C152-10

UTILIZACIÓN DE INTERNET Y GUÍAS DIGITALIZADAS, EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA ORIENTADA A CIENCIAS ECONÓMICAS

Edgardo Alberto DI DIO

Universidad Nacional de Lomas de Zamora - Argentina
Facultad de Ciencias Económicas
Teléfono: 01142921374
edgardodidio@yahoo.com

Nivel Educativo: Educación Superior.

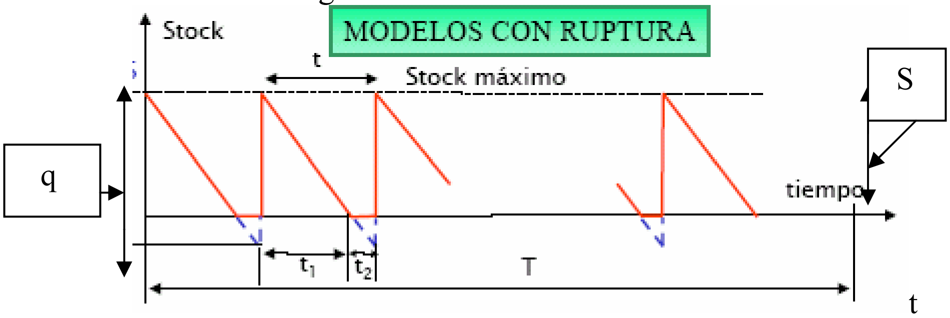
RESUMEN

Experiencia efectuada y desarrollada desde el año 2000 en la Universidad Nacional de Lomas de Zamora, en la Facultad de Ciencias Económicas, en las cátedras Investigación Operativa y Matemática II.
Creación de guías digitalizadas y uso de soportes tecnológicos para el desarrollo del aprendizaje de matemáticas orientada a ciencias económicas utilizando Internet.
www.matematika.ar.nu

METODOLOGÍA

Intentamos que:
Las matemáticas sean presentadas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que le permiten al profesional en gestión y en economía resolver situaciones problemáticas de sus áreas de estudio e incumbencia.
Que el alumno relacione los contenidos de aprendizaje de las matemáticas con su experiencia, así como presentarlas y enseñarlas en un contexto de resolución de problemas y de análisis de variación de magnitudes escalares económicas a partir de situaciones problemáticas de gestión administrativa o económica. .
Se procura que el aprendizaje sea *significativo* y que este se base en los *conocimientos previos* del alumno, además de tener en cuenta que los conocimientos adquiridos no deben darse por consolidados en muchos casos.
La *metodología* intentamos que sea *activa*, que estimule la participación del alumno para que construya su propio aprendizaje, guiado por los docentes.
Estos serán quienes indiquen las actividades que debe realizar el alumno para conseguir el objetivo, teniendo en cuenta sus posibilidades *individualidades y las del grupo áulico en el cual se encuentra inserto.*.
Es muy importante que consigamos que el alumno *aprenda a aprender* encontrando sus propias estrategias. Mediante ejemplos y situaciones iniciales planteadas, intentamos que el alumno comprenda la necesidad de contar con nuevas conceptualizaciones matemáticas para resolver las situaciones problemáticas de su área profesional.

Se pone especial interés en que el alumno vea la aplicación de lo aprendido en la vida real o campus de estudio profesional.
Y a que busque la profundización de sus conceptos y estrategias utilizando siempre que sea posible las ventajas que nos traen las nuevas tecnologías y que ayudan a un aprendizaje más significativo.
Las actividades que se plantean intentaremos que giren en torno a contextos que le sean próximos y conocidos, en lo posible de su orbita laboral, esto favorece la motivación y el interés por el aprendizaje de la matemática .Y pueden profundizarlos y retroalimentarlos a través del foro www.matematika.ar.nu en guías de aplicación de modelos matemáticos a problemas de gestión.
En cuanto a la *resolución de problemas* intentamos que visualice que no existe una única manera de resolver los problemas.
Tratamos de fomentar la puesta en común de procedimientos, el análisis previo y los recursos empleados para llegar a una posible solución y ha su posterior verificación.
Nota: Lo que continúa es una guía del foro reducida a efectos de esta presentación
Situación de gestión a plantear en el aula :
En modelos de Inventario con ruptura el costo total queda determinado por la expresión :$C= D. C_A/ q + S^2 Cp . q /2 + (q - S)^2 /2 . q . C_3$
Para mas detalles ver en el foro guías de Modelos de inventario



