C25

USO DE RECURSOS INFORMÁTICOS PARA POTENCIAR LAS DIFERENTES REPRESENTACIONES DEL CONCEPTO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Giovanni RUIZ FAÚNDEZ, Andrea SEOANE, Mario DI BLASI REGNER

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional General Pacheco
H. Yrigoyen 288, Gral. Pacheco, Argentina
gruizfaundez@yahoo.com.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Matemática Educativa, entorno informático, GeoGebra teoría de las representaciones semióticas.

RESUMEN

En este trabajo realizamos un análisis de la construcción del concepto Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), a través de actividades en la que utilizamos la ayuda de un programa (GeoGebra), con el que pueden construirse páginas interactivas, diseñado como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, el álgebra y el cálculo. Las actividades son implementables en cursos de primer año de carreras universitarias.
El análisis se llevó a cabo desde una teoría de las representaciones, utilizando las herramientas proporcionadas por la Teoría de las Representaciones Semióticas de Raymond Duval y las ideas aportadas por David Tall en relación al paso de un Pensamiento Matemático Elemental (PME) a un Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).
Las nociones de representación no son nuevas pero con el desarrollo tecnológico, y el respectivo desarrollo de representaciones gráficas y dinámicas, el análisis de estas representaciones tuvo un nuevo auge.
El objetivo del trabajo es analizar de qué manera las distintas representaciones del concepto TFC ayudan a la construcción del mismo por parte de los alumnos.

INTRODUCCIÓN

La evolución de la ciencia, la tecnología, los avances en las comunicaciones, dejaron en evidencia el desfasaje existente entre la metodología generalmente utilizada en las clases de matemática y la realidad del medio en el que se desarrollan nuestros alumnos.
Es necesaria la incorporación de las computadoras y del software de carácter educativo en las aulas. Deben ser utilizados como una herramienta, como un agente didáctico integrante de una metodología que sea capaz de promover nuevas interacciones didácticas. (Borba y Villarreal, 2006).
Consideramos que actividades construidas con GeoGebra en el marco de una concepción constructivista y cooperativa del aprendizaje pueden ser útiles para promover entornos educativos superadoras de las que habitualmente encontramos en las aulas universitarias.
Este recurso informático favorece en los alumnos la adquisición de competencias que le permitirán realizar conjeturas, validar resultados y elaborar conclusiones. Ser capaces de

explicar los pasos que siguieron para resolver las situaciones planteadas. El uso de herramientas informáticas en las clases de cálculo promueve el desarrollo de capacidades para conjeturar y argumentar (Villarreal, 1999).

¿Qué es el geogebra?

GeoGebra es un software de matemática que reúne geometría, álgebra y cálculo. Lo ha desarrollado Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática.
Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori pueden modificarse dinámicamente.
Por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.
Estas dos perspectivas caracterizan a GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa., potenciando de esta manera la construcción de conceptos desde distintos registros.

BREVE MARCO TEÓRICO

Los estudiantes que se encuentran entre los 15 y 20 años aproximadamente se hallan en una etapa de transición entre el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).
Esta transición requiere de una reconstrucción cognitiva donde se pasa de describir a definir y de convencer a demostrar.
Se entiende por etapa elemental a la etapa que tiene lugar generalmente en la enseñanza media, y por etapa avanzada a la que está relacionada con la enseñanza en la universidad.
El lugar donde el PME se convierte en PMA no se ha definido con precisión, aunque sí algunas de sus diferencias. Ambas etapas se distinguen en la complejidad de procesos de pensamiento tales como la representación, traslación, abstracción, y deducción entre otros.

"Los conceptos avanzados son probablemente muy complejos. La distinción está en cómo se controle esa complejidad. Los procesos potentes son aquellos que nos permiten este control, en particular la abstracción y la representación. Por medio de ambos, nos podemos desplazar de un nivel a otro y, de esta forma, controlar la complejidad" (Dreyfus, 1991, 26)

Este investigador también sostiene que la representación y la abstracción son procesos complementarios que van en direcciones opuestas: *"... por una parte es frecuente que abstraigamos un concepto a partir de algunas representaciones, por otra, las representaciones son siempre representaciones de un concepto más abstracto"* (Dreyfus, 1991, 38).
De acuerdo a estas complementariedades, se distinguen diferentes etapas en el aprendizaje: *"Podemos observar, pues, que hay cuatro fases en el proceso de aprendizaje:*

