P452-4

AULA - TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO EXPERIENCIA PEDAGÓGICA FUERA DE CURRICULUM

Gloria MORETTO, Stella VAIRA

Departamento de Matemática - Facultad de Bioquímica y Ciencias Biológicas
Universidad Nacional del Litoral - Santa Fé - Argentina
gmoretto@fbcb.unl.edu.ar - svaira@fbcb.unl.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo se presenta la experiencia llevada a cabo con un grupo de alumnos de las carreras de Bioquímica y Lic. en Biotecnología durante el cursado de Análisis Matemático, segunda matemática de ambas carreras.
La misma se llevó a cabo para poner de manifiesto las bases y criterios que traían los alumnos respecto a las estrategias de resolución de problemas y se realizó como seminario tipo taller, consistente en resolver problemas de Matemática planteados con dificultades crecientes, para indagar las diferentes estrategias utilizadas por alumnos de primer año y la actitud frente a la propuesta planteada.

INTRODUCCIÓN

La matemática es, en el aula universitaria de carreras como Bioquímica y Licenciatura en Biotecnología, una materia en la que no es sencillo mantener la atención de los alumnos y por lo tanto enseñarla.
Es una disciplina que se estudia en todos los niveles educativos y en todos los países del mundo por considerarse un pilar básico en la formación del ser humano. Posiblemente, la causa fundamental de esa universal presencia hay que buscarla en que la matemática constituye un idioma poderoso, conciso y sin ambigüedades, según las formulaciones de matemáticos como L. Euler (1707-1783) y Cauchy (1789-1857). Se pretende que ese idioma sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo "hablen". En general esto no se consigue fácilmente y en muchos casos sólo se logra que los alumnos contemplen el uso que hacen sus docentes, y en otros se logra que lo apliquen a situaciones muy sencillas.
Una manera de lograr el aprendizaje de este lenguaje es hacerles resolver problemas, pues a través del planteo, resolución y elaboración de la respuesta se verá obligado al uso del mismo.
La enseñanza a través de la resolución de problemas es considerada como una de las metodologías más efectivas para un mejor aprendizaje. Basta citar para ello algunos comentarios de quienes se dedicaron a su estudio y su influencia en la Enseñanza de la Matemática:
George Polya decía: "*está bien justificado que todos los textos de matemáticas, contengan problemas*...”.
Miguel de Guzmán preocupado por la enseñanza de la matemática comenta: *"lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de*

problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados?"
A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues es ahí donde se puede adquirir el verdadero sabor que ha atraído y atrae a los matemáticos de todas las épocas.
Para poner de manifiesto las bases y criterios que traían los alumnos respecto a las estrategias de resolución de problemas se realizó un seminario tipo taller consistente en resolver problemas de Matemática, cuyo objetivo fue analizar las diferentes estrategias utilizadas por alumnos de las carreras de Bioquímica y Licenciatura en Biotecnología de primer año y la actitud frente a la propuesta planteada.

DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA DE TRABAJO

Seminario-Taller de resolución de problemas

Se implementó el seminario-taller con alumnos de dichas carreras, en el segundo cuatrimestre del año 2004, mientras cursaban Análisis Matemático (segunda matemática de la carrera).
Se elaboró un plan de trabajo basado en problemas de dificultad creciente, algunos de ellos del tipo teórico-práctico, que se llevó al aula en forma de seminario, el cual se realizó en dos etapas que se concretaron fuera de los horarios obligatorios de clase, para no dispersar la atención de los alumnos en su cursado habitual.
En la primera, se los dividió en grupos, se realizó una pequeña introducción y se les propuso una serie de problemas dejando que ellos trabajen solos, resaltando la actividad de exploración dentro de cada grupo, es decir estimularlos a que infieran propiedades a partir de los resultados que obtenían. Una vez que cada grupo formuló una hipótesis y propuso una demostración o en su defecto resolvió el problema, se debatió en conjunto, dejando que los alumnos acuerden el resultado definitivo. De esta manera mediante su propio razonamiento, se introdujeron las herramientas básicas para el desarrollo de la etapa posterior.
En la segunda etapa los alumnos trabajaron en los mismos grupos y se propusieron nuevos problemas de mayor dificultad. Se dejó que desarrollen solos sus propias estrategias de resolución que luego se discutieron con toda la clase, destacando los errores y virtudes de cada propuesta.
Como actividad final se realizó una encuesta, para rescatar la opinión de los alumnos sobre este trabajo, y así poder diagnosticar el beneficio de esta actividad.

