C251-36

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA TRABAJAR CON LA FUNCIÓN FI DE EULER

José L. AGUADO, Emilio AGUIRRE

Facultad de Ciencias Exactas - UNCPBA - Argentina
jaguado@exa.unicen.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Claves: Euler, aritmética, función totien.

RESUMEN

En la asignatura Matemática Discreta que se dicta en el primer año de las carreras de Profesorado de Matemática, Licenciatura en Matemática e Ingeniería de Sistemas de la Facultad Ciencias Exactas de la UNCPBA, el concepto de la *función* φ (*fi*) de Euler es tratado con cierto detenimiento, debido a las aplicaciones posteriores. Por ejemplo, en el caso de alumnos de la carrera de Profesorado de Matemática, en el estudio de los números que se pueden construir con regla y compás, y en el caso de los alumnos de Ingeniería de Sistemas, por la relevancia que ha adquirido actualmente la teoría de números en modelos criptográficos.
En [1] describimos una propuesta didáctica para introducir el concepto de la φ por medio de operaciones con subconjuntos finitos de fracciones caracterizados por una propiedad sencilla.
Esa propuesta podría implementarse incluso a nivel de enseñanza media. Aquí relatamos la implementación a nivel de primer año de la universidad y damos los detalles técnicos para adaptar la demostración usual de la fórmula general usando el Principio de Inclusión y Exclusión.

INTRODUCCIÓN

Como sabemos, si *n* un número natural, entonces la función φ de Euler $\varphi(n)$ es la cantidad de naturales menores que *n* que son co-primos con *n*, es decir que no tienen factores comunes con *n*. Ya la definición tiene un sabor tan abstracto que no seduce a la mayoría de nuestros alumnos, a pesar de que apela solamente a definiciones de la aritmética básica. Si a continuación preguntamos por el valor $\varphi(6)$, esperando que el alumno mentalmente calcule 6 máximos comunes divisores, anote también mentalmente cuáles de ellos da 1, y dé el resultado, la decepción es inevitable.

Pero si le indicamos que observe la sucesión de fracciones $\left\{\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{3}{6},\frac{6}{6},\frac{5}{6},\frac{6}{6}\right\}$ y nos diga cuántas de ellas son irreducibles, dirá rápidamente que son 2.

En [1] describimos la propuesta para introducir el concepto de la φ de esta manera.
Reproducimos, por comodidad la síntesis de lo hecho en ese trabajo.

Definimos los siguientes conjuntos:

Dado un número entero positivo *n* definimos el conjunto $F_n = \left\{ \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n}{n} \right\}$ y si *d* es divisor positivo de *n*, definimos el conjunto $I_{d,n}$ como el conjunto de las fracciones irreducibles de F_n con denominador *d*. Se denota con *D*(*n*) al conjunto de divisores positivos de *n*. Con $|A|$ se denota el cardinal del conjunto finito *A*.

A partir de estas definiciones se prueban fácilmente los siguientes resultados (ver [1]):

$$F_n = \bigcup_{d \in D(n)} I_{d,n} \tag{1}$$

$$\text{si } d \neq d' \text{ entonces } I_{d,n} \cap I_{d',n} = \phi \tag{2}$$

$$n = |F_n| = \sum_{d \in D(n)} |I_{d,n}| \tag{3}$$

$$|I_{d,d}| = \varphi(d) \tag{4}$$

$$n = \sum_{d \in D(n)} \varphi(d) \tag{5}$$

Primera Fase: Formulación del Problema

<u>Ejemplo 1</u>

Sea:

$$F_6 = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{6}{6} \right\}$$

Se observa que sólo hay dos *fracciones irreducibles* en F_6: $\frac{1}{6}$ y $\frac{5}{6}$ de donde $I_{6,6} = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right\}$

Además:

$$\begin{aligned} F_6 &= \left\{ \frac{1}{2\times3}, \frac{2}{2\times3}, \frac{3}{2\times3}, \frac{4}{2\times3}, \frac{5}{2\times3}, \frac{6}{2\times3} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1 \right\} = F_2 \bigcup F_3 \bigcup I_{6,6} \end{aligned}$$

Pues $F_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right\}$ y $F_3 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \right\}$.

