C211-12

ALGUNOS RESULTADOS DE UNA INVESTIGACIÓN ACERCA DEL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE O CONJETURAL

María Elena MARKIEWICZ, Silvia Catalina ETCHEGARAY

Universidad Nacional de Río Cuarto
Ruta Nac. Nº 36 Km. 601 (5800) Río Cuarto. Argentina
mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar

Nivel Educativo: Tercer Ciclo Educación General Básica.

Palabras Claves: didáctica, significado, razonamiento plausible, conjeturas.

RESUMEN

Este trabajo tiene como objetivo dar a conocer los primeros pasos de una investigación en Didáctica de la Matemática que tiene como objeto de estudio el razonamiento plausible o conjetural, es decir aquel que nos permite elaborar y contrastar conjeturas.
A partir de un problema didáctico detectado en el ámbito de la escuela media, vinculado a la escasez de espacios que promuevan el desarrollo del razonamiento plausible y, sobre todo, de instancias de institucionalización, nos propusimos investigar cuál es el papel que debería jugar este tipo de razonamiento en dicho nivel educativo. Para ello, y basándonos en supuestos de la Teoría de las Funciones Semióticas, abordamos algunos aspectos correspondientes a la dimensión epistémica de nuestro objeto, en particular:
- caracterizamos los componentes de los sistemas de prácticas vinculados al razonamiento plausible en la matemática, a fin de contar con un primer significado de referencia institucional y con un instrumento de control que operativiza el análisis del razonamiento plausible en las instituciones de enseñanza.
- analizamos el significado del razonamiento plausible en instituciones educativas, en particular, en el currículo y en libros de texto, poniendo de manifiesto algunas restricciones inherentes al mismo en dichos contextos, en comparación al significado de referencia construido.

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se encuadra dentro del proyecto de investigación “Análisis del grado de representatividad de los significados institucionales de objetos matemáticos” que se desarrolla en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto, y su contenido está basado en el trabajo de tesis de maestría en Didáctica de la Matemática “El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática” (Markiewicz, 2005).
El objetivo de este trabajo es dar a conocer algunos resultados de una investigación en Didáctica de la Matemática que tiene como objeto de estudio “el razonamiento plausible o conjetural”, denominación dada por Polya en 1954 para referirse a aquel razonamiento que

nos permite formular conjeturas, examinar su validez y contrastarlas, y reformularlas para obtener nuevas conjeturas susceptibles de ser puestas a prueba.
Numerosos autores, como Poincaré (1902), Kline (1973), Polya (1954) y Lakatos (1978), han destacado el importante papel que el razonamiento plausible tiene en la construcción del pensamiento matemático científico, lo cual se puede apreciar claramente en la historia de la matemática. Desde el ámbito de la didáctica de la matemática también se ha señalado la importancia de este tipo de razonamiento como un aspecto fundamental a desarrollar para poder abordar el estudio de una obra matemática. (Chevallard, Bosch y Gascon, 1997).
Sin embargo, a pesar de su importancia, y tal como lo indica Gascon (2000), en el contexto escolar muchas veces se ignora el papel de este tipo de razonamiento, así como los patrones que lo rigen, quedando muy debilitadas las fases exploratorias de la actividad matemática, las cuales se dejan a la responsabilidad exclusiva del alumno, sin ningún tipo de institucionalización. Esta situación, que nosotros pudimos constatar en nuestra experiencia como investigadoras en la escuela media, nos llevó a formular el siguiente problema didáctico:
En el contexto escolar, en particular en la escuela media, no hay demasiados espacios que permitan el desarrollo del razonamiento plausible, la reflexión acerca del mismo y la toma de conciencia de su papel y de su importancia dentro de la matemática.
Esto genera, en el ámbito de la clase de matemática, una suerte de "confusión argumentativa" producto de la falta de distinción entre distintas formas de validación.
Este problema nos llevó a plantear nuestra pregunta inicial de investigación: **¿cuál debería ser el papel del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática?** Claro que, al tratar de responderla, comenzaron a surgir otras cuestiones, de naturaleza diferente pero muy relacionadas, que necesitaban investigación. En este sentido la Teoría de las Funciones Semióticas (TFS), desarrollada por el Dr. Juan Diaz Godino (2003), nos proporcionó un marco teórico y una metodología adecuada para organizar y abordar dichas cuestiones.
Como es sabido, la TFS adopta la noción de significado como clave para analizar la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento matemático. Según este enfoque, el significado de un objeto está vinculado con los **sistemas de prácticas** de los cuales dicho objeto emerge, es decir, con los usos que se hace de él. Estos sistemas de prácticas pueden ser atribuidos a un sujeto individual (en cuyo caso hablamos de significado personal del objeto) o pueden ser compartidos en el seno de una institución (significado institucional del objeto). Tales sistemas de prácticas incluyen componentes praxémicos, como son las **situaciones** en las que se pone en juego el objeto y las **acciones o procedimientos** que se realizan ante dichas situaciones, y componentes discursivos, tales como las **definiciones**, **propiedades** y **argumentaciones** vinculadas al objeto en cuestión.
Sobre la base de estos y otros constructos teóricos pudimos generar una agenda de investigación ligada a nuestro objeto "razonamiento plausible" que tiene en cuenta las dimensiones epistémica (en donde el foco está centrado en los significados institucionales de nuestro objeto de estudio), cognitiva (en la cual el interés gira en torno a los significados personales asignados a nuestro objeto) e instruccional (interacción entre significados personales e institucionales) (Markiewicz, 2006).
Desde esta perspectiva, nos propusimos comenzar a dar respuesta a algunas cuestiones vinculadas a la dimensión epistémica. Entre estas cuestiones, en la citada tesis abordamos aspectos que tienen que ver con la relación entre razonamiento plausible y deductivo, y con el significado del razonamiento plausible en distintos contextos institucionales en los que aparece, en particular, en la vida cotidiana y en las ciencias experimentales, pero, fundamentalmente nos abocamos al análisis del significado del razonamiento plausible en las instituciones de producción y de enseñanza de la matemática.
En este trabajo intentaremos mostrar, en la sección 2, como hemos avanzado en la

