C551-20

USO DE LOS SÍMBOLOS EN ARGUMENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Rosa MARTÍNEZ

Facultad de Ciencias de la Educación - Universidad Nacional del Comahue - Argentina
rfmartin@uncoma.edu.ar

RESUMEN

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación “Distintas tipos de interacciones en la Enseñanza de la Matemática” subsidiado por la Secretaría de Investigación de la U. N. Co. Nuestro tema de interés es la relación del docente con el saber y particularmente la relación con la validación en matemática que tienen los estudiantes del Profesora de Enseñanza Primaria. Tomamos como material de análisis las respuestas que estudiantes- futuros docentes- dan cuando resuelven un cuestionario conformado por problemas. Las decisiones que toman los estudiantes al resolver el cuestionario, diseñado en este estudio, responden de alguna manera a su relación personal con la validación, aunque las mismas estarán condicionadas al marco institucional en el que desarrollan sus prácticas. Si bien las respuestas no nos indican estrictamente cuál es su relación personal con la validación, nos permitirán comprender cómo funciona en ellos la validación para entender cómo se arman las tradiciones de prácticas de la matemática difundidas en las aulas.
En esta presentación sólo expondremos parte del trabajo realizado. Desarrollaremos el análisis de las respuestas tratando de mostrar el uso de símbolos en la validación de procedimientos utilizados en problemas de geometría y aritmética. Este trabajo es parte de un estudio más amplio correspondiente a una tesis de maestría. Como ya lo anticipáramos, expondremos sólo algunos resultados alcanzados en tanto puede representar un aporte para la formación de docentes de matemática del nivel primario.

INTRODUCCIÓN

Nuestro tema de interés en los últimos años es la relación del docente con el saber y particularmente la relación con la validación en matemática, en particular la relación que tienen los estudiantes del Profesora de Enseñanza Primaria con la misma. Tomamos como material de análisis las respuestas que estudiantes- futuros docentes- dan cuando resuelven un cuestionario conformado por problemas. Las decisiones que toman los estudiantes al resolver el cuestionario responden de alguna manera a su relación personal con la validación, aunque las mismas estarán condicionadas al marco institucional en el que desarrollan sus prácticas. El análisis de dichas respuestas nos permitirán comprender cómo se arman las tradiciones de prácticas de la matemática difundidas en las aulas.
Nos apoyamos en los trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática francesa y en los de Educación Matemática anglosajones. Tomamos, de la escuela francesa, los aportes de Balacheff, Brousseau, Arsac, Duval; y de la escuela anglosajona los trabajos de Schoenfeld y los de Polya, tanto para la selección de los problemas que conformaría el cuestionario a tomar a los estudiantes, como para el posterior análisis de las respuestas del mismo.

En esta ocasión sólo expondremos parte del trabajo realizado. En el análisis de las respuestas intentamos dar cuenta cómo usan, los estudiantes, los símbolos en la validación de los procedimientos propuestos en la resolución de problemas de aritmética y geometría. Este trabajo es parte de un estudio más amplio correspondiente a una tesis de maestría.

CÓMO ABORDAMOS EL ESTUDIO

Para indagar acerca de la relación de los estudiantes– FD- con la validación en matemática, elaboramos un cuestionario que debían responder, dichos estudiantes, individualmente y por escrito. Tomamos de Balacheff (1982) la idea de que la resolución de problemas[6] favorece el desarrollo de prácticas argumentativas. El cuestionario está conformado por problemas en los que intentamos capturar diferentes aspectos que hacen al tratamiento de la validación en matemática: usar ejemplos y dibujos, simbolizar, generalizar, validar un algoritmo, decidir el valor de verdad de un enunciado, etc.
El análisis de las respuestas es cualitativo, y de esa interpretación obtenemos indicadores de las “creencias” y saberes de los FD acerca del tratamiento de la verdad en matemática, de lo que consideran respuestas aceptables en la institución a la que pertenecen en ese momento. Este estudio no pretende generalizar resultados, sino sumergirse en un caso, obtener información bajo ciertas condiciones e interpretarla en su complejidad.

Población estudiada. Para este trabajo se tomó como referencia empírica a FD de la Facultad de Ciencias de la Educación y de Institutos Provinciales de Río Negro y Neuquén. Se diseñó un primer cuestionario que fue tomado a los FD que integran ese universo. Teniendo en cuenta los datos obtenidos en la indagación efectuada a los FD, se realizaron los ajustes y se tomo el cuestionario definitivo. Se sistematizaron los datos recolectados y se realizó un análisis de los datos obtenidos.