El problema consiste en encontrar el costo mínimo de

$$C= D. C_A/ q + s^2 Cp . q /2 + (q - s)^2 /2 . q . C_3$$

Analicemos que es una función de dos variables C(s,q)

<u>Veamos que herramientas matemáticas contamos :</u>
<u>Diferencial de Funciones Escalares de dos variables:</u>

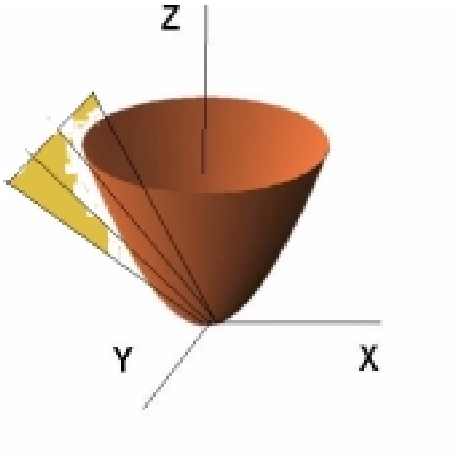
•*Recordemos lo definido anteriormente para funciones escalares de una variable y= f(x) : Si existe F´(a) en un entorno de radio centro a y radio h si aproximamos a la función por el polinomio de Taylor :La función puede expresarse como F(a+h) = F(a)+f'(a)h+hE(a,h), haremos una extensión de este concepto para poder aproximar funciones escalares diferenciables mediante funciones lineales.*

•Decimos que F (x;y) es diferenciable en el punto *a* de coordenadas (a;b) si existe una transformación lineal T *A*:IR^2 en IR y una función escalar E *(a,v)* .**La transformación lineal se llama diferencial de F(x,y) en el punto A de coordenadas (a,b).** Y hemos demostrado que la transformación lineal que determina el diferencial está determinada por la sumatoria de las respectivas derivadas parciales primeras multiplicadas por un escalar.
T *A*= dF(x,y)=f´x dx + f´y dy en el punto (a;b)

•La condición necesaria y suficiente para la existencia de diferencial de una función escalar en un punto (a;b) de su dominio es que existan y sean continuas en el mencionado punto sus derivadas parciales.

•Determinar el diferencial de F(x;y) = X^2+Y^2 en el punto (2,-1) considerando las variaciones de las variables en □X y □Y = 0.001
por lo que dZ =2. 2 .0.001+ (-1).2.0.001=0.002

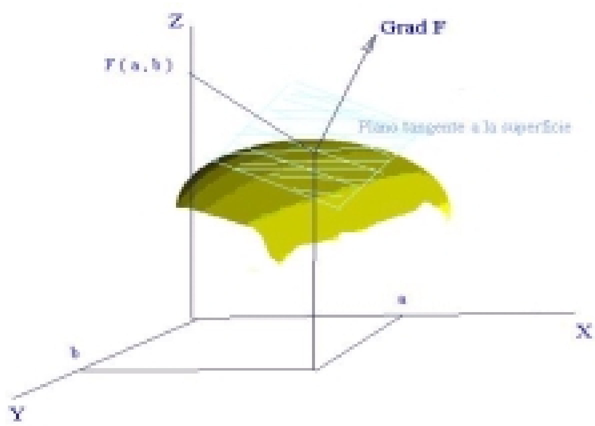
•Observemos que si calculo la variación de Z al pasar de (2;-1) a (2.001, -0.999)
debe leerse incremento
□Z en (2,-1) = 5 , □Z en (2.001, -0.999) = 5.002002 por lo que incremento de la función es 0.002002 ;la diferencia entre dZ y □Z en muy pequeña. En realidad el diferencial nos permite aproximar linealmente cualquier función haciendo muy pequeña la diferencia entre el incremento de la función y el diferencial. Esta propiedad se utiliza para aproximar funciones y durante mucho tiempo cuando no existían calculadoras, ni computadores fue la técnica mas usual para calcular por ejemplo las raíces de índices superiores a 2 u otras operaciones.