caracterización del significado del razonamiento plausible en la matemática, delimitando los componentes praxémicos y discursivos de los sistemas de prácticas vinculadas al mismo, generando así un primer significado de referencia institucional que pone de manifiesto la complejidad de relaciones que involucra este objeto. También mostraremos, en la sección 3, cómo utilizamos este significado de referencia para contrastar los elementos de significado vinculados al razonamiento plausible que se hacen presentes en las instituciones de enseñanza, en particular en los libros de texto correspondientes al tercer ciclo de la E.G.B, poniendo de manifiesto algunas restricciones en los elementos de significado inherentes al razonamiento plausible en los libros de texto más comúnmente utilizados por los docentes de la escuela media, en comparación con el significado de referencia emergente del análisis de la institución matemática. Por último, en la sección 4, esbozaremos algunas conclusiones.

2. CARACTERIZACIÓN DEL SIGNIFICADO DEL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE EN LA MATEMÁTICA

En esta sección, tal como lo adelantáramos, abordaremos el análisis del significado del razonamiento plausible en la matemática. Partiendo de la consideración del razonamiento plausible como objeto matemático, en concordancia con la definición que da Godino (2003) según la cual puede considerarse un objeto matemático a todo aquello que se pone en juego en la actividad matemática, intentamos determinar los componentes de los sistemas de prácticas vinculadas al mismo. Para ello, basándonos fundamentalmente en el análisis de los trabajos de Polya (1954) y de Lakatos (1978), tratamos de determinar en qué situaciones se pone en funcionamiento el razonamiento plausible, cuáles son los procedimientos que se ponen en juego en dichas situaciones, qué definiciones involucra, qué propiedades tiene, y qué tipo de argumentaciones forman parte de su significado. Debemos aclarar que en el trabajo de tesis mencionado se realizó el análisis pormenorizado de tales elementos, ejemplificando algunos de ellos para el caso particular de la elaboración de la Conjetura de Euler referida a poliedros. Lo que se presenta en este trabajo es solo un resumen de sus aspectos principales.

- **Situaciones** en las que se pone en funcionamiento el razonamiento plausible:

- Por definición podemos decir que son **aquellas que involucran la elaboración de conjeturas, distinguiendo entre estas de manera especial a aquellas en las que es necesario formular una relación general.**
- También hemos incluido, aunque sea bastante general, **todos aquellos problemas (ya sean de encontrar o de demostrar) en los que para su resolución sea útil o necesario recurrir a un caso más general, a un caso particular o a un caso análogo.**
- Así mismo, podemos considerar **aquellas situaciones que pueden involucrar aisladamente alguno o algunos de los procedimientos que mencionaremos a continuación.**

- **Procedimientos**

Los procedimientos que están involucrados en la elaboración y contrastación de una conjetura con muy diversos y complejos, pero hemos intentado rescatar aquellos que se dan más frecuentemente en la investigación matemática.
Polya le asigna una importancia fundamental a la **inducción empírica** en la elaboración de conjeturas. En este sentido sostiene que muchas veces el matemático, enfrentado a un problema, elabora sus conjeturas a partir de **la observación de casos particulares o ejemplos (especialización)**, la **sistematización de dichos ejemplos** (mediante tablas, cuadros u otro tipo de registros que le permitan visualizar mejor los casos observados), la **búsqueda de regularidades o analogías** (es decir, de aspectos coincidentes entre dichos casos) y la

