C221-25

LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES Y LA CONDICIÓN DE UNIVALENCIA

Patricia DETZEL

Universidad Nacional del Comahue - Argentina
pdetzel@uncoma.edu.ar

Nivel Educativo: Nivel Medio

RESUMEN

En este trabajo nuestro interés se centra en la enseñanza de la noción de función, en el nivel medio. Nos interesa dilucidar qué aspectos de las funciones: variabilidad, dependencia, correspondencia y univalencia, se ponen en evidencia, cuáles se desdibujan en su enseñanza.
Un estudio histórico- epistemológico de diferentes aspectos de la función como la noción de variable, la dependencia, la correspondencia arbitraria y la condición de univalencia nos muestra que *la función* surge en un principio como un instrumento dentro de situaciones específicas y aparece ligada a las ideas de variación y dependencia tanto en las definiciones como en las aplicaciones. Sin embargo, en la enseñanza, observamos que el aspecto univalente de esta noción es el que toma un lugar privilegiado.
Como marco teórico de referencia consideramos las teorías existentes en la Didáctica de la Matemática francesa, en particular la 'teoría de las situaciones didácticas' de G. Brousseau y el 'enfoque antropológico' de Y. Chevallard. También recurrimos a algunos trabajos de Educación Matemática, como los de Schoenfeld y Confrey.
Se trata de una investigación cualitativa en la cual pretendemos encarar las cuestiones planteadas desde líneas de investigación representadas por los autores mencionados. Como procedimiento de recolección de datos utilizamos 'la observación' de clases. Estas se realizaron en clases de matemática de 3º ciclo de E.G.B. y/o 2º año del nivel medio de Río Negro y Neuquén (alumnos de 14 - 15 años de edad).

INTRODUCCIÓN

En este trabajo nuestro interés se centra en la enseñanza de la noción de función, en el nivel medio, más precisamente en cómo se presentan las funciones en las clases de matemática para alumnos de 14 –15 años.
Como marco teórico de referencia consideramos las teorías existentes en la Didáctica de la Matemática francesa, en particular la 'teoría de las situaciones didácticas' de G. Brousseau y el 'enfoque antropológico' de Y. Chevallard. También recurrimos a algunos trabajos de Educación Matemática, como los de Schoenfeld y Confrey.
Ruiz Huigueras (1993) plantea que los sucesivos cambios que sufrió el concepto de función a través de las diferentes etapas en la historia, desde su origen hasta su última generalización, han hecho que los atributos que tenían las definiciones clásicas como los de variación, de la variable como parámetro temporal, de dependencia, se perdieran, dejando de lado las características que tenían la mayoría de los problemas que generaron la necesidad del concepto de función. Brousseau (1983) plantea la importancia de conocer ejemplos del

funcionamiento del concepto en diversas situaciones a lo largo del tiempo y estudiar aquellas que dan sentido a las nociones en juego.
Un estudio histórico- epistemológico de diferentes aspectos de la función como la noción de variable, la dependencia, la correspondencia arbitraria y la condición de univalencia nos muestra que *la función* surge en un principio como un instrumento dentro de situaciones específicas y aparece ligada a las ideas de variación y dependencia tanto en las definiciones como en las aplicaciones. Sin embargo, en la enseñanza, observamos que el aspecto univalente de esta noción es el que toma un lugar privilegiado.

Objetivo
Nos interesa dilucidar qué aspectos de las funciones: variabilidad, dependencia, correspondencia y univalencia, se ponen en evidencia, cuáles se desdibujan en su enseñanza y cómo se relacionan con la resolución de problemas.