ASPECTOS CONSIDERADOS EN PROCESOS DE VALIDACIÓN

La validación como parte constitutiva de la resolución de problemas está vinculada al tipo de tarea que plantea el problema; según el enunciado, será necesario recurrir a distintas herramientas matemáticas. Polya (1945) señala, entre otras, la notación, dibujar una figura, distinguir las diversas partes de una condición, la generalización. Para el diseño del cuestionario buscamos favorecer el uso de esas herramientas que hacen a la actividad matemática, aunque no hay garantía del uso de esas herramientas, dado que ningún modelo teórico puede independizarse de la racionalidad del estudiante.
Los aspectos considerados, vinculados a los procesos de validación, son: determinar la verdad o falsedad de afirmaciones, en aritmética y geometría; construcción de una figura y validación del dibujo obtenido; validación de una propiedad, en geometría y aritmética; validación de un algoritmo de cálculo; validación de una propiedad a partir de un dibujo; validación en un conjunto finito y validación en un conjunto infinito[7]. El Cuestionario Final quedó conformado con 7 problemas y con un total de 16 ítems a resolver. En el anexo transcribimos ese Cuestionario tal como fue tomado a los FD.

[6] Balacheff (1982) dice que en los procesos de resolución de problemas, se da un proceso cíclico y al término de cada ciclo se da la verificación. Las sucesivas verificaciones dan lugar a procesos de validación que resultan ser el motor de la resolución de problemas.
[7] En este trabajo no se desarrolla cada uno de los aspectos mencionados, el mismo se encuentra en “Diferentes modos de argumentar en enseñanza de la matemática”, tesis de Maetría, R. Martinez, U.N.Comahue, 2004.

ANÁLISIS DE DOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO

Tomamos, a modo de ejemplo, dos problemas del cuestionario en los cuales las respuestas dadas a los mismos por los FD dan cuenta del funcionamiento, que estos estudiantes hacen de los símbolos a la hora de explicitar sus argumentos. Uno de los problemas involucra conocimientos aritméticos y el otro de geometría del plano. El de aritmética (Problema 1) corresponde a un problema en el cual se debe indicar el valor de verdad de una afirmación y justificar, lo cual involucra dos tareas: decidir y validar. La elección de esta afirmación se basó en crear condiciones en las cuales los estudiantes puedan formular de argumentos en los que usen símbolos como medio de explicitar sus razonamientos. En problema que analizaremos corresponde a una afirmación verdadera. El problema de geometría (Problema 2), plantea un enunciado en el cual la conclusión está dada. A diferencia de los problemas en los que se tiene que analizar la verdad o falsedad de un enunciado, en este caso la tarea es validar un enunciado que se sabe verdadero. El enunciado del problema corresponde a una descripción que da la posibilidad de realizar un dibujo, dicha representación facilitaría hallar la justificación pedida. El dibujo sería un apoyo, no es parte de la respuesta. La validación dependerá de las relaciones que se puedan establecer entre descripción-dibujo-conocimiento.

Problema 1

Para la siguiente afirmación distinga si es verdadera o falsa. Justificar la respuesta: “La suma de dos números naturales impares es par”.

La resolución de este problema plantea dos cuestiones: indicar la veracidad o falsedad de la afirmación dada, y dar un argumento que apoye dicha decisión. En la justificación de las respuestas se espera argumentos que contemplen el uso de simbología.

Análisis de las respuestas del Problema 1

Todos los FD afirman que el resultado es verdadero. Seis estudiantes sólo indican el valor de verdad sin más comentarios [R1, R3, F4, F6, F10, N1]. En el análisis de las demás respuestas tuvimos en cuenta que en algunos casos dan ejemplos y, en otros, no los usan y dan un discurso. Dentro de estos grupos diferenciamos algunos matices.

