

C12

**FRACTALES EN LA NATURALEZA: ESTRELLAS BINARIAS****Gustavo L. FERRI**

*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales – UNLPam  
Uruguay 151 – Santa Rosa – La Pampa – Argentina  
glferri@exactas.unlpam.edu.ar*

**Nivel Educativo:** Educación Superior.**Palabras Clave:** Fractales, Dimensión fractal, Autosimilaridad.**RESUMEN**

El objeto de la presente contribución es presentar uno de los muy numerosos ejemplos donde la naturaleza muestra su estructura fractal. Analizamos el conjunto de las estrellas binarias de nuestra galaxia y su distribución en el espacio, mostramos que tiene geometría fractal y calculamos su dimensión. Está destinado a alumnos universitarios que aborden el tema de geometría fractal en alguna de sus asignaturas, a modo de aplicación.

**1. INTRODUCCIÓN**

La geometría convencional nos permite identificar sólo formas geométricas con dimensiones espaciales discretas. Un objeto tiene una dimensión si se trata de una línea, dos dimensiones si es una superficie, o tres, si se trata de un objeto volumétrico. Las formas que se pueden describir matemáticamente con facilidad (líneas, cubos, esferas, etc.) como por ejemplo, burbujas, cristales de cuarzo o de sal, no se encuentran comúnmente en la naturaleza. Mucho más frecuentes en la naturaleza son objetos tales como la hoja de un helecho, el perfil de una montaña, una nube, la red de vasos sanguíneos del sistema circulatorio, la superficie rugosa de una roca. Pero en estos casos, la geometría euclídea no nos ayuda en su descripción

“Las figuras comunes de la geometría clásica o euclidiana no son las más adecuadas para generar formas complejas como la hoja de un helecho o el perfil de una montaña. Su limitación se debe a que tienden a perder su estructura cuando son ampliadas. Un arco de círculo se transforma poco a poco en una recta; la superficie de una esfera se hace cada vez más plana. Esto no es precisamente lo que sucede con las formas naturales; por ejemplo, la superficie rugosa de una roca mantiene prácticamente la misma complejidad a varios niveles de amplificación con el microscopio. Si analizamos una parte de la roca, y dentro de ella otra más pequeña, y así sucesivamente, no por ello nos parecerá cada vez más lisa. De la misma manera que con la roca, podríamos fijar la atención en el ramaje de un arbusto: de una rama salen muchas ramas y en cada una de ellas se repite el mismo esquema. La ampliación de una parte del original es muy similar al original mismo.” (Talanquer, 1996)

En 1977, Benoit Mandelbrot, (Mandelbrot, 1977) establece las bases de una nueva geometría conocida como geometría de fractales la cual está teniendo cada vez más aplicaciones en los campos del conocimiento. La geometría de fractales está permitiendo describir matemáticamente en forma más o menos sencilla, objetos y fenómenos que se habían considerado muy complejos.

“Las herramientas de la geometría fractal son, hoy día, elementos insustituibles en el trabajo de muchos físicos, químicos, biólogos, fisiólogos, economistas, etc., pues les han permitido reformular viejos problemas en términos novedosos, y tratar problemas complejos de forma muy simplificada. Las formas fractales, que durante mucho tiempo se consideraron meras "monstruosidades" geométricas e inaplicables divertimentos matemáticos, subyacen en fenómenos y estructuras tan variadas como la distribución de las estrellas del Universo, la ramificación alveolar en los pulmones, la frontera difusa de una nube, las fluctuaciones de precios en un mercado, y aun en la frecuencia de repetición de las palabras de este texto.” (Talanquer, 1996)

Si hacemos zoom en un fractal (con igual factor de amplificación en todas las direcciones) para ver ampliada una parte de él, encontraremos que esa parte es similar al todo. “*Un fractal es una forma hecha de partes similares al todo de alguna manera*” es la definición de Benoit Mandelbrot (Mandelbrot, 1982), pionero en el estudio del tema. Un objeto fractal tiene una dimensión *fraccionaria*, no entera. Curvas que son más que una curva, pero no llegan a ser una superficie, conjuntos de puntos que no llegan a ser una línea pero que tienen dimensión mayor que cero, son los objetos de estudio de la geometría fractal. Para una introducción más completa acerca del tema, véase por ejemplo Addison (1997), Brown (1996) Barnsley (1988), Lanius (2004).