MÉTODO Y UNIVERSO DE INDAGACIÓN

Se trata de una investigación cualitativa en la cual pretendemos encarar las cuestiones planteadas desde líneas de investigación representadas por los autores mencionados. Como procedimiento de recolección de datos utilizamos ‘la observación’ de clases. Estas se realizaron en clases de matemática de 3º ciclo de E.G.B. y/o 2º año del nivel medio de Río Negro y Neuquén (alumnos de 14- 15 años de edad). Otras fuentes de datos, que amplían nuestro conocimiento acerca de las propuestas de enseñanza son planificaciones de los docentes y ‘Guías de trabajos prácticos’[1]que se entregaban a los alumnos.
En el análisis de las propuestas se consideró:
- entrada en escena de las funciones en las clases, es decir, la organización de los contenidos para introducir este tema,
- definiciones de *función* presentadas,
- ejemplos de funciones expuestos, aquellos que presenta al docente en la clase como representativo de las funciones, y
- tareas requeridas a los alumnos, es decir, qué tienen que hacer los alumnos para resolver las actividades que se les proponen.

En esta presentación sólo consideraremos una parte del análisis.

Concepto de función y atributos de las funciones
Los conceptos matemáticos de variable y función provienen de generalizaciones abstractas de variables concretas y de las relaciones entre ellas. De este modo, como reflejo de las propiedades generales del concepto de cambio, aparecen en la matemática los conceptos de magnitud, de variable y de función. Consideramos que en el concepto de función intervienen diferentes aspectos: noción de variable, dependencia entre cantidades, correspondencia arbitraria y la condición de univalencia.
La *dependencia* es un elemento importante en la noción de función. En este sentido, René de Cotret (1985) expresa que la idea de dependencia- íntimamente ligada a las de variación y de variable- conlleva la existencia de un vínculo (ligazón) entre cantidades. Un cambio en una de ellas provocará un cambio sobre las otras. En efecto, el modo de percibir que una cosa depende de otra es hacer variar una y constatar cuál es el efecto en la otra. Esto se conoce con el nombre de covariación o aspecto covariante de las funciones.
La *univalencia* aparece como un requisito explícito de la definición moderna de función. Nos

[1] En las Guías de trabajos prácticos’ están organizadas las actividades que los alumnos tienen que resolver. Generalmente los alumnos sacan fotocopias a esas hojas.

referimos a la condición de univalencia cuando en el caso de una función $y = f(x)$ se requiere que a cada valor de x le corresponda un único valor de y. Sin embargo, pareciera que más que un requisito, sería una característica de algunas funciones que se llaman *univalentes* o *uniformes*. Si hacemos un recorrido por la historia de las funciones, ya Euler en *Introductio* en 1748 distingue entre otros tipos de funciones, las funciones univalentes y multivalentes.
En Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1957), por ejemplo, se da una definición general de función:

> *'Se dice que una variable y es función de otra variable x, cuando a cada valor de x (dentro de un cierto conjunto X llamado campo de variación de x) corresponde un valor determinado de y (función uniforme) o varios valores de y (función multiforme[2])'.*

Así, por ejemplo, explican estos autores, la función $y = \pm\sqrt{x}$ definida cuando $x \geq 0$, para cada valor positivo de x corresponde no uno sino dos valores de y. Cuando a cada valor de x de un cierto conjunto corresponden varios valores de y, la función se llama *multiforme*; en caso contrario, la función se llama *uniforme.*
Se aclara que 'la restricción al estudio de las funciones uniformes, está justificada porque el estudio de las funciones multiformes se reduce al de las uniformes, considerando clasificados los valores de modo que formen varias funciones uniformes. Por ejemplo la función biforme $y = \pm\sqrt{x}$ puede descomponerse en funciones uniformes.'
Al respecto Even y Bruckheimer (1998) expresan que, interesantemente, una búsqueda entre algunos libros y artículos sobre la historia de la matemática no concluyó con una declaración explícita de por qué se requiere que las funciones sean univalentes. Excepcionalmente sobre esta consideración, agregan estos autores, es Freudenthal (1983) quien atribuye este requerimiento al deseo de los matemáticos de mantener las cosas 'manejables'. Es por ello, que de acuerdo con Freudenthal, el requerimiento de *univalencia* fue agregado a la definición de función.
La noción de *correspondencia* entre los elementos de dos conjuntos M y N es una relación primitiva. Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo (1957) plantean que una correspondencia está determinada cuando para cada elemento a del conjunto M se da un criterio para saber qué elemento $\varphi(a)$ tiene por correspondiente en N; dicha correspondencia recibe el nombre de *función*, cuyo campo de definición es el conjunto M; el conjunto N se supone contiene todos los valores funcionales $\varphi(a)$. La imagen $\varphi(a)$ se supone unívocamente determinada por a (es decir, cada a tiene una sola imagen $\varphi(a)$, pero en cambio dos elementos distintos a y b pueden tener la misma imagen $\varphi(a) = \varphi(b)$). La idea de función como correspondencia, bien definida pero arbitraria, $x \rightarrow f(x)$ entre números reales la podemos encontrar con Fourier. Este matemático en su *Teoría Analítica del Calor* en 1822 recalca la *arbitrariedad* de una función.
Presentamos, a continuación, parte del análisis de las propuestas de enseñanza, considerando ejemplos, definiciones y tareas, con la intención de mostrar el lugar que ocupa la univalencia en la enseñanza de funciones.