1. Usan ejemplos

Algunos estudiantes sólo ilustran con ejemplos [F9, F2, F3, F7]:

[F2] “ $\begin{array}{r} 17 \\ +17 \\ \hline 34 \end{array}$ *Es verdadero.”*

[F9] *“Verdadero $3 + 3 = 6$ $5 + 5 = 10$ $1 + 1 = 2$”*

Señalamos una diferencia entre los estudiantes que exhiben sólo un ejemplo y los que muestran más de uno. En los primeros, un ejemplo tiene la fuerza necesaria para afirmar que el resultado es verdadero en todos los casos. En los que dan varios ejemplos, pareciera que al mostrar que “se da en este caso”, “se da en este otro”... trataran de argumentar inductivamente, en el sentido de las ciencias elementales.

Nos llama la atención que F9 en todos los ejemplos, tome dos números impares iguales.

Otro grupo de estudiantes [F5, F12, R5, R8] agrega a los ejemplos discursos basados en dibujos y/o símbolos:

[F12] *"Verdadera porque cuando se suma dos números impares, el que queda solo, forma una con el otro que queda suelto. Ej.:*

$$9 + 9 = 18$$

estos que quedan sueltos forman un par."

[R5] "

$$\begin{array}{r|l} 13 & IMPARES \\ \underline{27} & \\ 40 & PAR \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & IMPARES \\ \underline{13} & \\ 28 & PAR \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & IMPARES \\ \underline{5} & \\ 8 & PAR \end{array}$$

$$(N^o\ PAR + 1) = IMPAR \Rightarrow (N^o\ \overbrace{PAR + 1) + (N^o}^{PAR}\ \underbrace{PAR + 1)}_{2} = PAR"$$

[R8] "$\underbrace{(P + 1)}_{N^o\ impar} + (P + 1) \quad \therefore P + P = Par$"

"$3 = (2 + 1) + (2 + 1) \therefore 4 + 2 = 6$"

F12 intenta justificar la propiedad con dibujos que representan las cantidades y usa que la suma de dos números pares es par. Aunque esos dibujos no son una justificación, junto con las descripciones coloquiales constituirían argumentos que pueden mostrar un intento de explicación de la afirmación. Este funcionamiento de la validación correspondería a lo que Balacheff (2000) llama *pruebas pragmáticas* de *sujetos prácticos* dado que determinan el valor de verdad de su producción a través de verificaciones ligadas a la acción efectiva sobre los objetos. El ejemplo, en este estudiante, tendría un carácter genérico dado que el mismo no se examina en sí mismo, sino para hacer explícito un modelo de acción que fundamenta la conjetura.
R5 da ejemplos que parecen tener un carácter exploratorio sobre la suma de números impares. Acompaña a estos ejemplos con un desarrollo simbólico muy próximo al lenguaje matemático y muestra allí cierto dominio. En cambio F5, que también utiliza símbolos, lo hace para designar números (y en forma incorrecta).
R8, al igual que R5, usa los símbolos para expresar sus razonamientos.

2. No usan ejemplos

Dos estudiantes repiten solamente la afirmación dada [R4, R9]. Otros arman un discurso en registro coloquial [F8] o simbólico [R2, R6, R7, R10, F1, F11, F13, N2].

[F8] *"V. cuando los sume, a cada número le queda una unidad sin agrupar de a par, por lo tanto cada unidad suelta agrupada me da un número par"*

[R7] "$P + 1 + P + 1 = (Par + Par \text{ es } Par) + (1 + 1 \text{ es } 2)$
$= Par + Par\ (2) = Par$"

[F11] "V. $\quad 2 . k + 1 + 2 . k + 1 = \quad 4 k + 2 = par$"

[R2] "V. $\quad$ Si n es par $\Rightarrow n + 1$ es impar $\Rightarrow (n + 1) + (n + 1) =$
$n + 1 + n + 1 = 2n + 2 = 2(n + 1)$
$\therefore (n + 1) + (n + 1) = 2(n + 1)$ "

[F1] “V. $a = x + 1 ,\ x \in Z$ H) $a = x + 1 \wedge b = x + 1$

$b = x + 1 ,\ x \in Z$ T) $a + b = 2\,x'$

$$
\begin{aligned}
a + b &= x + 1 + x + 1 \\
&= x + x + 2 \\
&= 2\,x + 2 \\
&= 2\,(\underbrace{x + 1}_{x'}) \\
&= 2\,x' \quad \text{cqd.”}
\end{aligned}
$$