## 2.- DIMENSIÓN FRACTAL

Consideremos primero un conjunto de puntos  $S$  que forman un trozo de recta ordinaria. Si quisiéramos cubrirlo con segmentos de longitud  $\varepsilon$ , el número de segmentos necesarios  $N_\varepsilon$ , será proporcional a  $1/\varepsilon$  (la constante de proporcionalidad dependerá de la longitud de  $S$ ). Cuanto más pequeña sea la longitud  $\varepsilon$  de cada segmento, mayor será la cantidad necesaria de esos segmentos, para cubrir  $S$ . En símbolos,  $N_\varepsilon \sim \varepsilon^{-1}$ .

Si ahora el conjunto  $S$  es una superficie, por ejemplo un cuadrado y lo queremos cubrir con objetos pequeños de tamaño lineal  $\varepsilon$ . Lo más sencillo es pensar en cuadrados de lado  $\varepsilon$ . La cantidad de objetos que necesitamos para cubrirlo es proporcional a  $1/\varepsilon^2$ . Cuanto más pequeña sea el área de cada cuadrado de área  $\varepsilon^2$ , más cantidad de ellos son necesarias para cubrir el cuadrado grande. En este caso,  $N_\varepsilon \sim \varepsilon^{-2}$ .

Generalizando estos casos para un conjunto fractal, diremos que la dimensión  $d$  está dada por

$$N_\varepsilon \sim \varepsilon^{-d} \quad (1)$$

donde  $N_\varepsilon$  es el mínimo número de pequeños objetos idénticos (de tamaño lineal  $\varepsilon$ ) necesarios para cubrir el objeto original. El tilde significa “proporcional cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ ”. La dimensión, definida por la Ec. (1), es una versión simplificada de la dimensión de Hausdorff, y es conocida como la dimensión de “conteo de cajas”. Obsérvese que es equivalente a

$$D_0 = \frac{\log N_\varepsilon}{\log (1/\varepsilon)} \quad (2)$$

La forma práctica de calcular la dimensión  $D_0$  de un conjunto que está en un espacio cartesiano  $n$ -dimensional, es construir una grilla con  $n$ -cubos de lado  $\varepsilon$ , y contar cuántos de ellos son los necesarios para cubrir el conjunto en estudio. Luego repetir la operación con una grilla más fina (por ejemplo, de lado  $\varepsilon/2$ ,  $\varepsilon/4$ , etc.), y volver a contar. La dimensión del conjunto es la pendiente de la curva  $\log(N_\varepsilon)$  vs.  $\log(1/\varepsilon)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Esto significa para los valores de  $\varepsilon$  más pequeños que nos permite la computadora. Por ejemplo, si  $\varepsilon$  es unas cien veces más pequeño que una longitud característica de un conjunto que está en un espacio tridimensional, la cantidad de celdas será del orden de  $10^6$ .

### 3.- LAS ESTRELLAS BINARIAS

Los catálogos Hipparcos y Tycho son los principales productos de la misión astrométrica de la Agencia Espacial Europea, Hipparcos. El satélite operó durante cuatro años y recogió datos científicos de alta calidad desde noviembre de 1989 y marzo de 1993. En la sección Double and Multiple System Annex (DMSA) del Catálogo estelar HIPPARCOS (Lindgren, 1997) se encuentra un listado con las coordenadas de todas las estrellas binarias de nuestra galaxia relevadas por el satélite.