Enseñanza de funciones

En las propuestas de enseñanza analizadas encontramos dos definiciones de función según las nociones que involucran: una corresponde a una relación entre elementos de conjuntos y la otra a una relación entre variables. En ambas definiciones el énfasis está puesto en la condición de univalencia y en la correspondencia, ya sea entre elementos de conjuntos o entre valores de las variables. En la primera de las definiciones no hay referencia a la dependencia, mientras que en la segunda aparece una idea sugestiva en los términos 'variable dependiente' y 'variable independiente' mencionados.
La definición como relación entre elementos de conjuntos es la más frecuente y en algunos

[2] También se llaman funciones multivalentes, polivalentes

casos, es el resultado de una construcción teórica que responde a la lógica interna de la matemática. Este tratamiento de las funciones como relaciones entre elementos de conjuntos, conduce a la formación de una idea estática de las funciones. El énfasis está puesto en elementos de conjuntos que tienen correspondientes y no en el estudio de variaciones.

Notemos que la definición basada en la correspondencia, es una explicación informal y parece ser una noción *paramatemática*[3] en el sentido de Chevallard (1985), pues permite trabajar con el concepto.[4] Como ya lo planteamos anteriormente, la noción de función encuentra una definición con bases en la teoría de los conjuntos, *como conjunto de pares ordenados que cumplen determinadas condiciones*. Si consideramos que un par ordenado (x, y) es el conjunto $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, la definición es formalmente correcta, pero parece no ser apropiada para alumnos que se están iniciando en las minuciosidades del álgebra. En este sentido y en un contexto de enseñanza que pretende favorecer la resolución de problemas, nos preguntamos acerca de la conveniencia de estas definiciones propuestas, que si bien son más abarcativas del concepto, no muestran la idea de dependencia entre cantidades, como sí lo hace la antigua definición dada por Euler en sus *Institutiones calculi differentialis (*1755):

> *'Si unas cantidades dependen de otras de tal manera que sufren una variación cuando estas últimas varían, entonces se dice que las primeras son funciones de las segundas'.*

En la mayoría de las propuestas hay un espacio destinado para presentar algunas relaciones que no son funciones. Los contraejemplos son relaciones dadas en diagramas de Venn y en gráficos en ejes cartesianos que no cumplen con la univalencia o que tienen elementos del conjunto de partida sin imagen. Se 'muestra' cómo se manifiestan las condiciones de la definición de función, a partir del análisis de la cantidad de flechas que sale de cada elemento del conjunto de partida o con el 'test de la vertical'. En el análisis que se hace con estos ejemplos se pone de relieve la condición de univalencia de las funciones.