Los problemas

Los problemas fueron seleccionados de la bibliografía con la que trabajan los alumnos en clase, de tal manera de mantener el grado de dificultad y nivel de contenidos equivalentes a los desarrollados hasta el momento de realizar el seminario, pero con algunas variantes. En los problemas 1) a 3) se comenzó con una función particular en un intervalo definido para terminar en el enunciado del Teorema del Valor Medio aplicado a una función cuadrática, enunciado que debieron elaborar y demostrar. En el 4) se trabajó con la expresión de distancia entre dos aeroplanos modificando los ángulos según las direcciones que podía tomar un segundo avión respecto del primero, esto hizo que el problema fuese más dinámico y constructivo. En el problema 5) se trabajó con el concepto de punto fijo de una función, además de modificar las condiciones iniciales del problema base. (ver Anexo)

Resultados

Los resultados de la encuesta realizada en el grupo de alumnos (n = 28) se muestran en el Cuadro. Con respecto a las preguntas abiertas realizadas, un amplio grupo de alumnos no encontró dificultades en comprender los problema, sí hubo coincidencia en los grupos en cuanto a poder expresar las ideas en términos matemáticos.
Lograr una demostración consistente fue lo que más esfuerzo requirió de ellos, incrementado por la resistencia a los trabajos algebraicos extensos.

Cuadro: Respuesta de los alumnos en porcentajes

Preguntas	SI	NO	Medianamente
Ej. 1) ¿Tuvo alguna dificultad con la consigna?	15 (54%)	13 (46%)	-
¿Llegó rápidamente a una solución?	13 (46%)	15 (54%)	-
¿Esta fue debatida en forma grupal?	26 (93%)	2 (7%)	-
Ej.2a) ¿Pudo expresar claramente las propiedades observadas mediante sus propios conocimientos?	12 (43%)	1 (4%)	15 (53%)
Ej. 2b) ¿Detecto donde están las diferencias?	23 (82%)	1 (4%)	4 (14%)
Ej. 3) ¿Sus conocimientos le fueron suficientes para realizar esta demostración?	23 (82%)	5 (18%)	-
¿Le gustó trabajar con este tipo de actividad?	12 (43%)	16 (57%)	-

En relación a al problema 4, de 24 alumnos que integraban en ese momento el plantel del seminario, el 62,5 % resolvió bien los 4 ítems del enunciado, el 20,8 % lo confundió con tasas de cambio, y un 16,7 % no pudo llegar a una solución satisfactoria del problema.
El problema 5 requería que los alumnos leyeran atentamente el enunciado, realizaran una buena interpretación de los datos y escribieran adecuadamente la relación entre ellos. Las dificultades que tuvieron muestra una falta de comprensión e interpretación de enunciados por parte de los alumnos.
Con respecto a las preguntas generales referidas a la metodología utilizada en el seminario, el total de los alumnos mostró interés y manifestó su agrado por trabajar en forma diferente, ya que lo hicieron de manera libre y con distintos problemas. La mayoría coincidió en la conveniencia de realizar la actividad en paralelo al desarrollo de los temas en el transcurso del dictado de la asignatura y no como en esta oportunidad, que fue realizada con posterioridad.

Algunos resultados obtenidos por los alumnos

Caso 1. Considere la función $y = x^2 - 4x + 3$, para cada uno de los siguientes intervalos halle la pendiente de la recta secante (llamar m_{sec}) determinada por los extremos del intervalo y luego determine el valor de x para el cual $f'(x) = m_{sec}$. En cada caso acompañe con un gráfico:

a) En el intervalo [4, 6].
b) En el intervalo [2, 3].
c) En el intervalo [-1, 1].
d) ¿Qué relación tiene el valor de x hallado con los valores extremos del intervalo correspondiente?

