C252-4

INTEGRANDO LA MATEMÁTICA Y LA FÍSICA: EL RELOJ DE AGUA

Beatriz FOLLARI, Ana María DE LA FUENTE, Elena GUTIÉRREZ, María Teresa PERROTTA, Gilda DIMA, Ivana L. BOTTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - U. N. de La Pampa - Argentina
Uruguay 151 - 6300 Santa Rosa (La Pampa) - 02954- 425166
bfollari@exactas.unlpam.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior Universitaria.

Palabras Clave: fluidos, ecuación diferencial, ajuste de curvas, problema experimental, enseñanza.

RESUMEN

Este trabajo propone una experiencia de aula que se ha llevado a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la U.N.L.Pam. Consiste en la resolución de un problema experimental de Física en cursos básicos de Profesorado y Licenciatura en Física, con alumnos que disponen en su estructura cognitiva conceptos y principios pertinentes con las demandas del problema a resolver. La actividad didáctica consiste en el planteo de una situación problemática sobre algunos aspectos relacionados con la Ecuación de Continuidad y el Principio de Bernoulli para fluidos ideales. La situación planteada, es considerada como motivadora del interés de los estudiantes y facilitadora del desarrollo de aquellas destrezas intelectuales necesarias para un aprendizaje significativo. Por otro lado permite presentar a los alumnos la matemática, en este caso ecuaciones cuadráticas, lineales y cálculo diferencial e integral, como una herramienta ligada a las ciencias fácticas.

INTRODUCCIÓN

La sociedad cada vez se encuentra mas influenciada por las ciencias y su interdisciplinariedad. De esta forma la matemática permite a través de sus aplicaciones y modelos desarrollar en los alumnos una competencia crítica, que los prepara para reconocer, comprender, analizar y validar el uso de la matemática en un contexto real (Gómez, 2002).
Ausubel (1996) sostiene que el verdadero aprendizaje se produce cuando se pueden establecer relaciones sustantivas entre lo que se aprende y lo que se conoce. En este aprendizaje es importante la motivación para facilitar la apropiación de conocimientos como respuesta a una pregunta previamente formulada (Pozo et al, 1995). Por ello el docente debe usar estrategias metodológicas acordes para ayudar al alumno a:

- Establecer relaciones y diferencias entre elementos y situaciones.
- Elaborar nuevas combinaciones entre ideas y elementos que le permitan formular interrogantes y mantener o modificar puntos de vista.
- Organizar y regular el desarrollo de un proceso de resolución de problemas.
- Evaluar los resultados obtenidos.

- Integrar las ciencias experimentales con la matemática.

Con el título genérico de resolución de problemas o situaciones problemáticas se reúnen diferentes situaciones de aprendizaje (Oñorbe, 1995; Fernandez Gonzalez et al., 1997, Gangoso, 1999) que se consideran de gran potencial didáctico para el mismo. Muchos docentes piensan que la ciencia por ella misma es una actividad que conlleva a resolver problemas (Garret, 1995).

Dichas situaciones aparecen como un puente cognitivo que permiten que el alumno transforme el contenido presentado (significado lógico) en significado psicológico en el transcurso de su aprendizaje (Novak, 1990, Novak y Gowin, 1988).

Con el objetivo de motivar y mejorar el aprendizaje se puede utilizar como metodología de enseñanza la resolución de una situación problemática que exige de los alumnos muchas destrezas intelectuales: análisis, síntesis, memoria, búsqueda y clasificación de información, etc. (Garret ob cit.; Gil Pérez, 1988). Comprendidos los conceptos físicos, el lenguaje matemático permite formalizar la situación sin ambigüedad, facilitando su verificación o refutación; ayudando al alumno a comprender que la matemática es una herramienta ligada a otras ramas de la ciencia (Gómez, ob cit.). La enseñanza se convierte de ese modo en un proceso de búsqueda y construcción cooperativa, donde el conocimiento del alumno se construye a partir de una acción situada (Perkins, 1997).

Basándonos en lo expuesto, este trabajo propone una experiencia de aula que se ha llevado a cabo en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la U.N.L.Pam., con alumnos de Profesorado y Licenciatura en Física, dentro de la asignatura Física II en la que se trata mecánica de fluidos. La experiencia consiste en una actividad de aula, en donde se plantea una situación problemática para abordar las ecuaciónes de Continuidad y de Bernoulli. Los alumnos deben disponer de conceptos y principios en su estructura cognitiva pertinentes con las demandas del problema a resolver. (Ausubel, ob cit). Para este problema en particular entre estos conceptos previos se encuentran: funciones, derivadas e integrales en una dimensión. También es necesario que conozcan algún software que permita graficar y ajustar funciones.