Los ejemplos son muy variados en las diferentes propuestas. En los últimos años hay una preferencia por las relaciones entre magnitudes, sin embargo éstas no se aprovechan para mostrar el aspecto dinámico de la función. Salvo una de las ocho propuestas, en el resto no se estudia la dependencia que puede existir entre las variables, se limitan a 'mostrar' cómo identificarlas, a partir de una función dada gráficamente o por fórmula. El dominio se presenta como los elementos del conjunto de partida que tienen imagen o correspondiente. Se indica cómo hallarlo en diagramas de Venn o a partir del gráfico de la función. Este tratamiento del dominio presenta limitaciones ante situaciones de relaciones funcionales que no están dadas en estas representaciones. En los problemas que involucran magnitudes, se pone de manifiesto la idea de dominio asociada a los posibles valores que puede tomar la variable independiente, y en este caso no alcanza con identificar cuáles son los elementos a considerar entre los dados, sino que será necesario inferir cuáles son todos los probables.

En una de las propuestas se plantea el siguiente ejemplo de funciones en el que los alumnos tienen que completar una tabla como se muestra a continuación:

l: lado	P: perímetro
1	
2	
3	
0,5	
1,5	

La tabla muestra la medida en cm. de los lados de cuadrados. Completarla con el valor del perímetro en cada caso. Realizar el gráfico cartesiano.

[3] Según Chevallard las nociones paramatemáticas son objetos de los cuales el docente toma conciencia, a los que da un nombre, en resumen objetos que entran en su *percepción didáctica*. (...) son nociones herramientas de la actividad matemática y son generalmente preconstruidas (por mostración) (...).

[4] Esta observación surge de una comunicación personal de H. Alagia

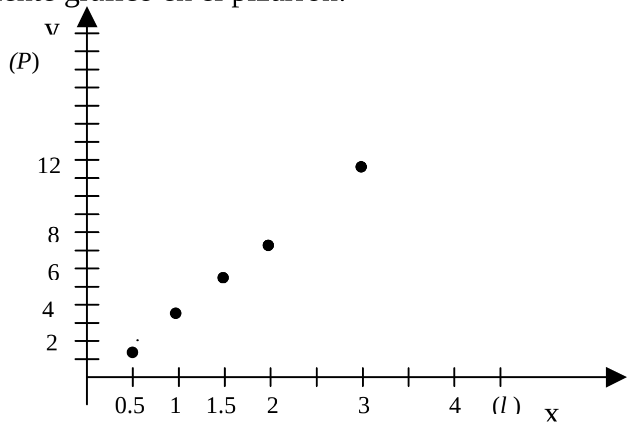
En este caso nos resulta interesante analizar el tratamiento que se hace con esta situación. Veamos con más detalle lo ocurrido en la clase.
El profesor explica cómo representar el gráfico cartesiano si tenemos en la tabla

1	4

tenemos (1, 4) ubicamos

en *x* en *y*

El profesor hace el siguiente gráfico en el pizarrón:



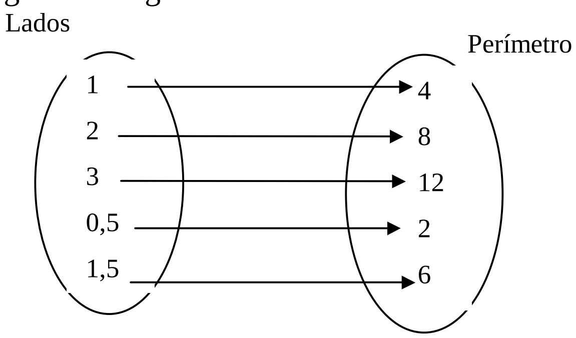
Se establece el siguiente diálogo en la clase:

P: Si tratamos de unir los puntos, si ponemos una regla y tratamos de unir, ¿Qué obtendríamos?
A: Una recta.
P: ¿Se pueden unir los puntos con una recta?
A: Sí.
P: Es cierto, todos los puntos están sobre una recta, además si tomo cualquier otro valor para el lado del cuadrado puedo obtener su perímetro. ¿Qué otro valor podríamos considerar, para buscar el perímetro?
A: lado de 4 y su perímetro es 16.
P: ¿El punto va a estar sobre la misma recta?
A: Sí, hay que continuarla.
P: Es cierto, el punto (4, 16) va a quedar sobre la misma recta. Busquemos para l = 2,5. Se puede dar cualquier valor al lado y saber cuál es su perímetro, aunque sea un valor decimal.