La mayoría de estos estudiantes plantean sumandos que son iguales. Tal vez, en la relación que los estudiantes tienen con los símbolos, creen que con una misma letra pueden designarse diferentes números. Otras respuestas que no hemos transcripto aquí [F13 y N2], distinguen explícitamente dos números impares cualesquiera.
Los argumentos subyacentes en las respuestas de F8 y R7 son los mismos y corresponden a expresiones equivalentes, sólo cambia el registro. Ambos [F8 y R7], y además F11 y F1, suponen conocido que la suma de números pares es par, proposición que es del mismo “nivel” que lo que se tiene que probar.
F11 es el único que denota a un número par con “2.k”.
F1 hace un desarrollo algebraico, distingue hipótesis y tesis, y realiza una serie de operaciones algebraicas correctas que no lo conducen a la prueba.
Para un grupo de estudiantes que solamente dicen que el resultado es verdadero. Al ser interrogados verbalmente, algunos consideran al problema como un resultado conocido, y otros reconocen haber realizado cuentas, pero que no las escribieron porque no las consideran como argumentos. Sin embargo, para otros, los ejemplos resultan suficientes para determinar el valor de verdad de la afirmación. En pocos casos aparece el uso del ejemplo con un carácter genérico, en el sentido que lo plantea Balacheff (2000), tratando de fundamentar la validez de la afirmación.
El problema involucra un conjunto infinito y así lo tratan en los registros coloquiales (“*siempre la suma de dos impares*...”). Cuando incluyen expresiones algebraicas, salvo un estudiante, los otros consideran dos números impares iguales, es decir toman un universo restringido.
La simbolización es generalmente utilizada para traducir el enunciado dado, como intentando expresarse con “formas” admitidas y reconocidas matemáticamente, pero la manipulación simbólica no constituye una herramienta para justificar.

Problema 2

Dado un cuadrilátero convexo *ABCD*. Los puntos *M*, *N*, *P*, *Q* son puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* respectivamente. Indicar los argumentos que aseguran que *MNPQ* es un paralelogramo.

El problema pide dar los argumentos que aseguren que una determinada figura cumpla las condiciones del enunciado. Un modo de obtener la justificación al problema sería utilizar la propiedad enunciada en otro problema del cuestionario (problema 2.4-, Cf. Anexo) sobre el paralelismo de las bases medias a los lados de los triángulos.

Análisis de las respuestas del Problema 2

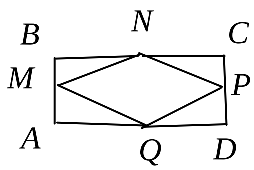
Tres FD no dan respuesta a este problema [F8, R2 y R4].
Las demás respuestas se analizaron teniendo en cuenta si utilizan o no propiedades pertinentes en su desarrollo argumentativo. Distinguimos, dentro de los grupos de respuestas, diferentes matices que muestran distintos funcionamientos de la argumentación.

La mayoría de los estudiantes basan sus discursos en dibujos que realizan. Muchos de esos dibujos (17 en total) corresponden a cuadriláteros particulares (rectángulos, cuadrados). La realización de dichos dibujos podría deberse a que éstos ayudan a comprender el enunciado. El dibujo en este problema tendría un valor de *herramienta heurística*, que como dice Polya (1974) permite examinar detalles diferentes, unos tras otros, y permanecen en el papel cada vez que se desea recurrir.

1. **Describen lo que ven** [F2, F3, F4, F5, F6, F9, F10, F11, F12, R1, R3, R5, R6, R7, R8, R9, R10, N1]

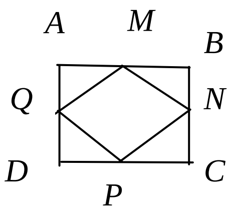
Estos FD enuncian propiedades que están ligadas a una lectura del dibujo. El dibujo confirma lo que dice el enunciado del problema "*MNPQ* es un paralelogramo"; el discurso argumentativo no devendría de una formulación de propiedades pertinentes- según la información que se tiene de ese objeto- sino de manifestar lo que se sabe respecto de él porque se "ve" un paralelogramo (un rombo, un cuadrado, ...). En estas respuestas se realza la evidencia del dibujo en la justificación, como dice Fregona (1992) los estudiantes realizan esta tarea a través de la contingencia, "ven" tal propiedad, "ven" qué figura se acaba de construir y sólo en eso basan sus argumentos.