DESARROLLO DE LA CLASE

La historia muestra que la motivación en el desarrollo de la matemática ha sido en general impulsada por la resolución de problemas reales en su mayoría físicos (Gómez, ob cit.). En este caso se plantea una situación experimental (que podría ser real), con fines didácticos, motivadora del interés de los estudiantes y facilitadora del desarrollo de destrezas intelectuales necesarias para un aprendizaje significativo.

Se sustenta la idea de que resolver este problema implica: aplicar conceptos y principios aprendidos en la Física, plantear hipótesis, diseñar una experiencia que aporte datos experimentales, desarrollar analíticamente la ecuación que permite el cálculo numérico y gráfico y la posterior evaluación del resultado.

Presentación del problema

Un recipiente cilíndrico contiene inicialmente agua hasta una altura H. Se le practica un orificio pequeño en la pared lateral, como indica la figura 1. Se desea usar como reloj de agua. Para calibrarlo como tal, es necesario señalar intervalos regulares de tiempo realizando marcas en el recipiente para el nivel de agua en los instantes elegidos.. Seleccionar estos intervalos de acuerdo al tiempo en el cual el reloj tarda en vaciarse.

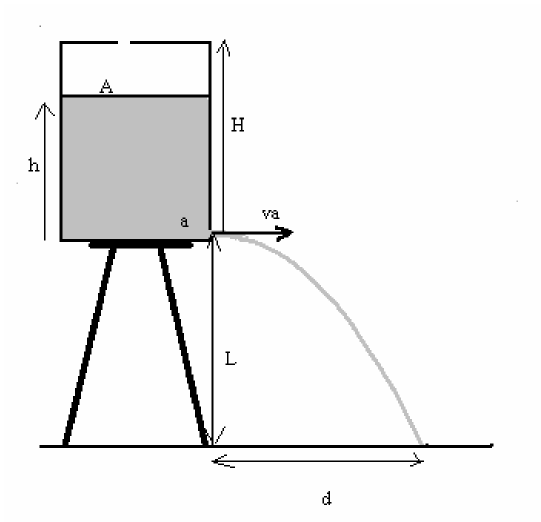


Figura 1: Dispositivo experimental

Una vez presentado el problema se propone a los estudiantes una etapa de predicción en la cual figura una serie de preguntas orientadas a relacionar la situación problemática planteada con los conceptos físicos estudiados (Serway,1997; Resnick et al., 2004). Como parte de esta etapa se propone la resolución analítica, encontrando la altura del nivel del agua en función del tiempo a medida que el recipiente se va vaciando, *h(t).* También se les propone encontrar la función que describe los cambios en la velocidad de salida del agua a través del orificio, $v_a(t)$.
Para realizar estos cálculos se debe plantear la hipótesis de que "e*l agua es considerada un fluido ideal*". Teniendo en cuenta esta hipótesis la resolución analítica del problema parte con el planteo de las ecuaciones de Continuidad y de Bernouilli. Este planteo conduce a una ecuación diferencial que debe ser resuelta aplicando los conceptos adquiridos en análisis matemático.
Considerando *A*, el área de la sección del recipiente, *a* el área del orificio de salida del agua, v_A la velocidad con la que disminuye la altura del nivel del agua (*h)* a medida que se vacía el recipiente y v_a la velocidad con que sale el agua por el orificio.
Aplicando la ecuación de continuidad obtenemos:

$$v_A\ A = v_a\ a \qquad (1)$$

$$v_A = -\frac{dh}{dt} \qquad (2)$$

$$v_a = -\frac{A}{a}\frac{dh}{dt} \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta que: ∂ es la densidad del agua, p_A y p_a son las presiones en ambas áreas, *g* es la aceleración de la gravedad, h_A y h_a son la altura del nivel del agua en cada instante y del orificio respecto de la base del recipiente.
Planteando la ecuación de Bernoulli, se tiene:

$$P_A + \frac{1}{2}\partial v_A^2 + \partial g h_A = P_a + \frac{1}{2}\partial v_a^2 + \partial g h_a \qquad (4)$$

Como el recipiente está abierto en ambos extremos, tenemos que P_A y P_a son ambas iguales a la presión atmosférica. Además, si consideramos la altura del orificio como origen para medir las alturas, h_a es cero y h_A es h.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + g\,h = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{a}\frac{dh}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = \frac{2\,g\,h}{\left(\frac{A^2}{a^2}-1\right)}$$

definiendo a $K^2 = \frac{A^2}{a^2}-1$, la ecuación queda:

