C151-31

ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE FUNCIONES CON EL USO DE TIC'S

Estela TORROBA, Marisa REID, Nilda ETCHEVERRY

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UNLPam
Avda. Uruguay 151. Santa Rosa. La Pampa. Argentina
Teléfono: 02954-425166.
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior Universitaria.

Palabras Claves: límite, tecnología, enseñanza, aprendizaje.

RESUMEN

En este trabajo se presenta el relato de una experiencia desarrollada con estudiantes universitarios para introducir el concepto de límite mediante una propuesta didáctica diferencial basada en la visualización.
La propuesta se desarrolló durante el primer cuatrimestre del año 2006 con alumnos que cursaban la asignatura Análisis I correspondiente a las carreras Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estuvo organizada de la siguiente manera:

1. Clase teórica usando un software: introducción al concepto de límite mediante la definición formal en términos de.
2. Clase práctica en la sala de computación considerando aspectos gráficos y numéricos del concepto.
3. Clase de autoevaluación en la sala de computación con la inclusión de material extraído de Internet.

De la experiencia concluimos que la conjunción de abordajes visuales y algebraicos y el empleo de diversas representaciones: gráficas, tabulares, algebraicas, aparecen como necesarias y complementarias para resolver las cuestiones planteadas en el entorno de esta ecología cognitiva particular.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta el relato de una experiencia desarrollada con estudiantes universitarios para introducir el concepto de límite mediante una propuesta didáctica diferencial basada en la visualización.
Por visualización entendemos el proceso de formar imágenes, ya sea mentalmente o con el auxilio de lápiz y papel o tecnología. La visualización es empleada con el objetivo de estimular el proceso de descubrimiento matemático a fin de conseguir una mayor comprensión matemática (ZIMMERMANN; CUNNINGHAN, 1991).

Nuestra intención es desarrollar en los alumnos la visualización matemática, entendiéndola como la habilidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflexionar sobre la información visual generada a través del uso de tecnología.
De la experiencia realizada mostraremos aquí algunos episodios y nos proponemos describir y analizar:

1. Tipo de argumentaciones matemáticas utilizadas por los alumnos para justificar sus afirmaciones o validar sus conjeturas.
2. Las relaciones profesor-alumno-conocimiento matemático al trabajar en un ambiente computacional a partir de un nuevo abordaje de contenidos matemáticos.

El concepto de límite es la noción fundamental del Cálculo, ya que subyace a las diversas ramas de éste, aparece en la definición de casi todos los conceptos importantes del Cálculo, desde la continuidad hasta las derivadas, las integrales definidas, las sucesiones y las series. Para comprenderlo, se requiere un conocimiento profundo del concepto.
Nuestra experiencia docente en la enseñanza del Cálculo y la gran cantidad de investigaciones realizadas convergen en que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo. Acordamos con lo expresado por Artigue (1998) "este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa".
Es por ello que surge la idea de enseñar el tema límite de funciones basándonos en métodos dinámicos de aprendizaje cuyo objetivo será incorporar el conocimiento matemático mediante la visualización, el descubrimiento y la exploración .
En las siguientes secciones describiremos, sintéticamente, el grupo de estudiantes que participó de la experiencia, las tareas propuestas, los softwares utilizados y la forma en que se registraron las actividades desarrolladas por el grupo de estudiantes para su posterior análisis. Presentaremos lo ocurrido en tres encuentros que se realizaron con los estudiantes y reportaremos algunos episodios que nos brindan elementos para reflexionar acerca de algunos aspectos vinculados con los objetivos de investigación que mencionáramos anteriormente.

Grupo de estudiantes y planificación de las tareas

La propuesta que aquí se relata se desarrolló durante el primer cuatrimestre del año 2006 con alumnos que cursaban la asignatura Análisis I correspondiente a las carreras Profesorado en Matemática y Licenciatura en Matemática que se dictan en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Estuvo organizada de la siguiente manera:

1. Clase teórica usando un software: introducción al concepto de límite mediante la definición formal en términos de ε - δ.
2. Clase práctica en la sala de computación considerando aspectos gráficos y numéricos del concepto.
3. Clase de autoevaluación en la sala de computación con la inclusión de material extraído de Internet.