Hasta aquí se observa que se quiere mostrar que existe una regularidad, y eso entonces permite predecir, ese es un potencial que tienen las funciones. Pero al docente más que resaltar estas virtudes le interesa mostrar que todos los elementos del primer conjunto están relacionados y que a cada uno le corresponde un sólo valor, para ello propone realizar un diagrama de Venn.
El profesor pregunta ¿si hiciéramos el diagrama de Venn?

P: ¿Qué pongo en el primer conjunto?
A: Lados.
P: ¿Qué pongo en el segundo?
A: Perímetro.

Realiza en el pizarrón el siguiente diagrama:



P: Todos los elementos del primer conjunto tienen imagen. Si tomo el lado L =1, ¿puedo tener otro perímetro que no sea 4?

A: No.

P: Todo valor del lado tiene un sólo resultado que es su perímetro, tiene una imagen y es única. Todos tienen que tener su correspondiente y éste es único, cada valor tiene una imagen y ésta es única. Una función es una relación particular. Ya vimos algunas relaciones que no eran funciones. Yo puedo escribir P = 4.L

Luego dicta la definición de función.

El tratamiento de la variabilidad, de la dependencia, de la regularidad y la posibilidad de inferir y de predecir queda en un segundo plano ante la decisión de poner en evidencia el modo en que se relacionan los elementos del dominio y la imagen a través de las flechas. Así, por ejemplo, el dominio de la función se desdibuja, ¿cómo se deduciría el dominio de la función?, según la definición dada en clase, son los elementos del conjunto de partida que están relacionados, con lo cual se deduciría que el dominio en este caso es {1; 2; 3; 0,5; 1,5} y no los posibles valores que puede tomar *L*, donde *L* corresponde a valores de lados de cuadrados.

Con la elección de la propuesta de enseñanza, el docente privilegia la noción de univalencia; esto explica el uso de diagramas de Venn. Pero en cambio, se desdibujan las nociones de variable y dominio. Puede visualizarse que todos los elementos del primer conjunto tienen imagen única, pero se pierden la escala, la medida y el orden establecido en los ejes: es decir se pierde el gráfico como elemento de control.

En cuanto a las tareas que se requieren, podemos observar que salvo en una , en el resto de las propuestas se plantea como actividad para que los alumnos resuelvan: ‘*analizar si las relaciones dadas son funciones’*, las relaciones están dadas en diferentes representaciones. En general se plantea inmediatamente después de presentar la definición de función.

Generalmente se propone, para dicho análisis, relaciones en distintas representaciones:

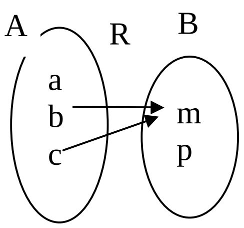


Fig.1

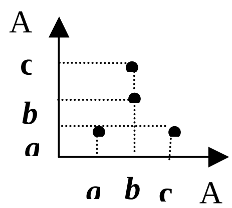


Fig.2

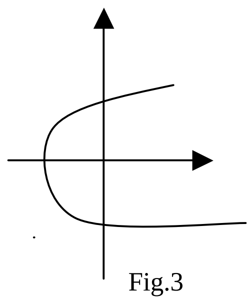


Fig.3

En el caso de las relaciones dadas en diagramas de Venn, se definen en conjuntos finitos de no más de cinco elementos: {a, b, c, d} ó {1, 2, 3, 4}. En gráfico cartesiano, se presentan las relaciones con una cantidad finita de elementos o con curvas. Cuando se definen en un conjunto finito es común que éste sea {a, b, c, d} como se muestra en la Fig.2.

Para resolver este tipo de ejercicios, cuando las relaciones están dadas en diagramas de Venn, el alumno evalúa la cantidad de flechas que sale de cada elemento del conjunto de partida, es decir, mira las flechas y controla que de cada elemento del conjunto de partida salga una y no más de una. Si esta cantidad de flechas es cero o más de una, dicha relación no es función. Para el caso de gráficos en ejes cartesianos los alumnos realizan el ‘test de la vertical’.