consiguiente **generalización**, que lo lleva a esbozar una conjetura, es decir, una afirmación meramente tentativa, indicada por unas instancias particulares. En esa búsqueda de regularidades, según Polya, es usual que se falle en los primeros intentos (ante el hallazgo de algún contraejemplo que refute a la conjetura). La posición de Lakatos en este sentido es algo diferente a la de Polya, ya que Lakatos sostiene que las conjeturas no son inductivas, sino que se obtienen por un **proceso de ensayo y error, a partir de numerosas ideas o conjeturas ingenuas que el matemático tiene en mente cuando enfrenta el problema, y que van siendo refutadas rápidamente una tras otra, hasta obtener esta conjetura a la que el llama "primitiva".** En realidad creemos que estas posturas no son totalmente incompatibles, en el sentido de que si bien el matemático cuenta con ciertas ideas o conjeturas ingenuas en mente, tal como lo indica Lakatos, muchas veces con el fin de corroborarlas o refutarlas, comienza a realizar observaciones, que muchas veces lo llevan a hallar nuevas regularidades no contempladas quizás en sus conjeturas originales y que dan lugar a esta conjetura primitiva.

Una vez que el matemático dispone de una conjetura primitiva que parece "bastante plausible", en el sentido de que al menos parece verificarse en todos los casos observados hasta el momento, intentará testearla, sometiéndola a nuevas instancias de **contrastación.** Dicha contrastación puede ser realizada de diferentes maneras y con distintos grados de profundidad.

Una manera de contrastar la conjetura es a través de la **verificación de consecuencias de la misma.** Se trata de dar con una afirmación que se deduce de dicha conjetura. Si tal afirmación resulta falsa, entonces por un razonamiento puramente deductivo es posible concluir que la conjetura original es falsa también. Pero si dicha afirmación resulta verdadera, la conjetura original resultará más creíble, más plausible. Una consecuencia podría ser el cumplimiento de la conjetura en **un nuevo caso particular aislado** diferente a los que han sido considerados previamente (con lo cual estaríamos realizando una nueva **especialización**).

Podemos también realizar **algún tipo de verificación que nos permita corroborar la validez de la conjetura para toda una serie de casos**, es decir para un subconjunto de aquel que consideramos como el dominio de validez de la conjetura considerada. Inclusive podemos someterla a algún tipo de **"experimento mental o argumento aproximado"** del tipo del que presenta Lakatos (1978) para el caso de la conjetura de Euler sobre poliedros. La característica fundamental de estos experimentos mentales radica en que descomponen la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas que abren nuevas instancias de contrastación. En estos experimentos mentales, basados en el método de Pappus, se parte de la conjetura y se van sacando consecuencias de ella. Si finalmente se llega a una consecuencia verdadera, esto hará a nuestra conjetura más creíble.

Aunque la forma más usual de contrastación de una conjetura es la verificación de consecuencias, también es posible contrastarla de otras maneras. Por ejemplo, **a través del examen de un posible motivo de la misma.** Esto radica en hallar una afirmación de la cual se deduce dicha conjetura. Si tal afirmación resulta verdadera, por razonamiento deductivo es posible concluir que la conjetura original también lo será. Pero si podemos comprobar que dicha afirmación es falsa, esto disminuirá la confianza en la conjetura.

También es posible contrastar la conjetura **a través del examen de una conjetura rival incompatible**, es decir del análisis de otra conjetura que no puede ser verdadera al mismo tiempo que la conjetura original. Si probamos que esta nueva afirmación es falsa, esto contribuirá a fortalecer la confianza en la conjetura original.

Otra manera de contrastarla es **a través del examen de una conjetura análoga**, esto es si se puede entrever y clarificar una analogía entre nuestra conjetura original y otra conjetura, y se puede probar que esta última es verdadera, entonces nuestra confianza en la conjetura original se verá acrecentada.

Así como cada nueva verificación de nuestra conjetura fortalece nuestra confianza en ella, el hallazgo de un caso particular que no verifique la conjetura (contraejemplo) puede llevarnos a revisar la misma y a tratar de **reformularla.** Los contraejemplos, que pueden ser globales (si refutan a la conjetura original) o locales (si refutan alguno de los lemas en el caso de que estemos ante un experimento mental contrastador como el propuesto por Lakatos), nos pueden llevar a tratar de reformular nuestra conjetura de diversas maneras:

- **Mediante una redefinición de los términos que en ella intervienen** (se trata de eliminar cualquier contraejemplo de la conjetura original mediante redefiniciones convenientes de los términos involucrados)
- **Mediante la reinterpretación del contraejemplo** (esto es, realizando un minucioso análisis del contraejemplo para ver que, en realidad, corresponde a una mala interpretación del mismo)
- **Mediante una restricción de su dominio de validez**, de modo que la conjetura sea válida en el dominio restringido que excluye los contraejemplos hallados.
- O **mediante la identificación del lema (explícito o implícito en la prueba) que es refutado por el contraejemplo y su incorporación a la conjetura como condición.** A través de este "Método de Incorporación de lemas", como lo denomina Lakatos, se mejora la conjetura a partir de la prueba.