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{K} \qquad (5)$$

Para dar respuesta a nuestro problema tomamos la raíz negativa de la ecuación anterior.
Para obtener la función h(t), vamos a integrar entre H (altura para el tiempo t = 0) y h (altura para el tiempo t):

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{2\,g}}{K}\ \sqrt{h}$$

Para integrar convenimos en usar la variable muda τ:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{\sqrt{2\,g}}{K}\ d\tau$$

$$2\,\sqrt{h}\Big|_H^h = -\frac{\sqrt{2\,g}}{K}\ \tau\Big|_0^t$$

$$\sqrt{h} = -\frac{1}{K}\sqrt{\frac{g}{2}}\ t + \sqrt{H}$$

Entonces la función que describe la altura de la columna de agua en función del tiempo es:

$$h\,(t) = \frac{g}{2\,K^2}\,t^2 - \frac{\sqrt{2\,g\,H}}{K}\,t + H \qquad (6)$$

Se observa que la función que describe la altura del nivel de agua en función del tiempo durante el cual se vacía el recipiente es cuadrática. Los coeficientes de esta función dependen de la relación entre las áreas de la sección del recipiente y la sección del orificio.

Hemos definido $\frac{A^2}{a^2}-1=K^2$, como $\frac{A^2}{a^2}>>1$ se puede aproximar $K\approx\frac{A}{a}$.

Para calcular la velocidad de salida, según la ecuación (3) queda:

$$v_a = -\left(\frac{A}{a}\right)\frac{dh}{dt} = -K\,\frac{dh}{dt}$$

$$v_a = -K\left(\frac{g\,t}{K^2} - \frac{\sqrt{2\,g\,H}}{K}\right)$$

entonces:

$$\boxed{v_a(t) = \sqrt{2\,g\,H} - \frac{g}{K}t \qquad (7)}$$

La función anterior es lineal. Se observa que para un tiempo cero, la velocidad de salida es la que habitualmente se encuentra para la situación en la que la velocidad con que baja el nivel del agua puede despreciarse. Nuevamente, la pendiente depende del parámetro K.

El paso siguiente es la comprobación experimental de la predicción teórica. Para esto se mide h para distintos tiempos. Se realiza el gráfico de h(t) utilizando un ajuste polinómico. Si se elige una función cuadrática se ve que la aproximación es muy buena y que se pueden obtener los parámetros de la parábola. De esta manera puede estimarse un valor para K, ya que la medición directa del área *a* es muy difícil porque es muy pequeña.

Aplicando la función *h(t)* se puede determinar donde deben colocarse las marcas de 1 min., 2 min., etc., hasta el tiempo de vaciado, que en nuestro caso es de aproximadamente 25 minutos.

El agua sale del orificio con una velocidad horizontal, $v_{a.}$. Para calcularla se puede medir la distancia *d* a la que cae al piso luego de salir del orificio, que se encuentra a una altura L (ver Figura 1).

Aplicando las ecuaciones correspondientes del tiro oblicuo, el tiempo que tarda una partícula de líquido en llegar al piso es:

$$t_c = \sqrt{\frac{2.L}{g}} \;\Rightarrow\; v_a = \frac{d}{t_c} \qquad (8)$$

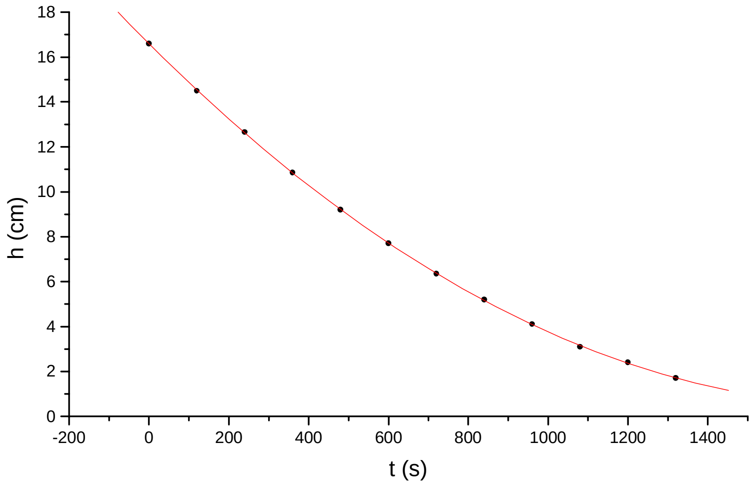
Para cada tiempo se mide d y, a partir de la ecuación (8), se calcula $v_{a.}$ Luego se grafica v_a en función del tiempo y se realiza un ajuste lineal por el método de cuadrados mínimos.

