C10

EL ESTUDIO DEL CONJUNTO DE NÚMEROS COMPLEJOS COMO RECURSO INTEGRADOR

Ana KOZAK, Marcelo PEYEREGNE, Luis GARAVENTA, Jorge ENDELLI

Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Avellaneda
Mitre 750. Avellaneda. Argentina
akozak@fra.utn.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Álgebra y Geometría Analítica, Números complejos, Competencias, Isomorfismo.

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es analizar una propuesta de planificación de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica, en el cual esté presente el sentido constructivo e integrador de la matemática. En esta propuesta se ponen en evidencia las vinculaciones existentes entre los distintos núcleos conceptuales que definen a la asignatura: álgebra vectorial, matricial y lineal y geometría analítica; y que fundamentalmente pretende asegurar la articulación y síntesis de los conceptos tratados, como un eje central de la planificación. La propuesta con la unidad de Números Complejos se basa en incorporar e integrar los conceptos desarrollados precisamente en las unidades referidas al álgebra vectorial, matricial, lineal y geometría analítica. Para ello, planteamos el tratamiento del conjunto de números complejos como una de las unidades de cierre de la asignatura. Iniciamos su desarrollo evocando su historia, así trabajamos desde la operatoria en forma binómica para luego abordar el isomorfismo entre $C_{\Re}$ y $\Re^2_{\Re}$. Esto habilita el trabajo en espacios vectoriales complejos, en principio por comparación con el espacio vectorial $(\Re^2;+;\Re;\bullet)$. Con este abordaje, la unidad de números complejos se transforma de una unidad descriptiva, en una estructura integradora de los conceptos centrales de la asignatura.

EL CONTEXTO DE LA PROPUESTA

Aceptando el desafío de reconstruir a la universidad como innovadora, las Cátedras dependientes de la Unidad Docente Matemática en la Facultad Regional Avellaneda se plantearon proponer otras formas de educación y para ello han acordado plantear el diseño de cada asignatura con el criterio de que los alumnos adquieran un conjunto de habilidades y destrezas[1] necesarias para la formación de su perfil profesional. Ellas son la capacidad para:

- comprender definiciones y demostraciones;
- modelizar matemáticamente una situación;
- resolver problemas con técnicas matemáticas;
- predecir, estimar, verificar y justificar procedimientos y resultados, pudiendo describirlos y discutirlos utilizando el vocabulario específico de la disciplina.

[1] Vila & Col, 2007

Diagramar la planificación de una Cátedra teniendo como finalidad el logro de estas competencias[2], implica considerar la educación como un proyecto de estudio cuyos principales protagonistas son los estudiantes.
En particular, el diseño de la cátedra de Álgebra y Geometría Analítica[3], consiste en las siguientes unidades temáticas: álgebra vectorial, rectas y planos, matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales, transformaciones lineales, cónicas y cuádricas, autovalores, autovectores y diagonalización de matrices; y números complejos. A modo de ejemplo, abordaremos el tratamiento de la unidad de números complejos.
Los números complejos tienen una importancia relevante en las distintas ramas de la ingeniería. Para la mayoría de los alumnos, los números complejos son solamente una respuesta abstracta a algo que aparentemente no existe en el mundo real, como es la raíz par de un número negativo; una especie de sortilegio metafísico, una nada inasible[4]. En este sentido, y para superar este prejuicio, resulta necesario un abordaje didáctico innovador de este concepto. En nuestro caso, decidimos adoptar, una mirada integradora en la cual los estudiantes no sólo adquieran las destrezas para operar con el campo complejo, sino que sean capaces de poder establecer relaciones, diferencias, similitudes y toda clase de interacciones entre y con los distintos contenidos que se han tratado en la asignatura.
Consideramos que la ciencia no puede ser enseñada en forma fragmentada como compartimientos separados que eventualmente se agrupan de manera desordenada, sino que creemos que deben establecerse las relaciones que permitan concebirla como un todo armónico que se recrea continuamente.
Básicamente nos surge la necesidad de plantear la antítesis viejo-nuevo, donde no pretendemos que los estudiantes creen el conocimiento construido desde la disciplina, pero si que sean capaces de ir descubriéndolo e incorporándolo. Con la contradicción entre viejo y nuevo queremos significar que no es nuestra pretensión que los estudiantes reconstruyan en poco tiempo un proceso de evolución que ha demandado siglos a la humanidad. Nuestra intención es que sean capaces dar pequeños pasos a partir de los conocimientos que poseen (lo viejo) y a partir de ahí, avanzando y retrocediendo, y con la orientación del docente, puedan ir construyendo el conocimiento que nos parece pertinente para una mejor formación integral (lo nuevo)[5]. En consecuencia pensamos en una especie de resorte que les permita tomar impulso para el abordaje de las temáticas necesarias en la vida académica de un estudiante de ingeniería.