En síntesis, hemos considerado los siguientes procedimientos:

- Observación (de casos particulares o ejemplos)
- Sistematización de los casos observados
- Búsqueda de regularidades o analogías.
- Generalización.

Ensayo y error a partir de conjeturas ingenuas que van siendo refutadas rápidamente una tras otra.

CONJETURA PRIMITIVA

- Contrastación de la conjetura primitiva, a través de:
  - examen de consecuencias: comprobación de la validez de la conjetura en un nuevo caso particular aislado, en un conjunto de casos, experimento mental contrastador.
  - examen de un posible motivo
  - examen de una conjetura rival incompatible
  - examen de una conjetura análoga.
- Reformulación de la conjetura a partir del hallazgo de contraejemplos globales (que refutan la conjetura) o locales (que refutan alguno de los lemas)
  - mediante redefiniciones de los términos que en ella intervienen
  - mediante la reinterpretación del contraejemplo.
  - mediante una restricción del dominio de validez de la conjetura
  - mediante la identificación del lema (explícito o implícito en la prueba) que es refutado por el contraejemplo y su incorporación a la conjetura como condición.

➢ **Definiciones**

Incluimos aquí aquellas definiciones que, de algún modo, están vinculadas a nuestro objeto, entre otras las de:

- **razonamiento plausible**
- **conjetura**
- **inducción**
- **analogía**

- **generalización**
- **especialización**
- **contraejemplo** (considerado este en su aspecto de disparador para la reformulación de una conjetura)

➢ **Argumentaciones**

Dentro de las argumentaciones, incluimos ciertos patrones de inferencia plausible identificados por Polya. Estas son reglas que muestran condiciones para hacer más o menos creíble una conjetura.

- El patrón inductivo fundamental expresa que "la verificación de una consecuencia hace a la conjetura más creíble", es decir:

Supongamos que A es una conjetura claramente formulada y que B es una consecuencia de A, esto es, A implica B. Si B resulta verdadera, esto evidentemente hará a nuestra conjetura más creíble, más plausible.

$$\frac{\begin{array}{c}A \rightarrow B \\ B\end{array}}{\text{A más creíble}}$$

Otros patrones que están relacionados con este expresan que:

- la verificación de una consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a cómo la nueva consecuencia difiere más o menos de las consecuencias anteriormente verificadas.

A implica B_{n+1}
B_{n+1} es **muy similar** de las consecuencias B_1, B_2, ..., B_n de A, formalmente verificadas.
<u>B_{n+1} es verdadera</u>
A **sólo un poco más creíble**

A implica B_{n+1}
B_{n+1} es **muy diferente** de las consecuencias B_1, B_2, ..., B_n de A, formalmente verificadas.
<u>B_{n+1} es verdadera</u>
A **mucho más creíble**

- La verificación de una consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a si la consecuencia es más o menos improbable en sí misma.

A implica B	A implica B
B muy improbable en sí mismo	B bastante probable en sí mismo
<u>B verdadero</u>	<u>B verdadero</u>
mucho más creíble	A **sólo un poco más** creíble

- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede disminuir cuando un posible fundamento de la misma es refutado.

Es decir, si tenemos una conjetura A, y B es un posible motivo o fundamento de la misma, es decir, B implica A. Si llegamos a probar que B es falsa, podremos concluir que nuestra conjetura es menos creíble.

$$\frac{\begin{array}{c}B \rightarrow A \\ \neg B\end{array}}{\text{A menos creíble}}$$

- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede aumentar cuando una conjetura rival incompatible es refutada.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{A incompatible con B} \\ \text{B falsa}\end{array}}{\text{A más creíble}}$$

- Una conjetura es más creíble cuando una conjetura análoga es verdadera.

A análoga a B
B verdadera
A más creíble

Como se puede observar, las conclusiones de estos patrones están marcando dos aspectos: una dirección (es más creíble o es menos creíble) y una magnitud (es mucho más creíble o sólo un poco más creíble).

➢ **Propiedades** del razonamiento plausible:
- El razonamiento plausible es azaroso, provisional y controversial.
- Tiene normas fluidas y no hay una teoría clara y consensuada del mismo.
- Sus patrones de inferencia, considerados en uno de sus aspectos (la dirección) pueden ser considerados impersonales (ya que no dependen de la persona que realiza la inferencia), universales (ya que tampoco depende del contenido) y hasta autosuficientes en cierta forma (porque no necesitan de nada fuera de las premisas para llegar a esa conclusión), pero de ningún modo definitivos. Al considerar el otro aspecto (la magnitud) dejan de ser también impersonales, universales y autosuficientes.