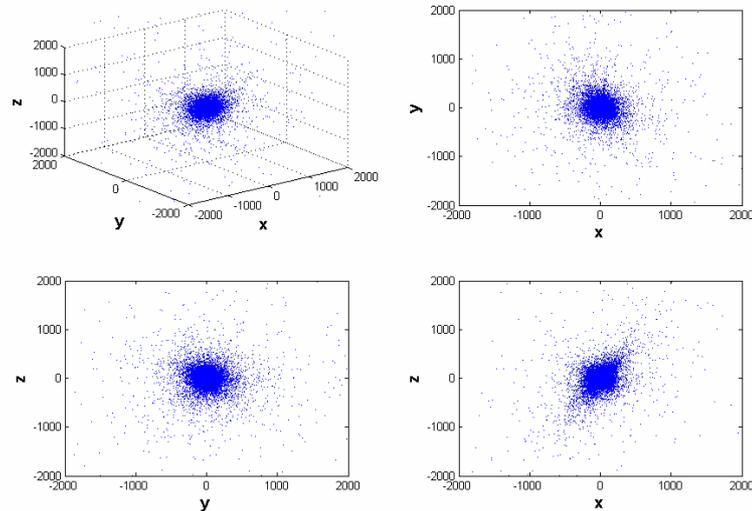


Fig. 1: Distribución espacial de las estrellas dobles en nuestra galaxia. Las distancias están en parsecs.

Se trata de estrellas dobles relativamente separadas de manera que sus componentes han podido ser observadas separadamente por el satélite. Los datos consisten en las coordenadas polares (distancia  $r$ , ascensión recta  $a$  y declinación  $d$ ) de 11759 estrellas dobles. Estos datos fueron transformados a coordenadas cartesianas mediante la transformación  $x = r \cos(a) \cos(d)$ ;  $y = r \sin(a) \cos(d)$ ;  $z = r \sin(d)$ . En la figura 1 mostramos esta distribución de estrellas tanto en un gráfico 3D como las proyecciones de ese conjunto de puntos sobre los planos coordenados.

En la figura 2 mostramos lo mismo, pero haciendo zoom hacia el interior de la distribución.

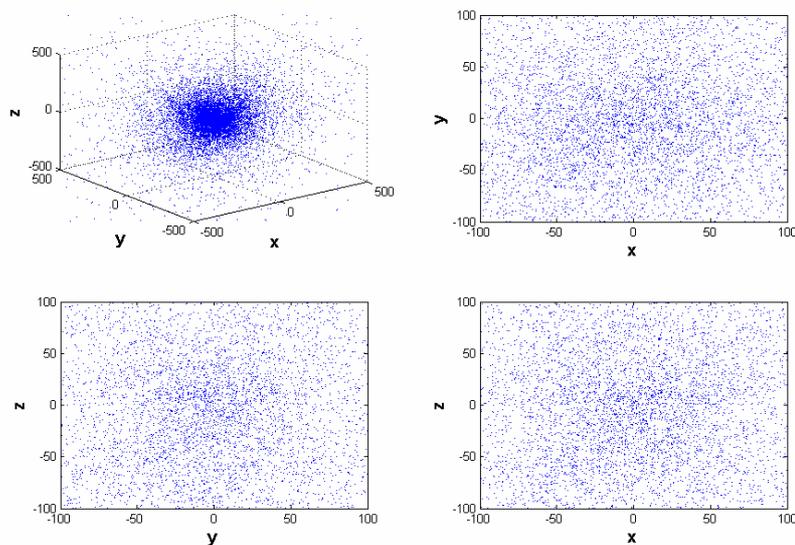


Fig. 2: Distribución espacial de las estrellas dobles en nuestra galaxia a una escala menos que en la Fig. 1.

#### 4.- IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO PARA EL CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL

Damos a continuación los pasos en la implementación del algoritmo para el cálculo de la dimensión fractal del conjunto de estrellas binarias, y las líneas de programa en el lenguaje de MATLAB.

a) En primer lugar leemos el archivo que contiene las coordenadas rectangulares de las 11759 estrellas, y luego reescalamos las medidas para que todos los puntos queden dentro de un cubo de lado uno:

```
load 'xyz.txt'
for i=1:m
    v(i,1)=(xyz(i,1) - min(xyz(:,1)))/(max(xyz(:,1))-min(xyz(:,1)));
    v(i,2)=(xyz(i,2) - min(xyz(:,2)))/(max(xyz(:,2))-min(xyz(:,2)));
    v(i,3)=(xyz(i,3) - min(xyz(:,3)))/(max(xyz(:,3))-min(xyz(:,3)));
end
```

b) Seleccionamos para  $\varepsilon$  los valores  $\varepsilon = 2^{-j}$  con  $j = 0, 1, \dots, S$ , y dividimos el cubo unitario en  $\varepsilon^{-3}$  celdas. Si  $j = 0$ , la celda es igual al cubo unitario, y con sólo una celda ocupamos todo el espacio. Si  $j = 1$ ,  $\varepsilon = 1/2$ , y el cubo unitario se cubre con 8 celdas de lado  $1/2$ . Si  $j = 2$ ,  $\varepsilon = 1/4$  y el número de celdas es 64. El valor máximo de  $j$  no puede ser muy grande, por ejemplo 8, ya que en ese caso tendremos una matriz cúbica con  $256^3$  elementos.