Mediante la resolución de este problema, se pretendía que los alumnos adquieran analicen “ejemplos”, o “casos especiales”, para llegar luego, a una conclusión final.
En este caso los alumnos no encontraron dificultad para llegar a una solución satisfactoria, mostrándose a continuación una solución tipo, para $y = f(x) = x^2 – 4x + 3$

Derivada	Intervalo	Puntos	Pendiente recta secante	Valor de x donde f´(x) = pendiente de la recta secante	Punto Medio
y = 2x – 4	[4, 6]	x = 4, y = 3	6	6 = 2 x - 4 , **x = 5**	$\frac{4+6}{2} = 5$
		x = 6, y = 15			
	[2, 3]	x = 2, y = -1	1	1 = 2 x - 4 , **x = 5/2**	$\frac{2+3}{2} = 2{,}5$
		x = 3, y = 0			
	[-1,1]	x = -1, y = 8	-4	-4 = 2 x - 4 , **x = 0**	$\frac{-1+1}{2} = 0$
		x = 1, y = 0			

De esta forma vemos que el valor de x cuando la pendiente de la recta tangente es igual a la pendiente de la recta secante, es siempre el punto medio del intervalo.

Caso 2. Elabore una conjetura o enunciado de la propiedad basándose en los resultados logrados en el problema anterior.
Con este problema se los estaba introduciendo a la traducción de los resultados de la experimentación anterior a la elaboración teórica a modo de teorema de una conjetura, con el fin de que comprendan el problema en su totalidad, y que no se queden con la idea de un caso particular. Cada grupo llegó a una formulación diferente, algunas de las cuales se exponen a continuación:

- Sea f una función continua en [a , b] y derivable en (a, b), si f’(x) = m_{sec} existe algún valor de x € a [a , b] tal que x = (a + b) / 2
- El valor de x para el cual f’(x) = m_{sec} en [a , b] es el valor medio del intervalo.
- Dada una función que cumple la hipótesis del teorema del valor medio, encontramos mas de un valor en el cual, m_{sec} = m_{tg}, siempre y cuando los intervalos sean cerrados.
- Sea f una función continua y derivable en [a , b]. Si f’(x) = m_{sec} existe x tal que x = (a + b) / 2 , igual al valor medio del intervalo.
- Sea f una función continua en [a , b] y derivable en (a , b), existe un x perteneciente a [a , b], tal que f’(x) = m_{sec}

Se puede ver que en todos los casos omitieron aclarar que sólo se cumple para funciones cuadráticas, lo cual es una condición indispensable para este problema, se comparó cada uno de estos enunciados con el correcto para que se analice la necesidad de un *buen enunciado*. Se aprovechó la oportunidad para revisar las propiedades de derivabilidad y continuidad que tienen las funciones polinómicas y poder extender la conjetura a otras funciones.

Caso 3. Demuestre que lo conjeturado en el caso anterior es válido para cualquier función cuadrática.
En este punto los alumnos mostraron cierta dificultad y resistencia al trabajo algebraico, llegando solamente a escribir con ayuda del docente a ordenar la demostración: escribir una función cuadrática en forma general, derivarla, escribir la abscisa del punto medio del intervalo, calcular la pendiente de la recta secante, hasta llegar finalmente, en conjunto, a la demostración.

CONCLUSIONES

Basados en lo demostrado por los alumnos en las clases, los resultados de los problemas y de las encuestas, se puede decir que la actividad resultó totalmente satisfactoria. Se logró un clima de trabajo muy bueno y, como dijeron ellos, la actividad no sólo les sirvió para aprender

nuevas técnicas en resolución de problemas matemáticos, sino que los métodos de razonamiento, pueden ser aplicados a otras ramas de su estudio.
Una vez mas la metodología de resolución de problemas, permitió que los alumnos apliquen y elijan estrategias para resolver diferentes situaciones enmarcadas en los temas que se desarrollaban, pero además permitió mostrar las dificultades al momento al tener que formalizar en un enunciado o bosquejar una demostración.

BIBLIOGRAFÍA

1) De Guzmán, M. (1992). "Tendencias innovadoras en Educación Matemática". Publicación de la Olimpíada Matemática Argentina. Buenos Aires.
2) Santos Trigo, L. M. (1996). "Principios y Metodos de la Resolucion de Problemas en el Aprendizaje de las Matemáticas". Editorial Iberoamericana, México.
3) Lang, S. (1990). "Cálculo". Editorial Addison Ewsley Iberoamericana, Estados Unidos.
4) Poole, D. (2004). “Algebra Lineal”. Editorial Internacional Thomson, México.
5) Purcell, E.; Varberg, D.; Rigdon, S. (2000). “Cálculo”. Editorial Pearson Education, México.
6) Polya, G. (1979). “Cómo plantear y resolver problemas”. Editoral Trillas, México.
7) Courant y Robins (1979). “¿Qué es la Matemática?” Editorial Aguilar, Madrid.