De este modo, hemos avanzado en la construcción de un primer significado de referencia institucional que da cuenta de la complejidad de este objeto, y hemos generado un instrumento de control que hace más operativo el análisis del significado del razonamiento plausible en las instituciones de enseñanza.

3. CARACTERIZACIÓN DE ELEMENTOS DE SIGNIFICADO VINCULADOS AL RAZONAMIENTO PLAUSIBLE EN LAS INSTITUCIONES DE ENSEÑANZA

En base a este significado de referencia, nos abocamos al análisis de lo que ocurre con el razonamiento plausible en las instituciones de enseñanza de nivel medio. Para ello nos remitimos en primer lugar al currículo, más precisamente a los Contenidos Básicos Comunes de la Educación General Básica y al bloque 7, correspondiente a los “Procedimientos relacionados al quehacer matemático”.

Las conclusiones de este análisis son las siguientes:
- No está contemplado un estudio sistemático del razonamiento plausible. No hay ninguna referencia explícita al mismo sino que se pone énfasis en un aspecto particular: el razonamiento inductivo, la inducción.
- Se dan algunas pautas que apuntan a la formación de dicho tipo de razonamiento, a saber: la comparación de conceptos o relaciones, la búsqueda de regularidades en un conjunto de datos (hechos, formas, números, expresiones algebraicas, gráficos, etc.) y la formulación de generalizaciones en base a la experiencia o a la intuición. Aunque tales procedimientos, como se ha visto en nuestro marco de referencia no son los únicos vinculados al razonamiento plausible.
- No se hace referencia alguna a los tipos de situaciones que deberían plantearse a fin de desencadenar tales procedimientos ni se plantea la necesidad de que aparezcan y se institucionalicen algunos de los patrones de este tipo de razonamiento.
- Se hace énfasis en los diferentes roles que el razonamiento inductivo y el deductivo juegan en la matemática: el primero como punto de partida y el segundo como necesario para demostrar la verdad de las proposiciones matemáticas, aunque está ausente la relación dialéctica que existe entre ambos.
- Se hace hincapié en que los alumnos puedan usar y establecer las diferencias entre las

distintas formas de verificación.
Luego de este análisis, nos remitimos a los textos correspondientes al tercer ciclo de la E.G.B. Debemos aclarar que centramos nuestro análisis en el tercer ciclo, ya que es en esta etapa en donde se detectó nuestro problema original y en donde estamos convencidos debe jugar un rol fundamental la formulación de conjeturas, tal como lo corroboran también numerosas investigaciones cono las de Larios Osorio (2000), Godino y Recio (1997), Saenz Castro (2001), entre otras.
Si bien el razonamiento plausible pertenece más a la esfera personal del conocimiento, creemos que es posible encontrar trazas o indicios (elementos de significado) correspondientes a este tipo de razonamiento en los textos. Con el fin de detectar estos elementos, realizamos dos etapas de análisis.
En la primera etapa tratamos de hallar referencias explícitas al razonamiento plausible en los índices de los textos, que nos guiaran al hallazgo de elementos de significados vinculados al mismo. Para ello realizamos el relevamiento de los índices de veintiún textos, de 7º, 8º y 9º año de la E.G.B., correspondientes a siete editoriales, en busca de referencias explícitas al razonamiento plausible o a alguno de sus elementos, o a algún elemento relacionado (conjeturas, verificaciones, demostración, resolución de problemas, etc). En el caso de encontrar en el índice alguna de estas referencias, nos remitimos a las páginas correspondientes, y analizamos las mismas tratando de hallar elementos de significado vinculados al razonamiento plausible.
Para sintetizar el análisis de esta primera etapa se construyó la siguiente tabla:

TEXTO	ELEMENTOS DE SIGNIFICADO HALLADOS A PARTIR DE REFERENCIAS EXPLÍCITAS EN EL ÍNDICE.
Aique – 7° año	No se hallaron.
Aique – 8° año	No se hallaron.
Aique – 9° año	No se hallaron.
Pto.de Palos - 7° año	No se hallaron.
Pto.de Palos - 8° año	No se hallaron.
Pto.de Palos - 9° año	No se hallaron.
AZ – 7° año	No se hallaron.
AZ – 8° año	PROCEDIMIENTO de verificación de una propiedad en casos particulares (y referencias que apuntan a la distinción entre este procedimiento y la demostración). DEFINICIÓN de conjetura. ARGUMENTACIÓN referencia que tiene que ver con el patrón inductivo fundamental DEFINICIÓN de contraejemplo, aunque ligada a lo deductivo PROCEDIMIENTO: referencia que tiene que ver con la analogía
AZ – 9° año	TAREA que apunta a caracterizar el procedimiento de verificación de una propiedad en casos particulares y a diferenciar el mismo de la demostración. DEFINICIÓN de contraejemplo
Comunicarte – 7°año	No se hallaron.
Comunicarte – 8°año	No se hallaron.
Comunicarte – 9°año	No se hallaron.
Santillana – 7°año	No se hallaron.
Santillana – 8° año	No se hallaron.
Santillana – 9° año	No se hallaron.
Kapelusz – 7°año	No se hallaron.