Todas las clases tuvieron una duración de dos horas.

Clase teórica usando un software

Esta clase teórica para introducir el concepto de límite se desarrolló en el horario habitual de clase de la asignatura Análisis I y a la misma asistieron treinta y uno alumnos de las carreras

Profesorado en Matemática, Profesorado en Computación, Profesorado en Física, Licenciatura en Física y Licenciatura en Matemática.

La profesora responsable del dictado de la asignatura, que es una de las autoras de este trabajo, fue quien llevó adelante la clase y otra de las autoras, colaboró realizando construcciones con la computadora que se proyectaban en el pizarrón usando el cañón e interactuando con la docente en las explicaciones.

En el desarrollo de la clase se utilizó el software Cabri presentando las gráficas de distintas funciones: lineales, cuadráticas y racionales. Las funciones se clasificaron en “continuas” y “no continuas” considerando la idea intuitiva de graficarlas de un solo trazo. Las construcciones dinámicas posibilitadas por el uso de este software permitió llegar al concepto de límite, mostrando la relación que existe entre ε y δ, en un primer momento trabajando sobre las gráficas de funciones continuas (lineales y cuadráticas) y posteriormente con funciones racionales con discontinuidad evitable.

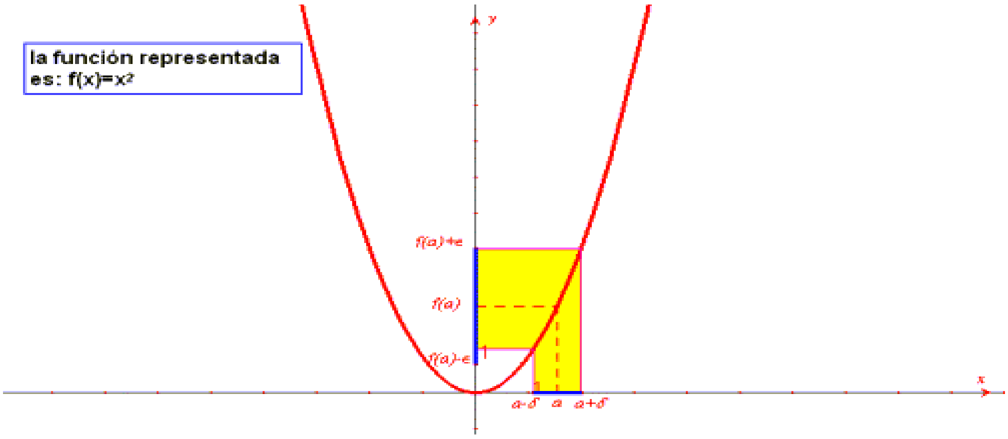
Considerando la abundante cantidad de trabajos de investigación sobre las dificultades que tienen los estudiantes en la construcción del concepto de límite (Hitt, 2003; Artigue, 1998 y Sierpinska, 1985), en particular, el conflicto para otorgarle un significado a la definición de límite de funciones en un punto en términos de ε y δ se trató de introducir los procesos algebraicos acompañados de un acercamiento que promueva tareas de conversión entre las representaciones gráfica y algebraica, con el propósito de que una manipulación coherente entre ambas representaciones permita una sólida construcción del concepto en cuestión.

Durante el desarrollo de esta clase sobre la gráfica de funciones continuas se realizaron las siguientes construcciones: considerando un $\varepsilon > 0$ se trazaron las rectas $y = f(a) + \varepsilon$, $y = f(a) - \varepsilon$, por la intersección de esas rectas con la gráfica se trazaron rectas perpendiculares al eje de las abscisas determinando $\delta > 0$ de manera que todos los elementos del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ tengan sus imágenes en el intervalo $(f(a) - \varepsilon; f(a) + \varepsilon)$. Luego para variaciones de ε y a se comprobó que en algunos casos el δ obtenido dependía exclusivamente de la elección de ε y en otros dependía además de *a*.