EL PUNTO DE PARTIDA DE LA PROPUESTA

Al diseñar el cronograma de la asignatura, son varias las ubicaciones en las cuales podemos pensar el desarrollo de la unidad temática de números complejos. Una posibilidad es plantearla como unidad inicial. Esta acción permitiría a los estudiantes articular el curso de matemática del sistema de ingreso a la facultad y la asignatura, al presentar a los números complejos, en principio, como el campo numérico en el cual resulta posible dar respuesta a los radicales de índice par y radicandos negativos. Sin embargo, y a la luz de lo expuesto anteriormente, sobre el prejuicio de inmaterialidad que tiene para los alumnos la estructura de los números complejos, proponemos esta unidad no como la primera sino como la última del programa. Nuestra experiencia es que el tratamiento de los números complejos como primera unidad de la currícula de Álgebra y Geometría Analítica, desde su enfoque tradicional como cierre y completitud de los conjuntos numéricos es introducir a los alumnos en una

[2] Speltini & Col., 2007.
[3] El programa analítico de la Cátedra Álgebra y Geometría Analítica puede consultarse en la página web de la UTN-Facultad Regional Avellaneda: www.fra.utn.edu.ar
[4] Berlinski, D, 2007.
[5] Chevallard y Col., 1991.

abstracción a la que no están acostumbrados desde su formación matemática de la escuela media sin el basamento que ofrece el estudio del álgebra.
Otra de las razones para pensar a la unidad de números complejos como la última unidad surge de observar que el estudiante puede abordar los contenidos del Análisis Matemático del primer año de la carrera y los contenidos de la asignatura que nos ocupa con el simple conocimiento de que estos radicales no tienen solución en el campo real. Por otro lado en el análisis de los resultados del curso de matemática del ingreso a la Facultad., hemos detectado que operar correctamente en el campo real es uno de los temas que mayor dificultad presenta para los aspirantes a la carrera[6].
Teniendo en cuenta estos argumentos, aparece como pertinente dejar para el cierre del programa a los números complejos puesto que de esta manera abordamos las otras unidades temáticas de la asignatura, construyendo como eje transversal las operaciones entre números reales. A partir de este punto es factible plantear el nuevo campo numérico, fundamentalmente porque un estudiante no puede comprender la operatoria en el campo complejo si las operaciones entre números reales les representan un obstáculo.