Kapelusz – 8°año	(Referencias históricas acerca del papel de la experimentación en la matemática) TAREA que involucra la observación en casos particulares y la búsqueda de regularidades. (Referencias que apuntan a poner de manifiesto la diferencia entre la verificación y la demostración) TAREAS que involucran la verificación de una propiedad en casos particulares.
Kapelusz – 9°año	No se hallaron.
Estrada – 7°año	No se hallaron.
Estrada – 8°año	PROCEDIMIENTO de observación en casos particulares. PROCEDIMIENTO de detección de regularidades. (Referencias al papel que estos procedimientos juegan en la Matemática y en las Ciencias Naturales) DEFINICIÓN de conjetura. DEFINICIÓN de razonamiento inductivo. (Referencias que apuntan a la distinción entre conjetura y teorema) PROPIEDAD del razonamiento inductivo: sugiere lo que puede llegar a ser verdadero (es provisional). (Referencias que apuntan a la distinción entre razonamiento inductivo y deductivo). TAREAS que involucran la observación de casos particulares (previos al enunciado de la conjetura), la detección de regularidades y la formulación de conjeturas. DEFINICIÓN de contraejemplo (TAREAS que contribuyen a fijar o recordar algunos elementos discursivos tales como la definición de inducción, de conjetura y de contraejemplo, y a reforzar la distinción entre la inducción y la deducción, y por ende, entre razonamiento plausible y deductivo).
Estrada – 9°año	No se hallaron.

Como puede notarse en el cuadro, los únicos procedimientos explicitados son la observación de casos particulares (previos al enunciado de la propiedad), la búsqueda de regularidades y la contrastación de la propiedad o conjetura a través de la verificación en casos particulares aislados. No se hallaron referencias explícitas a los procedimientos de generalización, o de otras formas de contrastación de conjeturas o de reformulación de la conjetura en base al hallazgo de contraejemplos.
En cuanto a las situaciones, hallamos algunas tareas que involucran la observación de casos particulares (previos al enunciado de la conjetura o propiedad), la búsqueda de regularidades y la verificación en casos particulares aislados. No hay tareas que propongan la contrastación de una propiedad de un modo diferente, ya sea a través de alguna comprobación que sirva para un conjunto de casos o alguna prueba o experimento mental contrastador. Tampoco hay tareas que involucren la reformulación de una propiedad o conjetura en base al hallazgo de contraejemplos. Hay unas pocas tareas que involucran la elaboración de una conjetura, pero en casi todas ellas se les dice a los alumnos lo que tienen que hacer: observar ciertos casos particulares y detectar una regularidad, la cual surge casi de manera obvia. No hemos hallado, por otra parte, ningún problema en el cual se vea la necesidad o la utilidad de recurrir a un caso particular, a un caso más general o a un problema análogo para su resolución.
En cuanto a los elementos discursivos, hallamos definiciones de conjetura y, sólo en un caso, definición de razonamiento inductivo. También hallamos definiciones de contraejemplo