[F4]



"MNPQ es un paralelogramo tiene dos pares de lados paralelos. En este caso el paralelogramo es un rombo. Al ser M, N, P, Q puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA estos puntos cortan a los segmentos en su punto medio, al unir los vértices se forma un rombo."

[R6]



"Tiene 2 pares de lados opuestos paralelos, es convexo."

2. **Arman un razonamiento aunque arriban a conclusiones falsas** [F7, F13, N2]

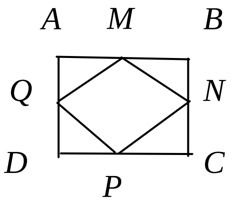
El discurso argumentativo desarrollado por estos FD muestra, como lo dice Duval (1989) *actitudes proposicionales* en el sentido de que lo que dicen no está referido directamente al contenido del enunciado sino al status que esos enunciados tienen. Tratan de armar un discurso con cierta lógica matemática pero no constituyen una justificación dado que parten de supuestos falsos. Por ejemplo:

[N2] "Las bases medias de un cuadrilátero convexo, en este caso, MP y NQ se cortan en su punto medio. Si éstas hacen las veces de diagonales de un paralelogramo cumplen con la propiedad que dice que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio y ésta es condición suficiente para asegurar que el cuadrilátero es un paralelogramo."

Rescatamos de este discurso que este FD toma la propiedad de las diagonales y formula las condiciones de su utilización para asegurar que la figura en cuestión es un paralelogramo. El supuesto en el que se apoya: *MP* y *NQ* se cortan en su punto medio es falso. La condición para que sea paralelogramo es la intersección de las diagonales en su punto medio y eso es lo que se remarca en este desarrollo. Destacamos esa actitud poco habitual en las respuestas analizadas de este cuestionario- explicitar las hipótesis- aunque la justificación no es válida.

Otro ejemplo:

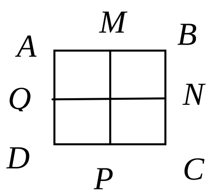
[F7]



"MNPQ es un paralelogramo ya que tiene dos pares de lados opuestos $\cong$ y //
QM $\cong$ NP por ser hipotenusa de 2 triángulos QAM $\cong$ PNC por criterio de congruencia LAL, análogamente ocurre lo mismo con los lados QP $\cong$ MN
QM // NP porque dos rectas cortadas por una transversal son //, ocurre lo mismo con QP//MN
Por lo tanto MNPQ es un paralelogramo por su definición: tienen dos pares de lados opuestos $\cong$ y //."

Para F7 la justificación estaría muy vinculada a la simbolización pero no hace un *uso* adecuado de la misma. Este estudiante asocia ciertos ritos de la prueba matemática sin lograr armar un razonamiento, parte de un cuadrilátero particular con lo que la conclusión resulta falsa. Este modo de justificar podría encuadrarse en lo que Duval (1989) llama *actitudes proposicionales* dado que usa lenguaje matemático que no ayuda a elaborar su prueba. Este estudiante, como otros que dan respuestas similares, parece tener la creencia que en matemática se hacen oraciones cortas usando cierto vocabulario, se arman proposiciones, se usan símbolos, ciertas palabras, como si esas actitudes bastaran para defender una verdad.
F13 arma un discurso para decir lo que "ve" en el dibujo usando símbolos. Dibuja un cuadrilátero particular y a través de símbolos y expresiones matemáticas da proposiciones sobre segmentos de la figura que "ve" y sin ninguna lógica que los relacione.

[F13]



"M es el pto. 1/2 de AB
P es el pto. 1/2 de DC
Q es el pto. 1/2 de AD
Sabemos que: MB $\cong$ y // PC $\Rightarrow$ MBCP es paralelogramo, por lo tanto
$\boxed{MP \cong BC}$ *(1)*
del mismo modo QN $\cong$ DC
QD $\cong$ y // NC $\Rightarrow$ QNCD es paralelogramo, por lo tanto $\boxed{QN \cong DC\ (2)}$
Por (1) y (2) MP $\cong$ QN
Veamos que MP $\perp$ QN
** MP $\cong$ y // BC y además BC $\perp$ DC $\Rightarrow$* $\boxed{MP \perp DC\ (3)}$
** QN $\cong$ y // DC y además* $\boxed{DC \perp BC\ (4)}$
de (3) y (4) DC $\perp$ BC podemos decir QN $\perp$ MP como queríamos probar.