EL RECORRIDO PREVIO AL TRATAMIENTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Previo al tratamiento del campo complejo como unidad que articula y sintetiza, se desarrollan las siguientes unidades: temáticas vectores geométricos y algebraicos, rectas y planos, matrices, determinantes y sistemas lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales, diagonalización de matrices y estudio de cónicas y cuádricas. A partir de algunos de ellos justificaremos los nuevos conocimientos y también en el desarrollo de la unidad de números complejos se afianzan los conceptos desarrollados a lo largo del año. De esta forma, el diseño del curso no es secuencial, paso a paso, sino que, de manera consciente, salteamos algunos eslabones de la secuencia, y una vez que arribamos al cierre del curso retrocedemos y volvemos a retomarlos bajo una mirada más crítica y más completa del proceso de construcción. Así no pensamos en la educación como un proceso de adentro hacia afuera, sino que pretendemos un feedback que realimente dicho proceso. Es decir, de adentro hacia afuera y de afuera hacia adentro[7].
A lo largo del curso, las unidades temáticas que se abordan nos servirán como apoyatura para nuestro objetivo de fondo. Nuestra intención es que el estudiante advierta la necesidad de relacionar los distintos espacios vectoriales. Pretendemos que sean capaces de observar que, en algún sentido, ciertos espacios son muy parecidos a otros. La pregunta que nos hacemos es sobre si existe alguna relación entre ellos y si es así, como podemos ponerla de manifiesto, en qué conceptos podemos basarnos para responder a esta pregunta. Es en este momento cuando aparecen en escena las transformaciones lineales y a través de ellas somos capaces de poner de manifiesto las relaciones entre estos espacios vectoriales. En este momento hacemos hincapié en el concepto de isomorfismo. Como docentes, sabemos que al estudiar teoría matemática, lo que hacemos, en cierta forma, es estudiar los morfismos. Pero esto que para nosotros es una certeza para los estudiantes no es ni siquiera una sospecha.

LOS NÚMEROS COMPLEJOS – LA PROPUESTA

El primer contacto del estudiante con el contenido que nos ocupa será equivalente al desarrollo histórico, pues consideramos que la historia se puede y se debe utilizar, ya que nos permite facilitar la comprensión y el entendimiento de una idea difícil del modo más adecuado, tal como lo afirma Miguel de Guzmán (de Guzman, 2001): "…*quien no tenga la más mínima idea de las vueltas y revueltas que el pensamiento matemático ha recorrido hasta*

[6] Datos Estadísticos Seminario Universitario, Secretaría Académica, Facultad Regional Avellaneda.
[7] Chevallard Y. & Col., 1997.

dar, pongamos por caso, con la noción rigurosamente formalizada del número complejo, se sentirá tal vez justificado para introducir en su enseñanza los números complejos como "el conjunto de pares de números reales entre los cuales se establecen las siguientes operaciones…"."
Así el punto de partida será que los estudiantes resuelvan una actividad[8] del tipo de la siguiente:

> *Determinar el número* 4 *como suma de dos números reales tales que el producto entre ellos sea igual a* 13.

La resolución de este tipo de actividades, y el debate con los estudiantes acerca de la respuesta obtenida, nos permite repetir el proceso histórico y por tanto, la introducción de la escritura binómica de un número complejo y sus operaciones. De esta manera, será posible establecer las analogías y las diferencias con el conjunto de números reales, ya que al igual que cuando se desarrolló la unidad de vectores geométricos y algebraicos o bien se estudió el álgebra de matrices, pueden abordarse las estructuras algebraicas: grupo, cuerpo y espacio vectorial.
En este punto, los estudiantes quedan enfrentados a la intención central de la propuesta: qué relación existe entre los espacios vectoriales tratados; cuáles son los parecidos, cuáles son las diferencias. En este punto se recurre a las transformaciones lineales y a través de ellas al concepto de espacios vectoriales isomorfos. Aquí es cuando nos planteamos la aparentemente contradictoria relación viejo-nuevo, ante el caso concreto de relacionar a los números complejos con el plano. El desafío para los estudiantes estará dado en la resolución de la siguiente actividad[9]:

> *Sean los siguientes espacios vectoriales:*
> 1) $(C,+,\Re,\bullet)$ *donde* $+$ *y* $\bullet$ *son las operaciones de suma y producto usuales en* C *respectivamente*.
> 2) $(\Re^2,+,\Re,*)$ *donde* $+$ *es la suma usual en* $\Re^2$ *y la ley* $*$ *se define de la siguiente manera:*
> $(a;b)*(c;d)=(ac-bd;ad+bc)$
> *Sea la función:*
> $f:(C,+,\Re,\bullet)\to(\Re^2,+,\Re,*)$ *como* $f(a+bi)=(a,b)$
>
> a) *Demostrar que f es una función biyectiva*
> b) *Demostrar que f es una transformación lineal*

Enfrentar a los estudiantes con esta actividad, nos permite debatir la frase "*igual en algún sentido*" que introduce el concepto de isomorfismo, y si bien los espacios vectoriales no son exactamente iguales, se comportan como si lo fueran a la hora de trabajar con ellos. Resulta entonces que la definición de un número complejo como un par ordenado de números reales ejemplifica claramente como se produce la construcción de un concepto. Nuevamente la relación viejo-nuevo se hace evidente para el estudiante.
Llegados a este punto, el estudiante no tendrá inconvenientes en resolver actividades[10] que como la que mostramos a continuación permiten explorar otras maneras de expresar analíticamente lugares geométricos en el plano:

> *Demostrar que la ecuación:*
> a) $|z-z_0|=R$ *representa en el plano una circunferencia de centro* z_0 *y radio* $R>0$

---
[8] Kozak, A. & Col., 2007
[9] Kozak, A. & Col., 2007
[10] Kozak, A. & Col., 2007

b) $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ *representa en el plano una hipérbola equilátera.*
c) $|z+4i| + |z-4i| = 10$ *representa en el plano una elipse cuyo diámetro focal es de longitud* 8.
d) $|z+i| = |z-1|$ *representa en el plano una recta que pasa por el origen de coordenadas.*

También, resultará posible retomar conceptos del algebra matricial, del cálculo de determinantes y de la resolución de sistemas lineales, abordando nuevos conceptos como consecuencia de haber ampliado el campo numérico y también utilizándolos como herramientas que permiten aplicar nuevamente conceptos propios de los espacios vectoriales para, por ejemplo, poner en evidencia que el cuerpo elegido para definir una estructura de espacio vectorial no es trivial, así los estudiantes podrán concluir que los espacios vectoriales: $(V;+;\Re;\bullet)$ y $(V;+;C;\bullet)$ presentan diferente dimensión.

A partir de este punto, queda expuesto que es posible pensar al plano de dos maneras distintas:

1) Como un espacio real de dimensión dos (cuyos elementos base son (1,0) y (0,1)), donde el cuerpo de escalares son los números reales;
2) Como un espacio complejo de dimensión uno (cuyo elemento base es el 1), donde el cuerpo de escalares son los números complejos.

Por medio de la segunda interpretación se analizaran rotaciones en el plano. Las actividades tendrán como objetivo que los estudiantes puedan observar que si un número complejo z no nulo, imprime una rotación en el plano, resulta que dicho z es un autovector con autovalor complejo (salvo que dicho ángulo sea un múltiplo entero de 90º); como también que si el ángulo no es un múltiplo entero de 90º, entonces el operador en cuestión, no tiene autovalores reales y por lo tanto tampoco autovectores.

Este enfoque pone en evidencia algo que es sabido por nosotros los docentes: *el mismo objeto de estudio se puede enseñar de maneras distintas y como consecuencia se aprenden cosas distintas*. Nuestra intención es ofrecerle a los estudiantes una mirada mas integral del objeto con lo cual necesitamos establecer relaciones en todo momento. Nuevamente está presente la relación viejo-nuevo que citamos anteriormente, con actividades[11] como las siguientes:

¿Como haría usted para representar una recta en el plano a partir de la base canónica? ¿Y respecto de otra base?

¿Como haría usted para representar a una elipse respecto de una base de autovectores?