Como las coordenadas de las estrellas son números entre cero y uno, al multiplicarlas por  $n = \varepsilon^{-1}$ , y tomar el redondeo hacia arriba, tenemos números enteros entre 1 y  $n$ , que serán los índices de la ubicación de cada celda en el cubo unitario.

Para cada  $\varepsilon$ , comenzamos con un arreglo tridimensional  $M$  de  $n \times n \times n$ , con  $n = \varepsilon^{-1}$  que contiene todos ceros. Luego recorremos el archivo con las coordenadas de las estrellas y calculamos los índices  $u$ ,  $v$ , y  $w$  de su ubicación en el arreglo de celdas, y hacemos  $M(u, v, w) = 1$ . Muchas estrellas pueden caer en la misma celda. Siempre asignamos uno a esa celda, *no las sumamos*, ya que sólo nos interesa saber cuántas celdas son necesarias para cubrir el conjunto de estrellas. Al final tenemos una arreglo con ceros (las celdas en las que no cayó ninguna estrella) y unos (las celdas en las que cayó por lo menos una). Finalmente sumamos todos los unos y tenemos la cantidad  $N_\varepsilon$  de la ecuación (2).

```
[NumEstrellas, d]=size(v);
for j=0:8
    n = 2^j;
    M=zeros(n,n,n);
    for i=1:NumEstrellas
        u = ceil(v(i,1)*n);
        v = ceil(v(i,2)*n);
        w = ceil(v(i,3)*n);
        M(u,v,w) = 1;
    end
    epsilon(j) = 2^-j;
    Neps(j) = sum(sum(sum(M)));
end
plot(log2(1./epsilon), log2(Neps))
```

c) Una vez que hemos calculado el valor de  $N_\varepsilon$  para cada valor de  $\varepsilon$ , ajustamos por cuadrados mínimos los puntos  $\log(N_\varepsilon)$  vs.  $\log(1/\varepsilon)$  con una función lineal. Si el ajuste es razonable, la pendiente  $D_0$  de esta recta es la dimensión fractal del conjunto. Si el ajuste no es razonable es porque el conjunto estudiado no tiene estructura fractal.

## 5.- CÁLCULO DE $D_0$

Nuestro objeto de estudio, no es estrictamente un fractal ya que, como se trata de un número finito de puntos, no tiene detalles a todas las escalas. Si lo escrutamos muy finamente, con un  $\varepsilon$  muy pequeño, lo veremos justamente como un conjunto de puntos aislados, cuya dimensión es cero. Por otro lado, para  $\varepsilon$  grande, por ejemplo, 1 ó  $\frac{1}{2}$ , o tal vez  $\frac{1}{4}$ , todas las celdas tienen algo del conjunto dentro de ellas, y el número de celdas ocupadas será proporcional a  $\varepsilon^{-3}$ . Lo que esperamos encontrar, al graficar  $\log(N_\varepsilon)$  vs.  $\log(1/\varepsilon)$ , son puntos en una curva que tiene pendiente igual a tres si  $n = 1/\varepsilon$  es pequeño, y pendiente igual a cero si  $n = 1/\varepsilon$  es suficientemente grande. Si entre ambos extremos los puntos se alinean en una recta, podremos decir que el conjunto tiene estructura fractal o que es autosimilar de alguna manera a lo largo de algunas escalas que podemos medir en potencias de 2.

Como señalamos más arriba, el número  $n = 1/\varepsilon$  está limitado porque debemos armar un arreglo de  $n \times n \times n$  elementos. Para poder explorar nuestro conjunto de estrellas más finamente, hacemos un estudio preliminar con un conjunto 2D obtenido proyectando todos los puntos del conjunto sobre el plano  $xy$ . Obviamente tenemos que adaptar el algoritmo descrito más arriba a dos dimensiones. Queremos ver si los puntos del gráfico  $\log(N_\varepsilon)$  vs.  $\log(1/\varepsilon)$  están alineados en una recta para un intervalo de  $n = 1/\varepsilon$  de varias potencias de dos.