Un buen ajuste de esta recta y de la parábola indica que la hipótesis original de que el agua podía en este caso, considerarse como un fluido ideal es acertada.

Resultados Experimentales:

Se muestran a continuación en tablas y gráficos los registros de datos de la experiencia realizada por un grupo de alumnos y los ajustes de las funciones.

t (s)	**h (m)**
0	16,60
120	14,50
240	12,65
360	10,85
480	9,20
600	7,70
720	6,35
840	5,20
960	4,10
1080	3,10
1200	2,40
1320	1,70

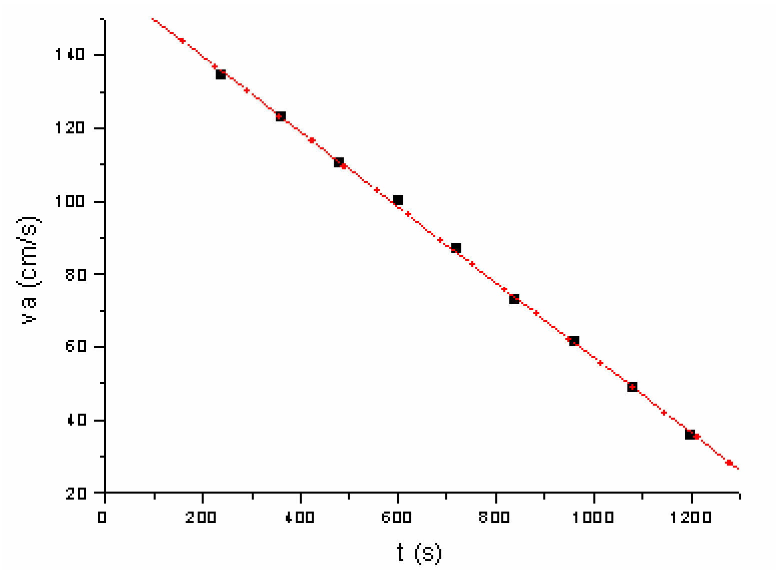


Datos experimentales de altura de la columna de agua en función del tiempo. Representación gráfica de los datos.

Del ajuste de la curva se obtiene la función:

$$h(t) = 0.0176\, t^2 – 1.063\, t + 16.59$$

t(s)	d(cm)	v_a (cm/s)
240	47,0	134,3
360	43,0	122,9
480	38,7	110,6
600	35,0	100,0
720	30,5	87,1
840	25,5	72,6
960	21,5	61,4
108	17,0	48,6
1200	12,5	35,7



Datos experimentales de la velocidad de salida del agua en función del tiempo. Representación gráfica de los datos.

El ajuste de la recta arroja el siguiente resultado:

$$v_a = 160.22 - 0.103\ t$$

Dado que se obtienen una parábola para $h(t)$ y una recta para $v_a(t)$, se puede verificar que el análisis teórico realizado durante la predicción es correcto.

Como etapa final de esta experiencia se propone a los alumnos que reemplacen los tiempos en la función $h(t)$ obtenida a partir del ajuste de los datos, a fin de hallar las posiciones de las marcas que indicarán los minutos en su reloj.

CONCLUSIONES

La presentación del problema planteado propone a los estudiantes dos caminos que conducen a resolverlo. La resolución teórica utiliza el análisis matemático, ya que deben resolver una ecuación diferencial. En todo el desarrollo de la asignatura Física II, se utiliza en forma extensa el Análisis Matemático, ya que numerosos conceptos físicos son definidos como derivadas o integrales. Para la resolución teórica es necesario plantear una hipótesis sobre la naturaleza del fluido (en este caso agua). Si se asume que es un fluido ideal, se deben usar las ecuaciones de Continuidad y de Bernoulli. Ese desarrollo, como se vio, conduce a una función cuadrática para la variación de la altura del nivel de agua en función del tiempo durante el que se vacía el recipiente.

El otro camino es una resolución experimental que permite validar las predicciones teóricas.