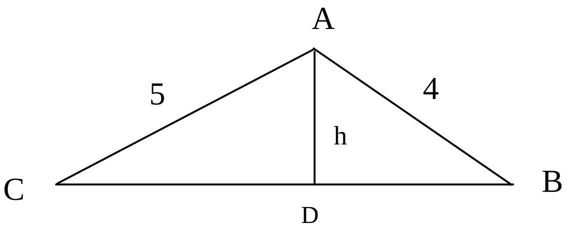
Con esta tarea se pretende poner en funcionamiento la definición de función, pero existe una alta probabilidad que los alumnos aprendan estas técnicas para resolver la actividad, independientemente de la comprensión de la definición de función. Es claro que en esta actividad se está privilegiando la correspondencia entre los elementos y la univalencia, pues ésta es una de las condiciones que se está exigiendo en la definición para ser función.

La condición de univalencia y la resolución de problemas

Nos interesa reflexionar sobre la condición de univalencia y la resolución de problemas.

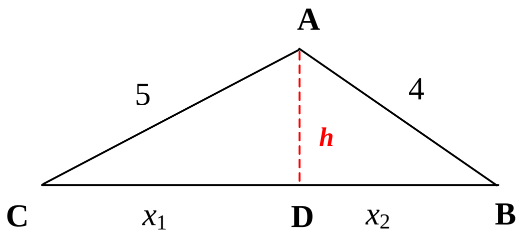
Pensamos que la condición de univalencia se activa para resolver cuestiones en las matemáticas avanzadas. Por ejemplo, cuando definimos funciones en demostraciones o para establecer una correspondencia entre elementos de diferentes conjuntos. En esos casos, después de definir una función, probamos que está ‘bien definida’, esto es que cada elemento tenga un único correspondiente.
Generalmente la resolución de un problema que se plantea para modelizar una situación que involucra una relación funcional, no conlleva la cuestión de indagar acerca de la univalencia de la relación.
El siguiente problema muestra que la falta de cumplimiento de la condición de univalencia en las funciones, no constituye una restricción importante en la resolución de problemas que involucran relaciones funcionales.

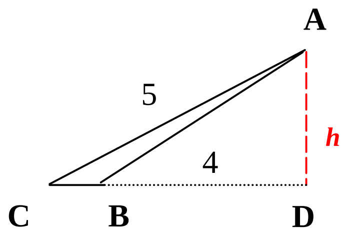
Problema[5]: del Área del triángulo y su altura



Dado un triángulo ABC donde AB y AC tienen 4 y 5 unidades de longitud (respectivamente), investigar el comportamiento del área del triángulo según cambie la altura AD. (D es la intersección de la altura con el lado BC).

Se puede observar que existen varios casos en los que para una altura determinada *h* tenemos dos triángulos posibles cuyos lados CA y BA sean de 5 y 4 unidades respectivamente:





Como consecuencia de esto a cada altura le corresponderán en general, dos valores diferentes de áreas.

Para el caso del primer triángulo: la base $b = x_1 + x_2$ donde $x_1 = \sqrt{25-h^2}$ y $x_2 = \sqrt{16-h^2}$

Es decir $b = \sqrt{16-h^2} + \sqrt{25-h^2}$. Luego el área es $A(h) = \left(\sqrt{16-h^2} + \sqrt{25-h^2}\right)\dfrac{h}{2}$

Para el caso del triángulo de la derecha: la base $b = \sqrt{25-h^2} - \sqrt{16-h^2}$. Luego el área es $A(h) = \left(\sqrt{25-h^2} - \sqrt{16-h^2}\right)\dfrac{h}{2}$

En este caso, como en otros hay dos triángulos correspondientes cuyas áreas no son iguales. En otras palabras, la función que asigna para cada altura, el área de su triángulo, es *bi-valuada:*

$$A(h) = (\sqrt{25-h^2} \pm \sqrt{16-h^2}).\frac{h}{2}.$$

La pregunta que se plantean Even y Bruckheimer (1998) y que compartimos es ¿debemos destituir esta ‘función’ sólo porque no está incluida en nuestra definición corriente? Esta situación es matemáticamente rica, conecta investigaciones en geometría con representaciones