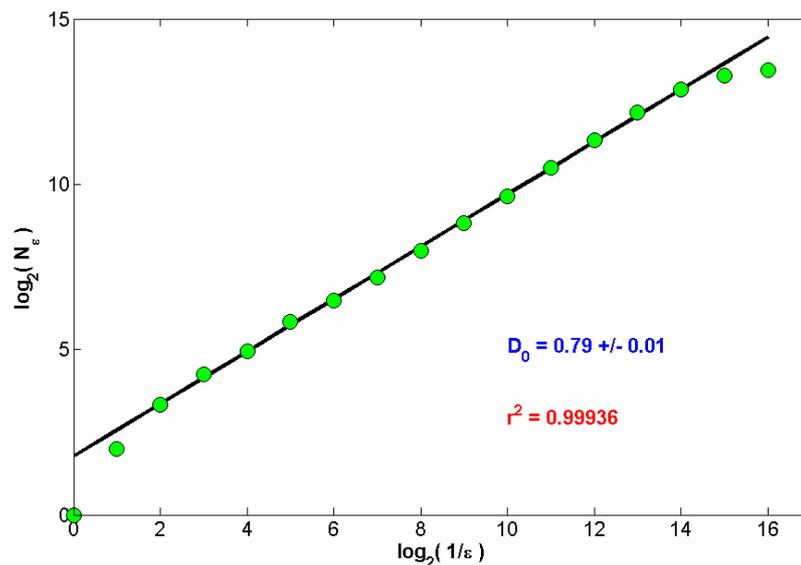


Fig. 3: Ajuste lineal para calcular la dimensión fractal de la proyección sobre el plano  $xy$  del conjunto de estrellas binarias. No se incluyen en el ajuste los dos primeros puntos ni los dos últimos

En la Fig. 3 vemos que hay una correlación lineal para escalas que van desde  $\varepsilon = 2^{-2}$  hasta  $\varepsilon = 2^{-14}$  lo que significa casi cuatro ordenes de magnitud decimal. Como habíamos previsto, los primeros puntos se apartan de esta línea, alineándose con una pendiente cercana a dos. Los últimos puntos, correspondientes a una grilla muy fina, ya ven al conjunto simplemente como un conjunto de puntos aislados, y en consecuencia la pendiente se aproxima a cero.

El objetivo de calcular la dimensión fractal de la proyección del conjunto en un plano es determinar las escalas en las que hay autosimilaridad, cosa que acabamos de hacer, pero el interés central es calcular la dimensión fractal del conjunto completo desplegado en tres dimensiones. Por una limitación en la capacidad de cálculo no podremos ir más allá de  $\varepsilon = 2^{-8}$ . El cálculo de la  $D_0$  para el conjunto de estrellas binarias de nuestra galaxia, lo mostramos en la Fig. 4. El intervalo de incerteza para  $D_0$  y el coeficiente de correlación lo calculamos de acuerdo a las técnicas habituales para regresión lineal. (Walpole, 92).

Observamos que entre los dos primeros puntos hay una pendiente cercana a tres. Es el efecto volumétrico que ocurre cuando las celdas son muy grandes, y todas o casi todas contienen parte del conjunto. Al hacer el ajuste lineal dejamos de lado el primero de los puntos,

correspondiente a  $\varepsilon = 1$ , y obtenemos para  $D_0$  el valor de  $0.88 \pm 0.03$ . Resulta llamativo que la dimensión del conjunto completo que se despliega en el espacio tridimensional, y la dimensión de su proyección sobre un plano, que existe en un espacio bidimensional, sean similares. En la tabla 1, resumimos los resultados.