Veamos ahora que de la expresión
F (x,y) – F (a;b) = F´x (x-a) + F’y (y-b) obtenemos la ecuación del plano tangente a la curva en el punto F (a; b), en nuestro ejemplo: Z-5=4(X-2)-2(Y+1) que expresa Z= 4x-2y-5 ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (2;-1;5)

GRADIENTE

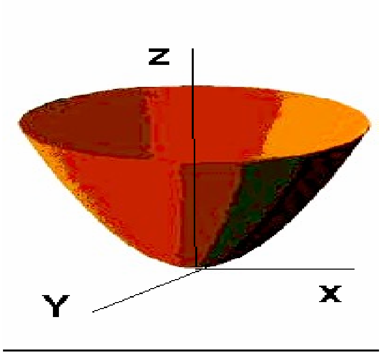
Dada una función diferenciable *F* **(x;y)** para cada dirección existe una derivada direccional D_r dada por una función lineal homogénea en los cosenos directores en la dirección de los ejes coordenados. Llamamos **gradiente** de una función escalar
F **(x;y)** cuyo D*f (dominio)* esta incluido en *IR*2 y **(a;b)** un punto interior a D*f* y lo simbolizaremos ***GradF*** *es un campo vectorial definido para cada punto* **(a;b)** en el que existen las derivadas parciales F’x y F’y.
El *Grad*F mide la pendiente máxima ,es decir la mayor variación posible direccional para la función F (x;y) en el punto (a;b)
Por ejemplo: en nuestro espacio ortogonal, F’x es la componente del versor ***i*** en la dirección del eje X y F’y es la componente del versor ***j*** en la dirección del eje y
•*El vector gradiente es normal al plano tangente a una superficie de nivel F(x,y,z) = c o a la tangente de las curvas de nivel F(x,y) = c según este representando mi función en IR3 o IR2*



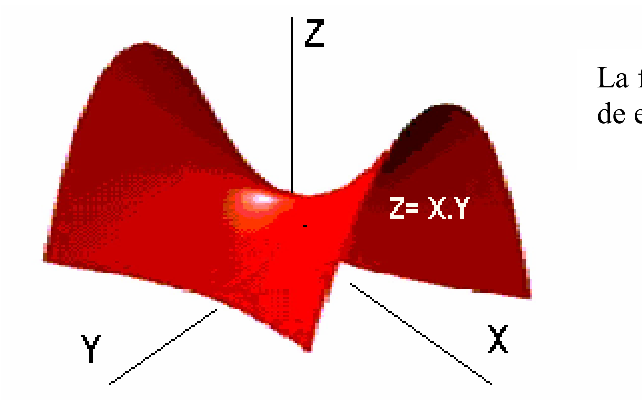
Extremos absolu

Sea *F* (x;y) una función escalar cuyo D*f* *(dominio)* esta incluido en IR^2 y (a;b) un punto interior a D*f* .Diremos que tiene un *mínimo absoluto* en (a;b) si y sólo si *F* (a;b) < *F* (x;y) para todo (x;y) perteneciente al D*f* .
Diremos además que posee un *mínimo relativo* en si existe una entorno (E) del punto (a;b) tal que *F* (a;b) < *F* (x;y) para todo (x;y) perteneciente a dicho entorno ,

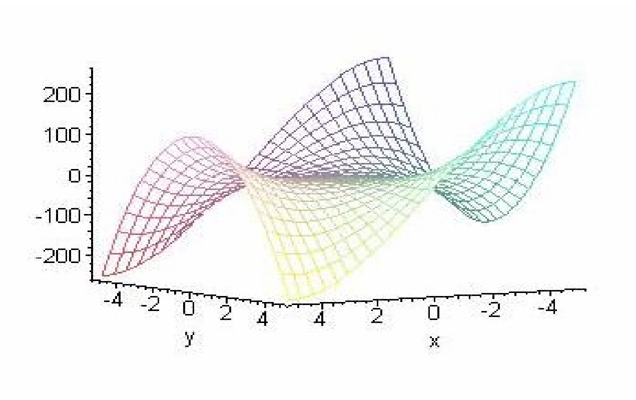
EjemploLa función **$Z= x^2+y^2$** tiene un **mínimo absoluto** en (0;0)