[5] Problema expuesto en el artículo de Even, R y Bruckheimer, (1998), propuesto por Nurit Hadas, colega de estos autores

funcionales y pueden obtenerse resultados interesantes usando herramientas funcionales comunes. No hay una diferencia genuina, en la presentación del problema, en su proceso de solución, o en la presentación de resultados, entre situaciones problemáticas como esta y problemas que se resuelven con funciones de valuación simple.

CONCLUSIÓN

Hemos observado que la enseñanza del concepto de función está centrada en destacar sólo los elementos que aparecen en *la definición que se propone*. En estos casos son la correspondencia y la univalencia. En efecto, en todas las propuestas analizadas la función se define como una relación de correspondencia entre elementos de conjuntos arbitrarios o si no como correspondencia entre valores de variables. En las definiciones encontradas en las clases se requiere que ‘cada elemento del dominio tenga un *único* correspondiente’.

En las propuestas que analizamos, la *univalencia* de las funciones es una característica privilegiada, pues en la mayoría de ellas se proponen como contraejemplos funciones no univalentes y prácticamente en todas las propuestas aparece como ejercicio analizar si las relaciones dadas son funciones, en donde el objetivo es poner en evidencia la unicidad de la imagen de cada elemento del dominio.

Nos preguntamos ¿qué ocurre si se enseñan las funciones sin destacar la univalencia? ¿En qué entorpece que los alumnos piensen, por ejemplo, que una circunferencia es una función, si tienen algún dominio de las relaciones funcionales? Observamos que la falta de cumplimiento de la univalencia en relaciones no constituye una restricción importante en la resolución de problemas que involucran relaciones funcionales.

Si la enseñanza pretende favorecer la resolución de problemas se plantea la cuestión acerca de la conveniencia de estas definiciones que se manejan en las propuestas. Sugerimos que la definición es un condicionamiento en la enseñanza de este tema: existe cierta distancia entre los aspectos de las funciones que enfatizan estas definiciones y los más adaptados a la resolución de problemas, que son los que giran alrededor de la dependencia entre cantidades, como lo hace la definición dada por Euler.

BIBLIOGRAFÍA

ALAGIA H (1997), Panel Académico sobre Educación y Didáctica de la Matemática, Reunión UMA-REM (manuscrito).

ALAGIA H (1998), “El discurso matemático y la Reforma educativa ¿un tema para investigar?” Conferencia dictada en el VIENEM, Sao Leopoldo, Brasil. (manuscrito).

BROUSSEAU G (1986), “Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques”, *Recherches en Didactique des mathématiques,* Vol. 7/2, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, traducción publicada en *Trabajos de Matemática,* Serie B, N° 19, Argentina, 1993, I.M.A.F., U.N. de Córdoba.

BROUSSEAU G (1995), “Glossaire de didactique des mathématiques”, *Thèmes mathématiques pour la préparation du concours CRPE,* Copirilem, IREM d´Aquitaine, LADIST, Francia.

BROUSSEAU G (1998), *La Théorie des situations didactiques,* Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G (1996), “L´enseignement dans la théorie des situations didactiques”, en *Actes de l´école d´ete, VIIIº Ecole et Université d´ete de Didactique des Mathématiques,* édition coodonée par Noirfalise R. IREM de Clermont-Ferrand, Francia.

BROUSSEAU G (1999), “Educación y Didáctica de las matemáticas”, en *Educación Matemática*, México.