ANEXO

Problemas planteados en el seminario

1) Considere la función $y = x^2 - 4x + 3$, para cada uno de los siguientes intervalos halle la pendiente de la recta secante (llamar m_{sec}) determinada por los extremos del intervalo y luego determine el valor de x para el cual $f'(x) = m_{sec}$. En cada caso acompañe con un gráfico:
   a) En el intervalo [4, 6].
   b) En el intervalo [2, 3].
   c) En el intervalo [-1, 1].
   d) ¿Qué relación tiene el valor de x hallado con los valores extremos del intervalo correspondiente?

2) Elabore una conjetura o enunciado de la propiedad basándose en los resultados logrados en el problema anterior.

3) Demuestre que lo conjeturado en el problema 2) es válido para cualquier función cuadrática.

4) a) Iniciando al mediodía, el aeroplano A vuela con rumbo norte a una velocidad de 400 millas por hora. Comenzando una hora más tarde, el aeroplano B vuela con rumbo este a 300 millas por hora. Despreciando la curvatura de la tierra y suponiendo que los aeroplanos vuelan a la misma altitud, determine fórmulas para D(t), la distancia entre los dos aeroplanos t horas, contadas a partir del mediodía. Ayuda: tenga en cuenta expresiones para D(t) cuando $0<t<1$ y cuando $t \geq 1$.
   b) Iniciando al mediodía, el aeroplano A vuela con rumbo norte a una velocidad de 400 millas por hora. Comenzando una hora más tarde, el aeroplano B vuela con rumbo noreste a 300 millas por hora. Despreciando la curvatura de la tierra y suponiendo que

los aeroplanos vuelan a la misma altitud, determine fórmulas para D(t), la distancia entre los dos aeroplanos t horas, contadas a partir del mediodía. Ayuda: tenga en cuenta expresiones para D(t) cuando $0<t<1$ y cuando $t \geq 1$.

c) Iniciando al mediodía, el aeroplano A vuela con rumbo norte a una velocidad de 400 millas por hora. Comenzando una hora más tarde, el aeroplano B vuela con rumbo cualquier ángulo entre $[0,\pi/2)$ a 300 millas por hora. Despreciando la curvatura de la tierra y suponiendo que los aeroplanos vuelan a la misma altitud, determine fórmulas para D(t), la distancia entre los dos aeroplanos t horas, contadas a partir del mediodía. Ayuda: tenga en cuenta expresiones para D(t) cuando $0<t<1$ y cuando $t \geq 1$.

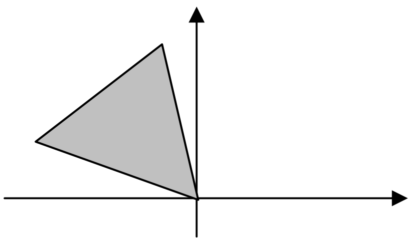
d) ¿Qué sucede con la expresión para D(t) cuando viajan ambos en la misma dirección, por ejemplo norte?

5) a) Un bloque delgado en forma de triángulo equilátero con lado de longitud 1 unidad, tiene su cara en la vertical del plano xy con un vértice en el origen. Bajo la influencia de la gravedad, girara alrededor de V hasta que un lado golpee en el piso, en el eje x (véase la figura). Denótese con x la abscisa inicial del punto medio M, del lado opuesto a V, y sea f (x) la abscisa final de ese punto. Suponga que el bloque queda en equilibrio cuando M esta directamente arriba de V.

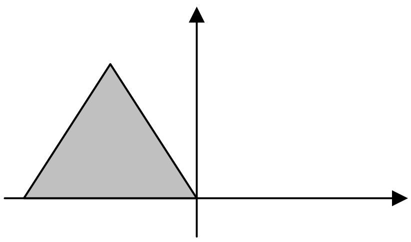
i) Determine el dominio y rango de f

ii) En el dominio de f, ¿dónde es discontinua?

iii) Identifique cualesquiera puntos tales que x = f (x).



Posición Inicial



Posición Final

b) ¿Cómo se modifica la respuesta al problema anterior si el triángulo es isósceles y V es el vértice opuesto al lado desigual?