Al buscar las relaciones entre ε y δ, en el caso particular de la función $f(x) = x^2$, repitiendo la construcción señalada en el párrafo anterior se determinó un intervalo no simétrico respecto al punto *a*. De la observación de la gráfica los estudiantes concluyeron que el δ que cumplía con la condición establecida debía ser el mínimo valor entre las distancias de $x = a$ a cada uno de los extremos del intervalo.

Las mismas construcciones se realizaron con funciones con discontinuidad evitable y fue allí donde se comenzó a mencionar el límite.

A modo de ejemplo y perdiendo la posibilidad de mostrar “en vivo” tal relación presentamos una de las figuras mostradas durante la exposición.



Una de las potencialidades didácticas de estas herramientas es la posibilidad de visualizar gráficamente, en movimiento, determinados conceptos teóricos o resultados que ilustran de forma lógica el concepto y permiten al profesor interactuar con sus alumnos para obtener la relación de manera simbólica lo que lleva a una mejor y más rápida asimilación de los conceptos.
En este sentido (Zimmermann, 1990) nos brinda elementos que confirman esta postura: “Conceptualmente, el papel visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y... en el proceso el espíritu del cálculo se ha perdido”.
Del análisis de las respuestas a un cuestionario (Anexo 1) propuesto a cada uno de los alumnos cuando finalizó la clase, observamos que asocian el concepto de límite exclusivamente con funciones de discontinuidad evitable.
Transcribimos a continuación algunas respuestas que evidencian esta conclusión:

- ✓ *“El límite es un valor que aparece cuando la función no está definida en cierto punto”.*
- ✓ *“El límite es el valor de f(a) para cuando f no está definida”.*
- ✓ *“Límite sería una imagen para “a” ya que no está definida para ese valor”.*
- ✓ *“Límite es el punto de la imagen donde x no está definido”.*
- ✓ *“Entre los dos tipos de funciones continuas y discontinuas, el límite se encuentra en las segundas, aclarando que este es el corte de la función donde x no tiene valor”.*

Al tratar de evitar una de las dificultades asociadas con el aprendizaje del concepto de límite que, por nuestra propia experiencia, tiene que ver con el uso incoherente de los procesos infinitos y reducirlo a una simple sustitución, no pudiendo luego superar ese obstáculo; se mencionó al “límite” recién cuando se trabajó con funciones con discontinuidad evitable lo que trajo aparejado esta idea errónea.

Clase práctica en la sala de computación

A esta clase concurrieron nueve alumnos que disponían de una computadora cada uno equipada con el software Derive 5. Coordinando la clase se encontraba la profesora responsable de la asignatura y otra de las autoras de este trabajo participó como observadora.
Los alumnos tenían conocimiento del software ya que en la primer clase práctica de la asignatura fueron introducidos los comandos básicos del programa: escribir expresiones algebraicas, realizar gráficas en el plano cartesiano, cambiar escalas en los ejes coordenados, marcar puntos en el plano, resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones, construir tablas, etc. Este software fue seleccionado por ser de fácil manejo, no requerir de conocimientos previos de computación o programación y posibilitar el tratamiento de los contenidos matemáticos propuestos.
Las actividades propuestas fueron diseñadas teniendo como finalidad los procesos involucrados en su resolución tales como observación, reflexión, corrección y prueba de resultados, además de promover la visualización matemática, utilizando diferentes representaciones y haciendo uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Con ello, la construcción del concepto se dará a través de la coordinación, libre de contradicciones, de las diferentes representaciones relacionadas con el mismo.
En este sentido acordamos con Hitt (2003): “La visualización matemática tiene que ver con

procesos de transformaciones mentales y producciones en papel, en pizarrón o en computadora, generadas de una lectura de enunciados matemáticos o de gráficas, promoviendo una interacción entre representaciones para una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en juego".

A cada alumno se le entregó una guía de actividades (anexo 2) para ser resultas utilizando el software, con espacios previstos para volcar en ellos las soluciones y su justificación. Al termino de la clase debían entregar los trabajos realizados.