Entonces:

$$I_{6,6} = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{5}{6} \right\} = F_6 - \left(F_2 \bigcup F_3 \right)$$

De lo que se deduce que:

$$\begin{aligned} |I_{6,6}| &= 6 - \left(|F_2| + |F_3| - \left| F_2 \bigcap F_3 \right| \right) \\ &= 6 - (2 + 3 - 1) = 2 \end{aligned} \tag{6}$$

Aquí estamos usando que 6=2×3, donde 2 y 3 son números primos positivos y que el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos es la suma de los cardinales menos el cardinal de la intersección.

El *Teorema Fundamental de la Aritmética* (ver [3]) nos dice que si n es un número entero positivo tenemos que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ con p_i primo positivo y α_i entero no negativos, para $i = 1,\ldots,k$.

El problema es entonces:

Dado un número entero positivo n y la factorización en números primos de n, ¿es posible conocer la cantidad de elementos de $F_n = \left\{ \frac{1}{n},...,\frac{n}{n} \right\}$ *que son fracciones irreducibles con denominador n?*

En el momento de generalizar (6) a un conjunto F_n, donde n es un número natural, los alumnos aplican un conocimiento previo de gran utilidad: El Principio de Inclusión y Exclusión (PIE) (ver [3] o [4]) el cual establece:

PIE. *Dados un conjunto finito U y* $A_1,\ldots,A_k$ *subconjuntos de U, entonces:*

$$\left| U - \bigcup_{i=1}^{k} A_i \right| = |U| + \sum_{j=1}^{k} (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_j} \left| A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap \cdots \bigcap A_{i_j} \right| \tag{7}$$

En nuestro caso si $U = F_n$, entonces $|U| = |F_n| = n$.

Segunda Fase: Análisis del problema

De la factorización de 6 en números primos positivos, 6= 2×3 se obtienen los conjuntos:

$$F_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \right\} \text{ y } F_3 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3} \right\}$$

Fácilmente los alumnos descubren la siguiente relación entre las fracciones de F_2 y F_3 y F_6.

Aquí surgieron preguntas del tipo:

Todas las fracciones de F_2 y F_3 están en F_6. *¿Es general que si d divide a n entonces* $F_d \subset F_n$?

La demostración de esta propiedad no requiere demasiadas complicaciones, pero es conveniente que el docente formule aquí la siguiente sugerencia: si *n*=*dk* entonces $d \le n$ y si $\frac{h}{d} \in F_d$ entonces $h \le d$, de modo que en la argumentación $\frac{h}{d} = \frac{hk}{n}$ debe observarse que $hk \le dk = n$ por lo que $\frac{h}{d} \in F_n$.

Para $n = 12 = 2^4 \times 3$ los alumnos ya descubren que:

$$F_{12} = \left\{ \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{12}, 1 \right\} = F_6 \bigcup F_4 \bigcup I_{12,12}$$

Por lo que ahora, la estrategia para generalizar (6) surge de manera natural:

Sabemos que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} > 1$ con p_i entero positivo primo para i = 1,…,k y α_i entero no negativos para i = 1,…,k . Luego, si probamos que:

$$F_n = \bigcup_{i=1}^{k} F_{\frac{n}{p_i}} \bigcup I_{n,n} \qquad (8)$$

entonces reemplazando $A_i = F_{\frac{n}{p_i}}$ en (7) se puede obtener una generalización de (6).

La demostración de (8) la realiza directamente el docente:

Sea $f \in F_n$, si $f = 1$, entonces $f \in F_{\frac{n}{p_1}}$ por ejemplo, sea entonces $f = \frac{r}{d}$ la presentación irreducible de *f*. Si $d = n$, entonces $f \in I_{n,n}$.

Si $d < n$, entonces $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ con $\beta_j \le \alpha_j$ para todo $j = 1,\ldots,k$ y para algún *i* debe ser $\beta_i < \alpha_i$, es decir $\beta_i \le \alpha_i - 1$. Entonces *d* es un divisor de $\frac{n}{p_i} = p_1^{\alpha_1} \cdots p_i^{\alpha_i - 1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, así que

$f = \frac{r}{d} \in F_d \subset F_{\frac{n}{p_i}}$.