Observación
*En las vecindades de los puntos donde existe máx o mín la función cambia el crecimiento , es decir la manera de variación de los valores de sus imágenes. Por ejemplo antes del mínimo a izquierda las imágenes cada vez son menores y a derecha cada vez son mayores, en el mínimo el cambio es nulo, las derivadas parciales y direccionales son nulas.*Estos donde SON NULAS LAS PRIMERAS DERIVADAS PARCIALES, se denominan PUNTOS ESTACIONARIOS O CRÌTICOS .
•**Los puntos estacionarios se pueden clasificar en** máximos, mínimos y puntos de ensilladuras.
•Diremos una superficie en IR^3 se dice que posee un punto de *ensilladura*, *inflexión* o *de silla en un punto interior de su Dominio* (a;b) si grad *F* = 0 y además todo entorno de (a;b) contiene puntos **(x_1;y_1) y (x_2;y_2)** tales que y *F* **(a;b)** < *F* **(x_1;y_1)** y además *F* **(a;b)** > *F* **(x_2;y_2)**



La función Z= XY presenta punto de ensilladura en el origen



La función $Z=X^3-XY^2$ presenta punto de ensilladura en el origen

Ver, si no lo hizo en su oportunidad, en las guías del foro la representación gráfica de funciones y utilizar excel para analizar diversas funciones según lo propuesto

Recordemos lo analizado para funciones de una sola variable: (en todo caso ver guías de Matemática I)

CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA

Sea Y = f(X); la función dependiente de una variable X. $F`x = dY/dX$

- f(X) es un máximo relativo en X si: f'(X) cambia de signo de (+) a (-) al pasar de un punto inmediatamente a la izquierda de X a uno inmediatamente a la derecha de X.
- f(X) es un mínimo relativo en X si : f'(X) cambia de signo de (-) a (+) al pasar de un punto inmediatamente a la izquierda de X a uno inmediatamente a la derecha de X.
- No es ni máximo ni mínimo si f'(X) tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de X.

En general, para hallar el máximo o mínimo de una función dada, el procedimiento será primero calcular los valores críticos usando f'(X) = 0 y luego aplicando el criterio de la derivada primera concluir si el valor crítico es un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de ellos.

CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA

$$f''(X) = \frac{d}{dX}\left(\frac{dY}{dX}\right) = \frac{d^2Y}{dX^2}$$

- f(X) es un *máximo relativo* en X si $f''(X)= \frac{d^2Y}{dX^2} < 0$
- f(X) es un *mínimo relativo* en X si $f''(X)= \frac{d^2Y}{dX^2} > 0$

En general, es mas conveniente usar este criterio que el de la derivada primera, porque no requiere comprobar el signo de la derivada en uno de los lados del punto X(vecindad de X). En muchos problemas económicos el criterio de la derivada segunda(o segunda derivada) resultará mas adecuado para determinar un máximo o un mínimo relativo.

Para funciones dependientes de mas de una variable, los criterios a) y b), reciben el nombre de condición de primer orden y condición de 2do. orden respectivamente. Y en estos casos se aplicarán derivadas parciales.

Las condiciones de óptimo para funciones que dependen de una variable, en términos de diferenciales son:

Para Z = f(X), con diferencial: $dZ = f'(X)\, dX = 0$

$d^2Z = d(dZ)$

a) Condición de Primer orden: $dZ = 0$ y **Condición de Segundo orden:**

Si $d^2Z \leq 0$. Se obtiene un máximo

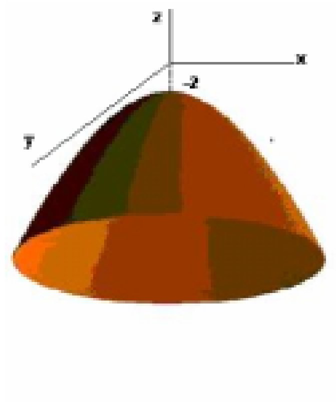
Si $d^2Z \geq 0$. Se obtiene un mínimo

Condiciones de existencia de extremos para Funciones Escalares de dos variables
Condición necesaria
La extensión a más variables utiliza un razonamiento similar, en primer lugar diremos que si en un máximo o en un mínimo, como cambia el crecimiento de la función la velocidad de cambio o variación en las direcciones de todas las variables deben ser nulos, en otras palabras Grad$F$ = 0.
Lo reiteraremos en otras palabras :en un punto crítico o punto estacionario, donde cambia el crecimiento o concavidad de la función , la velocidad de cambio debe ser nula en todas las direcciones por lo que grad F = 0 o bien las derivadas parciales deben ser nulas en los puntos estacionarios o críticos.

Teorema 1. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en todo su dominio. Luego, si f tiene un extremo en el punto $(x_0, y_0) \in D$, entonces $\nabla f(x_0, y_0) = 0$*

Se puede demostrar fácilmente manteniendo constante una variable (de manera similar a los límites iterados) y reduciendo a un caso de una sola variable, donde la derivada primera debe ser nula en un punto estacionario o crítico.

En el gráfico para F(x,y)=-2-x^2-y^2 del campo, el cual muestra claramente un máximo absoluto en el punto (0;0;2) , allí las derivadas parciales son nulas F´x = -2x en el punto F'x=0 y F´y = -2y y en el punto F'y= 0 por lo que Grad F = 0



Si hacemos la sustitución Y=cte y por ser entonces una función unidemensional del tipo Z=F(x) por lo visto en el anteriormente Z´x= 0 idem si hacemos X= cte; Z= F(Y) por lo que Z´y=0. Por lo tanto para que exista un punto estacionario o critico Grad F = 0

Condición Suficiente

$d^2Z \leq 0$. Determina un máximo de Z

$d^2Z \geq 0$. Determina un mínimo de Z

$$\mathbf{d^2Z = f''_{XX}\, dX^2 + 2\, f''_{XY}\, dX\, dY + f''_{YY}\, dY^2}$$

Esta expresión resulta ser una forma cuadrática, en la cual se evaluará el signo.
La condición de 2do. Orden es considerar el signo (positivo o negativo) de d^2Z o forma cuadrática. Donde dX □ 0, dY □ 0 y dX^2, dY^2 siempre serán positivos. El enunciado se presenta analizando el signo de los términos restantes: f´´xx, f´´yy, f´´xy
Por lo que podemos escribir :

Condición	**Máximo**	**Mínimo**
Condición necesaria De 1er. Orden.	F`x = f´y = 0	f´x = f´y = 0
Condición suficiente De 2do. Orden.	F´´xx, f´´yy < 0 y f´´xx.f´´yy > f^2xy	f´´xx, f´´yy > 0 y f´´xxf´´yy > f^2xy

Si llamamos Hessiano en el punto X_0,Y_0 al determinante

$$|H(x_0, y_0)| = \begin{vmatrix} f''xx & f''xy \\ f''xy & f''yy \end{vmatrix}$$

Teorema 2. *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo que admite derivadas parciales hasta de segundo orden, y sea $(x_0, y_0) \in \text{int}(D)$ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. Entonces:*

a) Si $|H(x_0, y_0)| > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0).

b) Si $|H(x_0, y_0)| > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0).

c) Si $|H(x_0, y_0)| < 0$, entonces f tiene un punto de silla.

d) Si $|H(x_0, y_0)| = 0$, entonces no hay mayor información.

$$CT = D.\ C_A / q + S^2\ Cp\ .\ q / 2 + (q - S)^2 / 2\ .\ q\ .\ C_3$$

BIBLIOGRAFÍA

Calculus volumen 2 Apostol editorial Reverté.
Análisis Matemático II Rey Pastor, P PI Calleja ,C A Trejo editorial Kapelusz.
Cálculo Superior Spiegel,M editorial McGraw-Hill.
Técnicas cuantitativas para la toma de decisiones Dresner Editorial El Coloquio.
Elementos de costos cátedra del Dr Marzullo UNLZ.