Si bien, F13, muestra un esfuerzo por usar un lenguaje simbólico nada justifica con tal despliegue. Se observa, en este desarrollo, nuevamente ritos ligados a una "prueba". Las "implicaciones", "remarcar" las congruencias de segmentos, ... son actitudes proposicionales**,** de las que habla Duval (1989), reconocidas por este FD como parte del discurso matemático.
El problema enuncia: "un cuadrilátero cualquiera *ABCD* ..." y la mayoría de los dibujos que aparecen en las respuestas corresponden a cuadriláteros particulares (17 dibujos correspondientes a rectángulos y cuadrados). Cualquier cuadrilátero, para estos estudiantes, podría ser "cualquiera, por ejemplo un rectángulo". La vinculación entre "cualquiera" y "dibujo particular" podría estar condicionado a la disponibilidad de conocimientos de propiedades que se tengan sobre figuras. Pareciera que en los dibujos de cuadriláteros

particulares la fuerte percepción de las diagonales *MP* y *NQ* conduce a los FD a utilizarlas en sus discursos sin advertir que no ayudan a resolver el problema. No tienen en cuenta que las diagonales del cuadrilátero *ABCD* son lados de los triángulos *ABQ* y *QBC,* y por consiguiente no consideran la propiedad de las bases medias de un triángulo enunciada en el problema 2.4- del cuestionario, clave para su resolución. El conocimiento de esta propiedad queda garantizado por la cercanía del problema 2.4-, sin embargo, como dice Schoenfeld (1992), los estudiantes no pueden hacer *uso* de dicho conocimiento.
La justificación- para la mayoría de los FD- estaría ligada a la percepción del dibujo. Una descripción de lo que se "ve" sería lo que opera como justificación.
La mayoría de los FD (18 de 22) manifiesta, del mismo modo que lo observamos en el problema 2.4-, lo que Arsac (1989) llama una *concepción realista* de la figura, dado que la constatación sobre el dibujo aparece como modo para justificar una propiedad. Así el listado de propiedades relativas a la figura en cuestión aparece como una acumulación o una composición de propiedades (proposiciones) que hacen a una descripción o a un recitado. En algunos casos se reconoce al simbolismo como una práctica ligada a la justificación sin que por ello resulte una herramienta útil para dar respuestas.

CONCLUSIONES

La simbolización y la manipulación simbólica, unidas a la abstracción son herramientas de la matemática (Schoenfeld, 1992). Los estudiantes usan símbolos en sus respuestas pero generalmente lo hacen para traducir el enunciado dado y no como una herramienta para justificar. Esto se hace más claro en los problemas de aritmética, donde la manipulación simbólica es una herramienta en la producción de conocimientos. Varios estudiantes usan letras para representar números con ciertas propiedades, pero la forma de expresarlos no es correcta y esto los conduce a una restricción del universo de números a considerar y a sustentar sus razonamientos en supuestos que están al mismo nivel de lo que se quiere argumentar. Por ejemplo, representan con "P+1" a un número impar y utilizan la misma letra para denotar números distintos.
En los problemas de geometría se observa, cuando se usa[8], un exceso de simbolismo, y como ya lo señalamos las proposiciones, aunque verdaderas, no constituyen en general una argumentación. El lenguaje simbólico no aparece como una herramienta de *cálculo intelectual* en los términos que lo plantea Balacheff (1987), más bien aparece ligado a "formas" admitidas y reconocidas matemáticamente.

BIBLIOGRAFÍA

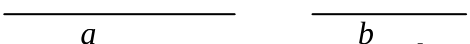
ARSAC, G. et col. (1992) *Initiation au raisonnement dé dutif au collège*, Presses Universitaires de Lyon, I. R. E. M.
BALACHEFF, N (2000), Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Ed Una Empresa Docente, Bogotá.
BALACHEFF, N. (1987), "Devolution d´un probleme et constrution d´une conjeture le cas de la somme des angles d´un triangle.", en *Cahier de didactique des mathématiques, Nº 39,* IREM Universite Paris VII.
BALACHEFF, N. (1987), "Processus de preuve et situations de validation.", en *Educational*

[8] En otras respuestas a problemas geométricos (Problema 2.4- y 6-) que no tratamos aquí aparece el mismo comportamiento, cuando se usa simbología la misma no resulta una herramienta adaptada para explicitar los razonamientos.

