de las áreas más compleja de nuestra tarea (invisible al cómputo de horas cátedra), es casi terapéutico distinguirla[8]; desagregarla de menciones globales (uso eficiente de la tecnología) y rescatara de descriptores que se atribuyen objetivamente al software (interactividad, visualización). El diseño criterioso es clave para usufructuar nuevos recursos – que aún interactivos, dinámicos, son apenas enseres tan rancios como las prácticas de uso – y respaldar el mentado cambio. Arduo cambio porque, como expresa Saidon (2002), involucra la complejidad de modificar, en instituciones que prefieren considerarse inmutables, arraigadas prácticas y no sólo las del ejercicio docente.

Suele considerarse que basta con ofrecernos a los docentes herramientas para que ideemos naturalmente problemas apropiados, que tomen ventaja de estos medios, se adecuen a los conocimientos de nuestros alumnos, desencadenen acción significativa y, por si fuera poco, descubrimiento. Sin embargo, diseñar buenos problemas en matemática, con útiles clásicos o modernos, implica todo un desafío que requiere aprendizaje, experiencia, espacio, tiempo y aceptación de la revisión crítica de lo realizado, sin poner en jaque la autoestima profesional.

Si el diseño se entiende como proceso, queda sujeto a la realimentación de la práctica y a cambios reguladas por criterios que el control va perfilando. Si un problema se concibe no como objeto definido por su planteo sino en función del contenido matemático que pone efectivamente en juego, se analizará en correlación a la respuesta que desencadene bajo ciertas condiciones estructurales y coyunturales[9]. En síntesis, en lugar de quedar fijado a la propuesta, emblemática y definitiva, el diseño de un buen problema podría considerarse como tarea docente en desenvolvimiento dialéctico.

Si abandonamos el optimismo objetivo, también a este respecto, convendremos que difícilmente el **problema** resulte más accesible sólo por contar con nuevas herramientas; ni apreciable tras la lectura de la secuencia de factores o serie de características que lo componen. Insistiendo en que lo observable no emerge del objeto –no es atributo del objeto sino atribución activa del sujeto– los invitamos a conformar espacios que den a este tipo de interacción con colegas, la oportunidad de acercarnos, en aproximaciones sucesivas, a la búsqueda común de buenos problemas.

---

[8] Si el desempeño se homologa al *rol* cualquier crítica desacredita la experiencia y lesiona la identidad – *ser* buen o mal docente – y se resiste sin permitir la distancia de atribución a decisiones a contemplar y/o criterios a revisar.

[9] Algunas de las más relevantes son: edad, nivel, saberes previos y estructura de conocimientos de destinatarios, recursos provistos, medios disponibles, encuadre institucional, concepción didáctica del docente, historia y memoria de la clase, entre otras.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. Y GUZMÁN, M. de. (1996). *Los matemáticos no son gente seria*. (Rubes. Barcelona).

BALACHEFF, N. y KAPUT, J. (1996). Computer–Based Learning Environment in Mathematics. En Bishop, A.J. et al, *International Handbook of Mathematical Education*, pp. 469 – 501.

SAIDÓN, L. (2000). *En la búsqueda de buenos problemas para nuevas herramientas: Los utilitarios geométricos se problematizan*. (Buenos Aires: Centro de Investigación Babbage).

SAIZ, I. (1996). Propuesta de Contenidos Básicos Comunes para la EGB. En *Fuentes para la transformación curricular – Matemática*. Ministerio de Cultura y Educación de la Nación.