BURHARDT H y SCHOENFELD A (2003), “Improving Educational Research: Toward a More Useful, More Influential, and Better-Funded Enterprise” in *Educational Researcher,* Vol. 32 Nº 9.
CONFREY J y SMITH E (1994), “Exponential functions, rates of change and the multiplicative unit”, en *Educational Studies in Mathematics,* Nº 26, pp.135-164.
CONFREY J y SMITH E (1995), “Splitting, covariation and their role in the Development of exponential functions”, *Journal of Research in Mathematics Education*. Vol.26, 1, pp. 66-86.
CHEVALLARD Y (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* deuxiéme édition, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
CHEVALLARD Y (1989), “Le concept de rapport au savoir: rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel”, Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l’Informatique, Grenoble.
CHEVALLARD Y (1992), “Concepts fondamentaux de la Didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique” En J. Brun (Ed) *Didactique des Mathématiques* Genève : Delachaux et Niestlé, pp. 145-196.
DAHAN-DALMEDICO A, PEIFFER J (1986), *Une histoire des mathématiques,* Editions du Seuil, Paris, pp. 208-247.
DOUADY R (1986), “Jeux de cadres et dialectique outil-objet”, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.7-2, La Pensée Sauvage. pp 5-31
EVEN R, BRUCKHEIMER M (1998), “Univalence: a critical or non-critical characteristic of functions?”, *For the learning of mathematics Vol.18, Nº3,* Canada., pp.30-32.
EVEN R (1993), “Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge : prospective secondary teachers and the function concept ”, *Journal for Research in Mathematics Education, Vol 24, Nº 2*, pp.94-116.
FERNANDEZ A, DETZEL P y RUIZ M E (1997), **“**Enseñanza de funciones en el nivel medio”, en la revista de la Facultad de Economía y Administración, de la Univ. Nac. del Comahue. Año 4, Nº 1, Neuquen.
FREGONA D (1996), “¿Cuál es el lugar de la Didáctica de la Matemática en la formación de profesores?”, Conferencia en el marco del Primer Congreso Internacional de Formación de Profesores, Facultad de Formación Docente, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe.
GRATTAN-GINNESS (1984), Compilación. *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630 -1910. Una introducción histórica,* Alianza Editorial S.A. Madrid.
KLINE, M (1992), *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I, II y III,* Alianza Editorial S.A. Madrid.
RENE DE COTRET S (1985), *Etude historique de la notion de fonction: Analyse epistemologique et experimentation didactique,* Memoire de Maitrise en Mathematiques, Montreal Universite du Québec.
REY PASTOR, J, CALLEJA P, TREJO C (1957), *Análisis Matemático, Volumen I.* Editorial Kapeluz.
RUIZ HUIGERAS L (1993), *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico,* Tesis doctoral, Universidad de Granada.
RUIZ M E y DETZEL P (2000), “La enseñanza de las funciones, condicionamientos del docente, 1ª. parte."**,** en la revista *Novedades Educativas*, Año 12, Nº 116, pp. 58-59.
RUIZ M E y DETZEL P (2000), “La enseñanza de las funciones, condicionamientos del docente, Parte II."**,** en la revista *Novedades Educativas*, Año 12, Nº 117, pp. 61-62.
SCHOENFELD A (1992), “Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics”, in *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Ed.) Grouws, Macmillan, New York.
SCHOENFELD A (1991), “On Mathematics as sense-making: an informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics” en *Informal reasoning and*

education, pp. 311-343.
SIERPINSKA (1988), Epistemological remarks on functions, *Proceeding of the Twelfth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp.568-575) Vesprem, Hungary. (citado en Tall) .
SIERPINSKA (1992), Un understanding the notion of function, en Harel y Dubinsky (Ed), *The concept of function. Aspects of Epistemology and Pedagogy,* USA: Mathematical Associations of America, p. 25-58.
SMITH E, CONFREY J (1994), "Multiplicative structures and the development of logarithms: What was lost by the invention of function?" en *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, Ed. Guershon Harel and Jere Confrey. State University of New York Press.
TALL D (1992), The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Infinity, Limits and Proofs, *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Ed.) Grouws, Macmillan, New York. (en especial pp.497- 501.)
YOUSCHEVITCH A (1976), YOUSCHKEVITCH, A. P. (1976) "Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle", Traducción de Bellemin, J., Fragmentos d'histoire des Mathématiques, Broucheure APMEP, 41, pp. 7-68.