Un alumno que estudia Física debe tener un buen manejo de Matemática. En esta experiencia se pone en evidencia la fuerte relación entre ambas. La utilización permanente de conceptos aprendidos en las asignaturas del área de Matemática induce a pensar en cómo estos temas son tratados en dichas asignaturas. Es conveniente que el tratamiento puramente teórico de los conceptos sea complementado con aplicaciones prácticas que ayuden a su comprensión y a una utilización natural en fenómenos en los cuales una variable cambia en la medida en que lo hace otra. No sólo es importante que conozcan el mecanismo que permite encontrar la derivada o la integral de diversas funciones y entender la reciprocidad entre derivación e integración, sino su aplicación en la Ciencia que han elegido.

Siempre que sea posible deben buscarse los medios para que el estudiante de ciencias capte la relación existente entre las matemáticas puras y las ciencias físicas y que los cursos de cálculo proporcionen recursos suficientes para que se puedan formular los problemas físicos en términos matemáticos. Recordemos que Newton propone el Análisis Matemático como necesidad para formalizar la Mecánica, (Rey Pastor et Al, 1951; Ríbnikov, 1987).

Por otra parte, las dificultades que los estudiantes tengan en la comprensión de los conceptos de derivada e integral serán un obstáculo para la comprensión de los conceptos físicos que se abordan a lo largo de su carrera. Antes de que el alumno proceda con confianza a usar las ecuaciones matemáticas debe tener un mínimo de conocimiento sobre la teoría básica.

Este es un claro ejemplo de la importancia del conocimiento de la matemática para encarar el estudio de la Física con algún grado de profundidad, lo que es imprescindible en los alumnos de Física II.

Recíprocamente, el estudiante de matemática pura puede beneficiarse si tiene cierto conocimiento de algunas de las maneras en las que la necesidad de resolver problemas específicos ha estimulado el trabajo de naturaleza más abstracta (Boyce y Di Prima, 1979).

Se cree, además, que presentar una situación problemática promueve el interés de los estudiantes para relacionar la Física con la Matemática, utilizando una actividad didáctica que aparece como un elemento que permite dar significado psicológico para lograr un aprendizaje significativo, al plantear la construcción de un reloj de agua (Novak, ob cit. ; Novak y Gowin, ob cit.).

BIBLIOGRAFÍA

- AUSUBEL, D.; NOVAK, L. y HANESIAN, H. 1996. *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo. Novena reimpresión.* (Ed. Trillas, México).
- BOYCE, W. y Di PRIMA, R. 1979. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. (Ed. Limusa, México).
- FERNANDEZ GONZALEZ J., ELORTEGUI ESCARTIN N., RODRIGUEZ GARCIA J. y MORENO JIMENEZ T. 1997. De las actividades a las situaciones problemáticas en los distintos modelos didácticos, cit. en *Avances en la Didáctica de las Ciencias Experimentales.* (Universidad de Huelva, España), pp. 117 – 126.
- GANGOSO, Z.. 1999. Resolución de problemas en Física y aprendizaje significativo (primera parte: revisión de estudios y fundamentos). *Revista de Enseñanza de las Física*, V(XII), nº 2, pp. 5-21.

- GARRET R. M. 1995. Resolver Problemas en la Enseñanza de las Ciencias, *Alambique 5*, pp 6-15.
- GIL PEREZ D. 1988. La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación, *Investigación en la Escuela 6*, pp 3 – 19.
- GÓMEZ, J. 2002. *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Ed. Piados. 139 p. Espasa-Calpe Argentina, S. A., Bs. As.- México).
- NOVAK, J. D.1990. *Teoría y Práctica de la Educación*. (Ed. Alianza. Madrid, España).
- NOVAK, J. D. y GOWIN, D. E. 1988. *Aprendiendo a Aprender*. (Ed. Martínez Roca. Barcelona, España).
- OÑORBE A. 1995. La Resolución de Problemas, *Alambique 5*, pp. 4-5.
- PERKINS D.1997. *La escuela inteligente,* (Ed. Gedisa, Barcelona, España)
- POZO J.I., POSTIGO Y. y GOMEZ CRESPO M. 1995. Aprendizaje de Estrategias para la Solución de Problemas en Ciencias. *Alambique 5,* pp.16-26.
- RESNICK, R., HALLIDAY, D. y KRANE, K. 2004. *Física*, Vol I. (Ed. C.E.C.S.A., México).
- REY PASTOR, J. y BABINI, J. 1951. *Historia de la Matemática*. (Ed. Espasa-Calpe Argentina, S.A., Buenos Aires-México).
- RÍBNIKOV, K. 1987. *Historia de las Matemáticas,* (Ed.Mir Moscú).
- SERWAY, R. A. 1.996. *Física*, Vol I, (Ed. Mc Graw Hill,México).