Los primeros ejercicios brindaban la posibilidad de predecir el límite mediante la realización de una tabla o la lectura de una gráfica y una vez hecha esta predicción el software permite cotejar el resultado realizando el calculo algebraico.

En la resolución del ejercicio 3 los estudiantes examinaron, mediante un gráfico y construcción de una tabla, el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 0} (x + 0.01)^5$. De los nueve alumnos participantes dos de ellos afirmaron que el valor del límite era cero. Uno de los estudiantes justifica su respuesta del siguiente modo: *" se ve que a medida que x toma valores cercanos a cero sus imágenes también tienen valores cercanos al cero. Por lo tanto, su límite es cero"* .

Del análisis de la respuesta surge que esta afirmación se elaboró a partir de la observación del gráfico, sin tener en cuenta los resultados que mostraba la tabla.

Cuando se planeó la inclusión de esta actividad se pensó en posibles respuestas erróneas y por tal motivo, se solicitó también la realización de una tabla. Esto permitió que la mayoría de los estudiantes ante la obtención de dos posibles resultados, se inclinaran por el calculo algebraico de ese límite.

A pesar del error a que condujo la visualización de la gráfica coincidimos con lo expresado por Guzmán (1996):"Pero la posibilidad de que la visualización pueda conducir a error no invalida su eficacia y su potencia en los diferentes procesos del quehacer matemático, tanto en el trabajo creativo como en los procesos de comunicación y transmisión".

Clase de autoevaluación

En esta última parte de la experiencia, los mismos alumnos que participaron del encuentro anterior concurrieron a la sala de computación y haciendo uso de Internet se conectaron con la página propuesta por el equipo de investigación: *http://descartes.cnice.mecd.es/Bach_CNST_1/Limite_en_un_punto_continuidad/limites_y_continuidad.htm*, en ella se presentan ejercicios sobre el comportamiento de una función en las proximidades de un punto.

Debido que no en todas las computadoras se podían ver los gráficos que mostraba la página fue necesario que cuatro alumnos trabajaran de a pares.

Se solicitó a los alumnos que realizaran las actividades propuestas en la página web elegida y volcaran sus resultados en papel que al final de la clase debían entregar.

Al inicio de la experiencia algunos alumnos tuvieron dificultades para interpretar las notaciones utilizadas pero no mostraron inconvenientes para manipular figuras y así obtener las variaciones que proponían los ejercicios.

La posibilidad que ofrece la página al presentar las soluciones al final de cada ejercicio permitió que los alumnos verificaran sus resultados cuando estos eran correctos o buscaran los errores que habían cometido y que no les permitieron llegar a esos resultados.

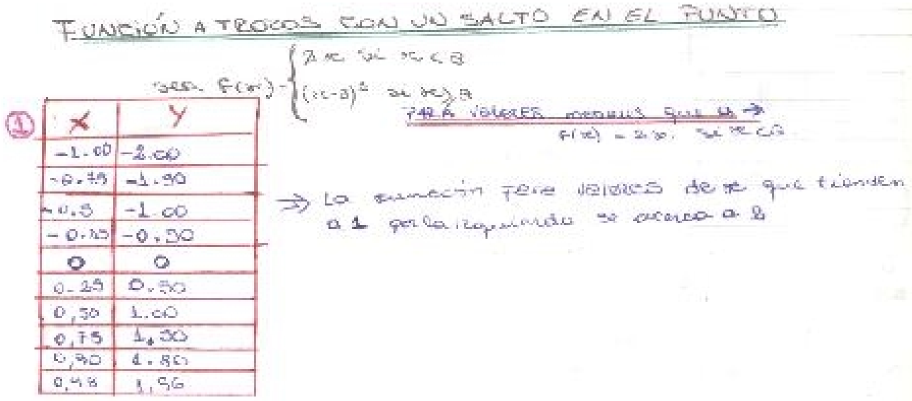
La participación de los docentes en este encuentro se limitó simplemente a observar el trabajo que realizaban los estudiantes ya que los mismos pudieron completar las tareas solicitadas sin ayuda.

A modo de ejemplo presentamos a continuación los enunciados de dos de los ejercicios propuestos en la página web y algunas de las soluciones que entregaron dos alumnas participantes.