Studies in Mathematics 18, pp. 147-176.
BALACHEFF, N. (1982), "Prueve et demonstration en mathématiques au college", en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3, Nº3, pp. 261-304, La Pensée Sauvage, Grenoble, France.
DURAND-GUERRIER, (1995), “Place de la logique formelle comme outil d´anlyse des connaissances mises en œuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique”, en ARSAC y col *Différents types de savoirs et leur articulation*, La Pensée Sauvage éditions.
DUVAL, R. (1992-1993), “Argumenter, demontrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive?”, en *Petit X* Nº 31 pp. 37 a 61, Francia.
DUVAL, R. et EGRET, M. A., (1989, “L´organisation deductive du discours. Interaction entre structura de surface dans l´accés á la demostration”, en *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 2, IREM de Strasbourg*, pp. 25-40
FREGONA, D., (1995), *Les figures planes comme “milieu” dans l’enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques*. Thèse Université
MARTINEZ, R., PORRAS, M. (1999), "La relación de los alumnos del Profesorado de Nivel Primario y la argumentación en geometría.", comunicación en el "Primer Congreso Internacional de Didáctica de las Ciencias" La Habana, Cuba.
POLYA G. (1974), *Cómo plantear y resolver problemas*, Editorial Trillas (cuarta reimpresión), México. Primera edición: (1945), *How to solve it*,.Princeton University Press, U.S.A.
PUIG ADAM, P. (1969), *Curso de geometría métrica*, *Tomo I y II*, Lección 17, Biblioteca Matemática, S. L. Madrid.
SCHOENFELD, A. (1987), “What’s all the fuss about metacognition?”, en *Cognitive Science and Mathematics Education*, L. Erlbawn.
SCHOENFELD, A.(1992), “Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics”, in *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Ed.) Grouws, Macmillan, New York.

ANEXO

Cuestionario final

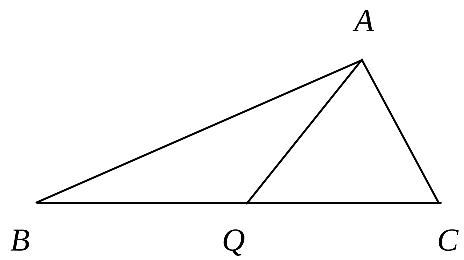
1. Resolver 105 x 213 multiplicando manualmente y justificar el algoritmo utilizado.
2. Para cada una de las siguientes afirmaciones distinguir si son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.
   - 2.1. Sea a un número natural, $a \div 0{,}31$ es mayor que $a \times 0{,}31$
   - 2.2. La suma de dos números naturales impares es par
   - 2.3. Todo múltiplo de 3 es múltiplo de 9
   - 2.4. Dado el triángulo *ABC*, si *H* es punto medio de *AC* y *L* es punto medio de *CB*, entonces *HL* es paralelo a *AB*
   - 2.5. Se puede construir un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 3 cm y 1,5 cm
   - 2.6. Todo rombo es cuadrado
3. Dados los segmentos *a* y *b* 
   - 3.1. Construir un paralelogramo con esos segmentos como diagonales del mismo.
   - 3.2. Indicar los argumentos por los cuales se garantiza que su resultado es un paralelogramo.
   - 3.3. ¿Es el único paralelogramo que se puede encontrar con esos datos?
4. La división en naturales del número D < 4500 por el número natural d da como cociente 82 y como resto 45. Buscar todos los números D y d que cumplen con esas condiciones.

5.1 ¿Cuáles son los posibles valores que debe tomar m para que $\frac{m}{42}$ resulte un número natural? Justificar.

5.2. ¿Cuáles son los posibles valores que debe tomar m para que $\frac{m}{42}$ resulte un número decimal? Justificar.

5.3. ¿Cuáles son los posibles valores que debe tomar m para que $\frac{m}{42}$ resulte un número racional periódico? Justificar.

6. Sea el triángulo *ABC* y *Q* es el punto medio del lado *BC*. ¿Por qué las áreas de los triángulos *ABQ* y *QCA* son iguales?



7. Dado un cuadrilátero convexo *ABCD*. Los puntos *M*, *N*, *P*, *Q* son puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* respectivamente. Indicar los argumentos que aseguran que *MNPQ* es un paralelogramo.