(aunque en casi todos los casos asociada a lo deductivo). Sólo en un caso se halló una referencia a una propiedad del razonamiento inductivo, y también sólo en un caso encontramos una referencia ligada al patrón inductivo fundamental.
Como conclusiones de esta primera etapa de análisis, podemos decir que:
- Ninguno de los textos apunta a un estudio sistemático del razonamiento plausible como objeto en sí mismo.
- Sólo aparecen, en el mejor de los casos, algunos elementos de significado aislados. Sin embargo, y de acuerdo con nuestro marco de referencia, hay muchos elementos de significado que están ausentes.
- Se nota una preocupación por distinguir entre "verificación en casos particulares" y "demostración", entre razonamiento inductivo y deductivo, entre conjetura y teorema. Sin embargo, se ignora la relación dialéctica que existe entre ambos tipos de razonamiento.
Si bien esta forma de análisis es una puerta de entrada para detectar indicios de razonamiento plausible en los textos, somos concientes de que no es la única posible. Es por ello que abordamos otro tipo de análisis que nos posibilitó ponernos en contacto con dichos elementos y que nos brindó nuevos aportes para nuestra investigación.
En esta segunda etapa de análisis, la idea fue determinar la presencia del razonamiento plausible en el abordaje que hacen los textos de determinados temas del currículo que tienen en sí mismo un gran potencial para el desarrollo del razonamiento conjetural. Para ello seleccionamos un tema que corresponde a los C.B.C. del tercer ciclo la E.G.B., el teorema de Euler, en cuyo abordaje sería esperable o deseable que se ponga en funcionamiento este tipo de razonamiento, tal como se pone de manifiesto el análisis que realizan Polya y Lakatos y que fue retomado en la construcción de nuestro significado de referencia. Este tema es abordado por 6 de las editoriales consideradas en la primera etapa de análisis, en sus textos correspondientes a 7º u 8º año. Analizamos también un texto de editorial española, por las características que presenta. En cada caso analizamos el abordaje que hace el texto del tema, tratando de identificar elementos de significado correspondientes a nuestro objeto.
Si bien cada texto hace un abordaje diferente, se pueden distinguir dos "tipos" de abordaje:
En la mayoría de los textos (2, 3, 4 y 6) se presenta a los alumnos el enunciado del Teorema de Euler, y se les presenta a continuación una tarea para verificar el cumplimiento en algún caso particular aislado, que el mismo texto propone y en el cual, generalmente la propiedad vale. Es decir, no hay una instancia de elaboración de la conjetura. Sólo hay una tarea que involucra la verificación de la propiedad en casos particulares aislados. Es más, ni siquiera hay una referencia que apunte a poner de manifiesto que tal verificación contribuye a fortalecer nuestra confianza en la propiedad enunciada.
En los otros dos textos (1 y 5), el abordaje es algo diferente, por cuanto se les da al principio una tarea en la que se les pide completar un cuadro en cuya primer columna aparecen una serie de poliedros, y las demás aparecen encabezadas por N° de caras, N° de vértices, N° de aristas y en la última columna C-A+V. Este tipo de tarea involucra la observación de casos particulares (previos al enunciado de la propiedad) pero ningún otro procedimiento ya que no necesitan hallar una manera de sistematizar los datos, ni buscar regularidades (ya que la misma es obvia en el cuadro) ni realizar ninguna generalización, ya que a continuación del cuadro aparece el enunciado del Teorema. A continuación se les presenta otra tarea que involucra la verificación de la propiedad en nuevos casos.
En el texto español, sin embargo, notamos algunas diferencias en el abordaje: de entrada se plantea una situación de elaboración de una relación general (se pide investigar la relación que existe entre el N° de caras, de aristas y de vértices de un poliedro), y se dan ciertas subtareas, que involucran la observación de casos particulares previos, la búsqueda de regularidades o analogías, la contrastación de la conjetura mediante el examen de consecuencias y la generalización.

Como consecuencias de este análisis podemos decir que:
- En la mayoría de los textos analizados no se aprovecha el potencial del tema para poner en funcionamiento en el alumno los procedimientos y patrones vinculados al razonamiento plausible, ya que, en general, no se plantea la elaboración de conjeturas.
- Aparecen ciertas tareas que involucran fundamentalmente la verificación de la propiedad en casos particulares aislados (que en la mayoría de los casos son proporcionados por el texto) y, en menor medida, la observación de casos particulares (aunque esta no está orientada a la elaboración de la conjetura).
- En ningún texto hay elementos discursivos.- No se distingue entre conjetura y teorema, menos aún entre los procedimientos que permiten formular y contrastar una conjetura, y el razonamiento que le daría a la misma el status de teorema, es decir no hay diferenciación entre razonamiento plausible y deductivo, ni entre distintas formas de argumentación. Como se puede apreciar, el análisis de los textos realizado muestra importantes restricciones en los elementos de significado vinculados al razonamiento plausible en los libros de texto respecto de los consignados en nuestro marco de referencia, tal como lo planteábamos más arriba.

4. CONCLUSIONES

A través de este trabajo hemos intentado plasmar algunos resultados de nuestro trabajo de investigación acerca del razonamiento plausible, pero fundamentalmente quisimos poner de manifiesto dos aspectos de vital importancia, y que consideramos que pueden aportar a otras investigaciones en Didáctica de la Matemática.
En primer lugar, queremos destacar la importancia de contar con un marco teórico adecuado que nos permitió abordar nuestro objeto de investigación de una manera sistematizada y coherente.
En segundo lugar, queremos remarcar la importancia que reviste la construcción de un significado de referencia institucional acerca de nuestro objeto de investigación, que permite desnaturalizar dicho objeto y apreciarlo en toda su complejidad. Este marco de referencia, como se ha visto, es indispensable para abordar cualquier análisis de textos, permitiéndonos, en nuestro caso, poner de manifiesto importantes restricciones en los elementos de significado vinculados a nuestro objeto. Por otra parte, aporta el abanico de situaciones, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentaciones, en base a las cuales se podrían delimitar y seleccionar aquellos elementos que deberían formar parte de un significado del razonamiento plausible adecuado para el nivel medio, que de cuenta de la complejidad de este objeto y que permitan superar las restricciones observadas en el currículo y en los libros de texto. Aunque sólo el posterior análisis cognitivo e instruccional podrá fijar dicho significado y determinar las características que tendrán que tener las situaciones que se presenten a fin de garantizar la puesta en funcionamiento y explicitación de los procedimientos y patrones que formen parte de ese significado, y de dar lugar a su institucionalización, de manera tal de superar la problemática planteada en la introducción de este trabajo.