Para la siguiente propuesta:

Vamos a estudiar el comportamiento de la función $f(x)=\begin{cases} 2x & \text{si } x<a \\ (x-3)^2 & \text{si } x\geq a \end{cases}$ en las proximidades de $x=a$.

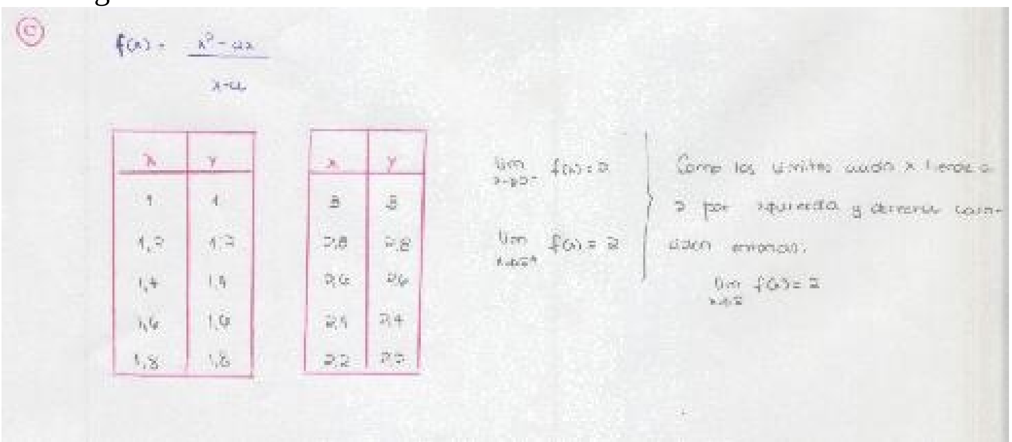
Cecilia presentó la solución:



Y para otra situación propuesta:

Vamos a estudiar el comportamiento de la función $f(x)=\dfrac{x^2-ax}{x-a}$ en las proximidades de $x=a$.

Florencia entregó esta solución:



CONCLUSIONES

A partir de lo relatado en las secciones anterior podemos proporcionar algunos elementos que caracterizan las actividades desarrolladas en el ambiente computacional por los estudiantes.

La confusión de los alumnos que se puso de manifiesto en sus respuestas al cuestionario entregado al finalizar la clase teórica, evidenció que la manera como fueron presentados los conceptos no fue la más adecuada, a pesar de que se intentó evitar otros posibles errores conceptuales.
La noción de límite usando habilidades ligadas a la visualización matemática posibilitó establecer relaciones entre ε y δ cuando se analizaron los gráficos de distintos tipos de funciones.
Si nos referimos a la dinámica de las clases en la sala de computación, es destacable el hecho de que todos los alumnos trabajaron en el tema, aunque tuvieran dudas. Percibimos ritmos diferentes en cada estudiante y pudimos observar diálogo matemático entre ellos, aunque cada uno disponía de una computadora para realizar las actividades propuestas.
La preparación de las guías de actividades demandó gran dedicación previa por parte de los docentes, de modo tal que los alumnos pudieran seguirla de manera independiente y con libertad para implementar sus propias estrategias. Así, la clase estuvo centrada en el trabajo de los alumnos y los docentes recorrieron el aula y aclararon las dudas cuando los alumno así lo requerían, sin anticiparse.
En la clase desarrollada haciendo uso de Internet se evidenciaron actividades muy pautadas, contrariamente a lo planteado en la segunda clase en la que se habían preparado actividades más abiertas a fin de incentivar la exploración matemática y la generación de conjeturas, aspectos que son favorecidos al trabajar en un ambiente computacional.
Los alumnos se manifestaron conformes con las actividades propuestas en la página web y mostraron interés en la búsqueda de otras páginas similares pero referidas a otros temas. Al ser consultados sobre la posibilidad de realizar un autoaprendizaje utilizando las TIC’s manifestaron que no hubieran podido realizar los ejercicios indicados sin contar con esos conceptos previos.
La conjunción de abordajes visuales y algebraicos y el empleo de diversas representaciones: gráficas, tabulares, algebraicas, aparecen como necesarias y complementarias para resolver las cuestiones planteadas en el entorno de esta ecología cognitiva particular.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno,L. Gómez, P., 1998, *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (Universidad de Los Andes. Bogotá).
Guzmán, M., 1996, *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. (Ediciones Pirámide. Madrid).
Hitt F. & Lara H., 1999 . Limits, Continuity and Discontinuity of Functions from Two Points of View: That of the Teacher and that of the Student. *British Society for Research into Learning Mathematics*. pp. 49-54. (Lancaster, U.K.)
Hitt, F. y Páez, R., 2003. Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. *Revista Uno*, 32, pp. 97-108.
Smith, R. & Minton, R. ,2000, *Cálculo. Tomo 1* (McGraw-Hill. Bogotá).
Sierpinska, A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limiteRecherches en didactique des mathématiques, 6 No. 1, pp. 5-67.
Zimmermann W.,1990, Visual Thinking in Calculus. *In Visualization in Teaching and Mathematics* (Zimmermann W. & Cunningham S. Editors), MAA, No.19.
ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S., 1991, Editor`s introduction: what is mathematical visualitation? *Visualization in teaching and learning mathematics*, 1-8.