Recíprocamente, $I_{n,n} \subset F_n$ por definición, y para cada *i* vale que $F_{\frac{n}{p_i}} \subset F_n$, puesto que $\frac{n}{p_i}$ es divisor de *n*.

Esto prueba la identidad (8).

Es claro que $|A_i| = \left| F_{n/p_i} \right|$

Ahora hay que resolver la cuestión de cuántos elementos hay en el conjunto $F_{\frac{n}{p_i}} \cap F_{\frac{n}{p_j}}$ cuando $i \ne j$.

Tomemos dos conjuntos cualesquiera tal que $p_i \ne p_j$ y estudiemos su intersección.

$$x \in F_{\frac{n}{p_i}} \cap F_{\frac{n}{p_j}} \Leftrightarrow x \in F_{\frac{n}{p_i}} \wedge x \in F_{\frac{n}{p_j}} \Leftrightarrow x = \frac{b}{\frac{n}{p_i}} = \frac{bp_i}{n} \wedge x = \frac{c}{\frac{n}{p_j}} = \frac{cp_j}{n}$$

con *b*, *c* enteros tales que $1 \le b \le \frac{n}{p_i}$ *y* $1 \le c \le \frac{n}{p_j}$. Entonces

Así $\frac{bp_i}{n} = \frac{cp_j}{n} \Rightarrow bp_i = cp_j$. Por el Teorema fundamental de la Aritmética, la descomposición en primos es única, así $b = b_1 p_2$, y por lo tanto $x = \frac{b_1}{\frac{n}{p_1 p_2}} \in F_{\frac{n}{p_1 p_2}}$. De lo que se deduce que $F_{\frac{n}{p_1}} \bigcap F_{\frac{n}{p_2}} \subset F_{\frac{n}{p_2 p_2}}$. Recíprocamente, como $\frac{n}{p_1 p_2}$ es divisor de $\frac{n}{p_1}$ y $\frac{n}{p_2}$, se ve que $F_{\frac{n}{p_1}} \bigcap F_{\frac{n}{p_2}} \supset F_{\frac{n}{p_2 p_2}}$.

Por inducción podemos afirmar que para cualquier intersección que tomemos de *h* conjuntos de la forma $F_{\frac{n}{p_i}}$ vamos a obtener:

$$\bigcap_{i=1}^{h} F_{\frac{n}{p_i}} = F_{n/p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}$$

Por lo tanto podemos afirmar que:

$$\left|\bigcap_{i=1}^{h} F_{\frac{n}{p_i}}\right| = \left|F_{n/p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}}\right| = \frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_h}} \tag{9}$$

Ahora podemos utilizar (7), (8) y (9):

$$\left|I_{n,n}\right| = \left|F_n\right| - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j} \sum_{i_1<i_2\cdots<i_j}\left|F_{\frac{n}{p_{i_1}}} \cap F_{\frac{n}{p_{i_2}}} \cap \ldots \cap F_{\frac{n}{p_{i_j}}}\right|$$

$$= n - \left[\left(\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+\cdots+\frac{n}{p_k}\right) - \left(\frac{n}{p_1p_2}+\frac{n}{p_1p_3}+\cdots+\frac{n}{p_{k-1}p_k}\right) + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{n}{p_1\cdots p_k}\right]$$

$$= \frac{n}{p_1\cdots p_k}[\,p_1\cdots p_k - (p_2\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1\cdots p_{k-1}) +$$

$$+ (p_3\cdots p_k + p_2p_4\cdots p_k + \cdots + p_1\cdots p_{k-2}) + \ldots + (-1)^{k-1}$$

Ahora, usamos el desarrollo:

$$p_1\cdots p_k - (p_2\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1\cdots p_{k-1}) +$$

$$+ (p_3\cdots p_k + p_2p_4\cdots p_k + \cdots + p_1\cdots p_{k-2}) + \ldots + (-1)^{k-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

(ver [3] por ejemplo)
En definitiva se llega a:

$$\left|I_{n,n}\right| = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

Ahora, usando la identidad (4), podemos decir que:

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \tag{10}$$

Tercera Fase: Conclusiones

Aquí hay que observar que esta demostración a través del *PIE* presenta algunas ventajas didácticas sobre la que aparece en la bibliografía universalmente utilizada.
En efecto, para usar el *PIE* es frecuente definir los conjuntos de la forma $A_p = \{a\text{: } p \text{ divide a } a\}$ y tanto el cardinal de los A_p y como el de las intersecciones hay que calcularlos, en cambio con esta técnica los cardinales están en función de los F_α que sabemos que tienen cardinal α.