Para dar respuestas a estos interrogantes, los estudiantes tendrán que recurrir a los conocimientos previos para analizar y validar sus conjeturas, luego el problema de rotaciones de cónicas estará resuelto, quedando a cargo del docente la formalización del objeto.

Las líneas que hemos descrito en los párrafos anteriores, sintetizan los puntos centrales de la propuesta para el abordaje de la unidad de números complejos, para que la misma no sea solamente una unidad descriptiva, con presentación del conjunto numérico y sus aplicaciones, sino como una estructura integradora de los conceptos centrales de la asignatura.

CONCLUSIÓN

Consideramos que esta propuesta es innovadora y crea las condiciones que favorecen en la clase la emergencia de preguntas y conjeturas, la necesidad de validar las mismas y la única

[11] Gentileza Prof. Jorge Endelli, Facultad Regional Avellaneda.

forma de hacer esto es aplicando lo que ya se conoce. Los estudiantes estarán "*haciendo matemática*" y de esta forma la asignatura no será un conjunto de compartimientos separados sino que serán explícitas para los estudiantes las interacciones entre y con los distintos contenidos que se han tratado en la asignatura.
Este "*hacer matemática*", traducido en el juego constante entre la antítesis viejo-nuevo, producirá evocación. Para los estudiantes evocar será claramente una oportunidad de revisar los conceptos desde otra perspectiva, no como resolutores sino como personas que reflexionan sobre los mismos y este es el abordaje de las temáticas que consideramos necesario que esté presente en la formación académica de un ingeniero.

BIBLIOGRAFÍA

- Beillerot J., C. Blanchard-Laville & N. Mosconi. Saber y relación con el saber. Paidos Educador. Buenos Aires, Argentina, 1998.
- Berlinski, D., Ascenso Infinito. Breve historia de la matemática, Sudamericana S. A., Argentina, 2007.
- Charlot B., Conferencia de B. Charlot, Cannes, 1996: La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas. Texto traducido por la Secretaria de Educación del Gobierno de Buenos Aires, extraído del libro: Bkouche R., B. Charlot & N. Rouche. Faire des Mathématiques:le plaisir du sens. Armand Colin, Paris, Francia, 1991.
- Chevallard Y., La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado. Aique Grupo Editor; Argentina, 1991.
- Chevallard Y., M. Bosch & J. Gascón, Estudiar matemática. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona, Editorial Horsori, España, 1997.
- de Guzmán M., Tendencias innovadoras en Educación Matemática (España, Editorial Popular), Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura, Editorial Popular. Edición HTML: (http://www.oei.es/edumat.htm). 1993.
- Kozak A., S. Pastorelli & P. Vardanega. Col. Peyregne M., J. Endelli, M. Gil, & Y. Fumero. Nociones de álgebra lineal y geometría analítica. Mc Graw Hill – UTN. Buenos Aires, Argentina, 2007.
- Lay D., Álgebra lineal y sus aplicaciones. Pearson. México, 1999.
- Merino G., M. Roncoroni, A. Homar, S. Ramírez, E. Wrotniak & S. González. Desarrollo y evaluación de estrategias conceptuales y procedimentales. Archivos de UNLP. La Plata. Argentina, 1999.
- Secretaria Académica, UTN – FRA; Análisis de Resultados del Seminario Universitario: Área matemática 2000 – 2007. Archivos de la UTN-FRA. Avellaneda, Argentina, 2007.
- Speltini C., C. Wainmaier & L. Garaventa. Competencias evaluadas en los exámenes de lápiz y papel. II Seminario Internacional Formación y Aprendizaje basado en competencias: Escenarios actuales y desafíos para la Educación Superior. Puerto Natales. Chile, 2007.
- Tobón S., Formación basada en competencias, Ecoe Editores. Bogotá, 2004.
- Vila A. & M. Poblete, Aprendizaje basado en competencias. Una propuesta para la evaluación de competencias genéricas. Bilbao, Universidad de Deusto, España, 2007.