ANEXO 1

NOMBRE Y APELLIDO:...
CARRERA QUE CURSA:...[10]

Basándose en las ideas más importantes que se desarrollaron en esta clase, exprese con sus propias palabras su opinión acerca de las siguientes cuestiones:

Un profesor dice: "Pueden pensar en el límite de $f(x)$ cuando x se acerca hacia a, como si fuera $f(a)$".

a) Critique esta afirmación.

..
..

b) ¿Qué significa?

....
....

c) ¿Le proporciona una idea importante?

....
....

d) ¿Hay algo confuso en ella?

....
....

e) Reemplace lo que aparece en cursiva por su mejor descripción de lo que es límite.

....
....

Otro profesor dice: "El límite es una *predicción* de lo que será $f(a)$".

a) Compare esta afirmación con lo expresado por el primer profesor.

....
....

b) ¿La palabra **predicción** hace más útil e importante la idea de límite?

....
....

¿Qué preguntas o dudas vinculadas con el concepto desarrollado en clase puede plantear?

..
..
..

[10] Esta actividad se desarrolla en el marco del proyecto de investigación "Pensamiento matemático y tecnologías de la información y la comunicación" de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.

ANEXO 2

Límite usando el software Derive[11].

NOMBRE Y APELLIDO:..

En los ejercicios, desde **1.** hasta **4.**, sobre las líneas punteadas escribir la respuesta y su justificación.

1. Dadas las siguientes funciones, estimar el valor del límite graficando la función y realizando una tabla que presente los valores de x y $f(x)$ para valores de x próximos a x_0.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x_0 = 2$ ....

b) $f(x) = \dfrac{3x+9}{x^2-9}, \quad x_0 = -3$ ....

2. *Use evidencia gráfica y numérica para conjeturar la existencia o no del límite. Si no existe, justifique por qué y si existe calcule su valor.*

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|x+1|}{x^2-1}$ ....

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+x}{sen\ x}$ ....

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tan\ x}{sen\ x}$ ....

3. Examine el siguiente límite mediante un gráfico y la construcción de una tabla para valores muy próximos a cero:

a) $\lim\limits_{x \to 0} (x + 0.01)^5$.¿Cuál estima Ud. que sería el resultado?

....

b) Verifíquelo usando el comando correspondiente. Si obtuvo alguna diferencia justifique cuál es el valor correcto.

....
....

4. Dibuje la gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x \le -1 \\ 3x + 1 & si \quad x > -1 \end{cases}$ e identifique cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) =$ ....

b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) =$ ....

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$ ....

d) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) =$ ....

Presentar una función continua definida por trozos (obviamente descartando la definida de la misma manera en todos los trozos) y graficarla.

---

[11] Esta actividad se desarrolla en el marco del proyecto de investigación "Pensamiento matemático y tecnologías de la información y la comunicación" de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.