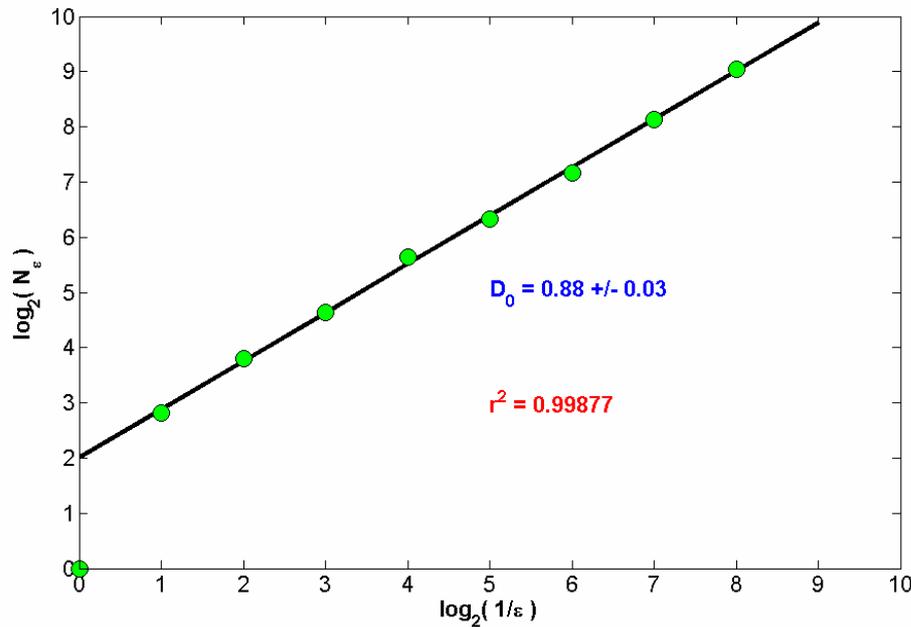


Fig. 4: La dimensión fractal del conjunto de estrellas binarias de la galaxia es  $0.88 \pm 0.03$ . El punto (0,0) no entra en el ajuste.

	$D_0$	$r^2$
Conjunto en 3D	$0.88 \pm 0.03$	$0.99877$
Proy. sobre el plano $xy$	$0.79 \pm 0.01$	$0.99936$
Proy. sobre el plano $xz$	$0.81 \pm 0.01$	$0.99926$
Proy. sobre el plano $yz$	$0.78 \pm 0.01$	$0.99902$

Tabla 1: Dimensión fractal del conjunto de estrellas binarias y de las proyecciones del mismo sobre los tres planos coordenados

Mirando la Fig. 2, uno puede preguntarse ¿Y dónde está la estructura fractal? ¿Cuál es la diferencia entre lo que vemos allí y un conjunto de puntos cuyas coordenadas se obtienen con un generador de números aleatorios? Para dar una respuesta a esta pregunta generamos dos conjuntos de puntos con coordenadas generadas aleatoriamente, en el cubo de lado unidad, ambos con la misma cantidad de puntos que la cantidad de estrellas. Uno de ellos con números aleatorios con distribución uniforme, y el otro con distribución normal. Para ambos conjuntos contamos las cajas necesarias para cubrirlo, con grillas de distinto tamaño, de mismo modo que calculamos los puntos  $\log(N_\varepsilon)$  vs.  $\log(1/\varepsilon)$  al calcular la dimensión fractal del conjunto de estrellas. Vemos, como lo muestra la Fig. 5, que  $N_\varepsilon \sim \varepsilon^{-3}$  para grillas de un tamaño hasta  $\varepsilon = 2^{-4}$ , y para tamaños de grilla más pequeños,  $N_\varepsilon$  satura rápidamente, haciéndose  $N_\varepsilon \sim \varepsilon^0$ . Esto significa que a esta escala ( $2^{-4}$ ) ya no vemos detalles nuevos, mientras que el conjunto de estrellas sigue mostrando autosimilaridad hasta grillas tan finas como  $2^{-14}$ . Claramente entonces, los puntos aleatorios *no* tienen estructura fractal y la distribución de estrellas binarias en la Vía Láctea *si* la tiene. Un análisis de dimensión fractal puede “*ver más*” que el ojo cuando se trata de establecer diferencias en la estructuras de diversos objetos.