Al implementar este método se pudieron calcular distintos valores de $\varphi(n)$ entre otros

Ejemplo 2
n=60, 60=$2^2\times3\times5$, entonces:

$$\varphi(60)=60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=16$$

Ejemplo 3
$n= p$ con p primo positivo:

$$\varphi(p)=p\left(1-\frac{1}{p}\right)=p-1$$

Ejemplo 4

$$\varphi\left(p^k\right)=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)=p^k-p^{k-1}=p^{k-1}(p-1)$$

con p primo positivo.

$\varphi(19)=18$ $\varphi(30)=8$, $\varphi(58)=28$ y $\varphi(1000)=400$ $\varphi(11^3)=11^2(10)=1210$

Un alto porcentaje de alumnos utiliza la fórmula pero ya con el concepto elaborado y resuelve las aplicaciones que se han propuesto posteriormente.
Por ejemplo, una aplicación propuesta es la siguiente:
Si $n=a\times b$ es posible calcular $\varphi(n)$ en función de $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$. De ser así ¿para qué números a y b se cumple esto?
Volviendo a los ejemplos anteriores, los alumnos ven que:
$\varphi(60)=60\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=16$, pero si se escribe $60=6\times10$, como $\varphi(6)=2$ y $\varphi(10)=10\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=4$
En este caso no se cumple la multiplicatividad.
Observando (10) se ve que si $n=ab$ y MCD(a,b)=1, entonces
$n= ab$ entonces $a=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$ y $b=q_1^{\beta_1}\ldots q_t^{\beta_t}$ donde ningún primo que aparece en la factorización de a aparece en la factorización de b y viceversa.
Luego:

$$\begin{aligned}\varphi(a)\varphi(b)&=\left(a\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)\right)\left(b\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right)\right)\\&=ab\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right)\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_s}\right)=\varphi(n)\end{aligned}$$

O sea:
Si a, b son enteros co-primos, es decir con MCD(a,b)=1, entonces $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

Cuarta Fase: Evaluación Diagnóstica

El escenario elegido para realizar esta experiencia fueron las comisiones de trabajos prácticos

donde es posible obtener un seguimiento más cabal de los distintos grupos debido a la relación docente-alumno.
En el enfoque tradicional los estudiantes no se involucraron en la resolución de los problemas planteados en relación con este concepto tal como lo hicieron con esta técnica que propone trabajar con fracciones, objetos que le son familiares. Debe observarse que si bien la fórmula demostrada para fi de n es interesante a los fines teóricos a los fines prácticos es de mayor utilidad la fórmula (5), en particular para los alumnos de Ingeniería de Sistemas toma mayor relevancia por su carácter recurrente. Un porcentaje significativo incorporo el cálculo de la función Euler en forma análoga a algoritmos como derivación e integración. Esta conclusión surge de comparaciones con años anteriores y segmentos de distinta formación.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aguado, José Luis; Aguirre, Emilio. *Una experiencia didáctica para introducir el concepto de la φ (fi) de Euler en el nivel medio*- Ier. Encuentro de la Sociedad Matemática Nicaragüense (SMN)- Febrero de 2004
[2] Aguado, José L., Diez, Graciela, Rébora, Laura, *Diagramas de Karnaugh y Principio de Inclusión y Exclusión*, IX Encuentro Nacional I Internacional Sobre Enseñanza de la Matemática en Carreras de Ingeniería. Universidad Tecnológica, Facultad Regional Nacional, Concepción del Uruguay, Octubre de 2000.
[3] Aguado, José Luis. *Apuntes de Álgebra I*. UNCPBA.
[4] Aguado, José Luis .*Apuntes de Matemática Discreta*. UNCPBA
[5]Grimaldi, Ralph P.*Matemáticas, discreta y combinatoria*. Addison-Wesley Iberoamericana. 1989.