REFERENCIAS

ANDRÉS, M., DE ELIZONDO, M.C.L. 2002. *Matemática 7.*(Santillana, Bs. As.).
ARAGÓN, M. Y OTROS. 2003. *Matemática 7.*Serie Entender. (A.Estrada y cía S.A.,Bs. As.)
ARAGÓN, M. Y OTROS. 2003. *Matemática 8.*Serie Entender. (A.Estrada y cía S.A.,Bs. As.)
ARAGÓN, M. Y OTROS. 2003. *Matemática 9.*Serie Entender. (A.Estrada y cía S.A., Bs.As.)
CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. Y GASCÓN, J. 1997. *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. (Horsori, Barcelona).

COLERA / GARCIA / GAZETU / DE GUZMAN / OLIVEIRA. 1995. *4ª Matemática* (Grupo Anaya, España)
FERNÁNDEZ MORENO/ OTTOLENGHI VITERBI. 2001.*Matemática 9* (Kapelusz, Bs.As.)
GARAVENTA, L. Y OTROS. 2003 .*Carpeta de Matemática 7* (Aique Grupo Editor, Bs. As.)
GARAVENTA, L. Y OTROS. 2003. *Carpeta de Matemática 8* (Aique Grupo Editor, Bs. As.)
GARAVENTA, L. Y OTROS. 2003. *Carpeta de Matemática 9* (Aique Grupo Editor, Bs. As.)
GASCÓN, J. 2000. *El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la didáctica de las Matemáticas*. Trabajo realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT.
GODINO, J.D. 2003. Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet. URL: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf
GODINO, J.D. Y RECIO, A.M. 1997. Meanings of proofs en mathematics education. En *E. Pehkonen (Ed.), Proceedings of the 21th. International conference of PME. Lahti, Finland, Vol 2 pp.313-321.*
FERRARIS / TASSO. 2003. *Aprendamos Matemática 7*. (Comunic. arte Editorial, Córdoba).
FERRARIS / TASSO. 2004. *Aprendamos Matemática 8*. (Comunic. arte Editorial, Córdoba).
FERRARIS / TASSO. 2004. *Aprendamos Matemática 9*. (Comunic. arte Editorial, Córdoba).
ILLUZZI / MENÉNDEZ. 2001. *Matemática 8.* (Kapelusz editora S.A, Bs. As.).
KACZOR, P Y MACHIUNAS, M. 2002. *Matemática 8*. (Santillana, Bs. As.)
KLINE, M. 1973. *El fracaso de la matemática moderna*. (Siglo veintiuno, Madrid, 1990).
LAKATOS, I. 1978. *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. (Alianza Editorial, Madrid).
LARIOS OSORIO, V. 2000. Las conjeturas en los procesos de validación matemática. Un estudio sobre su papel en los procesos relacionados con la Educación matemática. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Querétaro. México.
LAURITO Y OTROS. 2001. *Matemática 7*. (Puerto de Palos, Bs. As.).
LAURITO Y OTROS. 2001. *Matemática 8*. Bs. As. (Puerto de Palos, Bs. As.).
LAURITO Y OTROS. 2001 *Matemática 9*. Bs. As. (Puerto de Palos, Bs. As.).
LOPEZ / PELLET. 2000. *Matemática en Red 7*. Serie de Tramas. (AZ Editora S.A., Bs. As.)
LOPEZ / PELLET. 2000. *Matemática en Red 8*. Serie de tramas. (AZ Editora S.A., Bs. As.)
LOPEZ / PELLET. 2001. *Matemática en Red 9*. Serie de tramas. (AZ Editora S.A., Bs. As.)
MASSAD DE TROIANO/ ANDRADE DE BURRIEZA. 2001. *Matemática 7* (Kapelusz,Bs.As.)
MARKIEWICZ, M. E. 2005. El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.
MARKIEWICZ, M.E. 2006. Algunas preguntas de investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural En *Actas del Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Jaén. España. Disponible en Internet.URL: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/MEMarkiewics_Razonamiento_ plausible .pdf
MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN – Consejo Federal de Cultura y Educación. República Argentina. 1995. *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica.*
POINCARÉ, H. 1902. *La ciencia y la hipótesis*. (Espasa- Calpe, Madrid, 1963).
PIÑEIRO, G. Y SERRANO, G. 2002. *Matemática 9* (Santillana, Bs. As.).
POLYA, G.1954.*Mathematics and Plausible Reasoning*. (Princeton University Press, N.J.)
SÁENZ CASTRO, C. 2001. Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas. En Documentos de Trabajo de las Ponencias e Informes de Investigación – V Simposio–Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática – Almería (España).