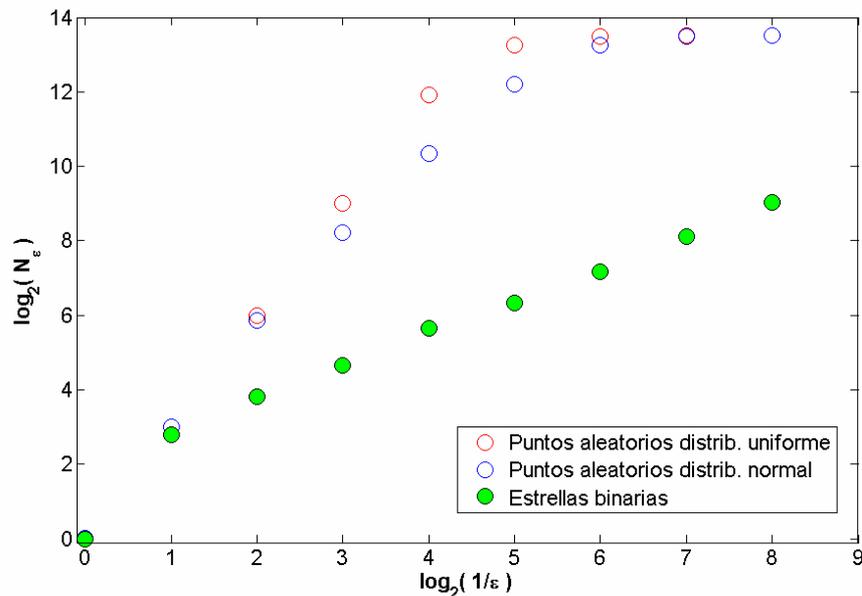


Fig. 5: Los conjuntos de puntos aleatorios tienen dimensión 3 (la del espacio en que están distribuidos), o cero (la de puntos aislados), según el tamaño de las celdas con que hagamos el conteo de cajas. El conjunto de estrellas tiene una pendiente intermedia a lo largo de varios órdenes de magnitud en el tamaño de las celdas, lo cual es evidencia de que estamos en presencia de una estructura fractal.

## 6.- CONCLUSIONES

A lo largo de este trabajo, hemos

- Introducido el concepto de dimensión fractal.
- Indicado los pasos para la implementación del algoritmo que permita el cálculo de la dimensión fractal.
- Calculado  $D_0$  para el conjunto de estrellas binarias de la Vía Láctea.
- Diferenciado las propiedades de este conjunto de las de otros a simple vista parecidos.

Creemos que es un ejemplo interesante de aplicación del concepto de geometría fractal a descubrir ciertas regularidades y estructuras en la naturaleza, y que puede proponerse a estudiantes de matemática que aborden el estudio de la geometría fractal en alguna de sus asignaturas.

## AGRADECIMIENTOS

A la Profesora Josefina Ling del Observatorio Astronómico Ramón María Aller de la Universidad de Santiago de Compostela, quien me facilitó el archivo con las posiciones de las estrellas y me motivó a hacer este cálculo.

## REFERENCIAS

- ADDISON, P.S., (1997), *"Fractals and Chaos. An illustrated course"*, IOP Publishing, London.
- BARNESLEY, M. F., (1988), *"Fractals Everywhere"*, Academic Press, London.
- BROWN, E. (1996), *"Caos, Fractales y Cosas Raras"*, Fondo de Cultura Económica. México. Disponible on-line en: [http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/150/htm/sec\\_1.htm](http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/150/htm/sec_1.htm)

- LANIUS, C. (2004), “Fractals”, url: <http://math.rice.edu/~lanius/frac/>
- LINDEGREN, L. et al. (1997), “*Double star data in the Hipparcos Catalogue*”, *Astronomy & Astrophysics* 323, p.L53-L56. La url del catálogo es: <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=HIPPARCOS&page=Overview>
- MANDELBROT, B. (1977), “*Fractal, form, chance and dimension*”, (Freeman, San Francisco).
- MANDELBROT, B. (1982), “*The fractal geometry of nature*”, (Freeman, San Francisco).
- TALANQUER, V. (1996), “*Fractus, Fracta, Fractal, Fractales: De laberintos a espejos*”, (Fondo De Cultura Económica, México.) Disponible on-line en [http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/sec\\_1.htm](http://omega.ilce.edu.mx:3000/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/147/htm/sec_1.htm)
- WALPOLE, R. y MYERS, R. (1992), “*Probabilidad y Estadística*”, (McGraw Hill, México)