- *Utilizar una única representación.*
- *Utilizar paralelamente varias representaciones.*
- *Relacionar representaciones paralelas.*
- *Integrar las representaciones y pasar de una a otra con facilidad."* (Dreyfus, 1991, 39)

De esta manera se propone partir de una única representación del concepto para luego pasar a usar varias representaciones del mismo. Con la tercera etapa se trata de establecer una conexión entre esas representaciones para lograr una transición desde éstas al objeto abstracto, esperando que el alumno pueda establecer relaciones que lo conduzcan a los cambios de representación. Con la cuarta etapa se espera que el alumno integre las distintas representaciones del concepto identificando vínculos, relaciones y propiedades comunes que los lleven al concepto abstracto.
La *teoría cognitiva de las representaciones semióticas* (Duval, 1993, 1996, 1999), entendidas éstas como aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciadas en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.), y que tienen un carácter distinto al de las representaciones mentales, propone que:

1. Se accede al objeto matemático a través de sus representaciones, dado que los objetos matemáticos no son objetos reales, como pueden ser los de otras disciplinas.
2. Es necesario no confundir un objeto con su representación semiótica.

Las representaciones semióticas no son solo un medio de exteriorización de representaciones mentales para fines de comunicación sino que también son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento.
Con respecto al primer punto hay que tener en cuenta que cada representación es parcial en relación al concepto que representa ya que solo representa una parte del mismo. Por esta razón surge la necesidad de trabajar con por lo menos dos representaciones de un mismo concepto, para que, a través de interacciones, se pueda propiciar la construcción del objeto matemático representado.
Dada esta necesidad de utilizar una multiplicidad de representaciones para la comprensión de un concepto matemático, los tipos de representación usados en la actividad presentada son:

- Lingüísticos: **Verbales** (lenguaje natural, lenguaje formal, nombres, definiciones) y **Simbólicas** (escrituras algebraicas y computacionales)
- Figurativas: **Gráficos** (geométricos, cartesianos, computacionales).

Por otra parte, en referencia a la segunda idea señalada, es importante diferenciar un objeto matemático de su representación, dado que el objeto en cuestión tiene un significado más abstracto. Por ejemplo, la línea dibujada con la ayuda de una regla, no es más que una marca dejada por el lápiz, pero en matemática, esta marca ayuda a transmitir un concepto perfectamente platónico como el concepto de recta y, a su vez, esta símbolo nos sirve para conectar procesos y relaciones construyendo el objeto mental recta.

LA ACTIVIDAD

En este trabajo se estudian las potencialidades didácticas de actividades construidas con ayuda del Software GeoGebra, en torno a la construcción del concepto Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) en torno a dos cuestiones:

- la relación entre el área (o diferencia de áreas) bajo la curva y las características geométricas y analíticas de la misma.
- la visualización de la gráfica formada por los puntos cuyas ordenadas son las dadas por los sucesivos valores numéricos del área (o diferencia de áreas) bajo la curva.

Respecto de las actividades, en las clases tradicionales las gráficas son presentadas a los alumnos en el pizarrón en forma estática.

En el modelo que proponemos, el punto que a la postre será el límite superior de la integral es móvil, y la velocidad de su movimiento es manejada libremente por los alumnos, de manera que ayude a visualizar de manera continua los cambios producidos en el área bajo la curva (o la diferencia de áreas) desde cero hasta ese punto móvil y su relación con la gráfica de la función (ambos gráficos aparecen en simultáneo en la misma pantalla, así como el valor numérico del área o la diferencia de áreas).
Con la segunda actividad se pretende que los alumnos "vean" la relación entre la función f(x) y el comportamiento de la función área bajo la curva (o diferencia de áreas)

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx \qquad (1)$$

En esta actividad también se ven los gráficos dinámicamente y en simultáneo en la misma pantalla.
En la primera página dinámica (Figura 1) construida con GeoGebra se presenta una función f(x) (en primera instancia propuesta por el docente) en la que el alumno puede desplazar un punto sobre el eje de abscisas y ver, en simultáneo, los cambios que se producen en el área bajo la curva (o en la diferencia de áreas) desde cero hasta el punto móvil.

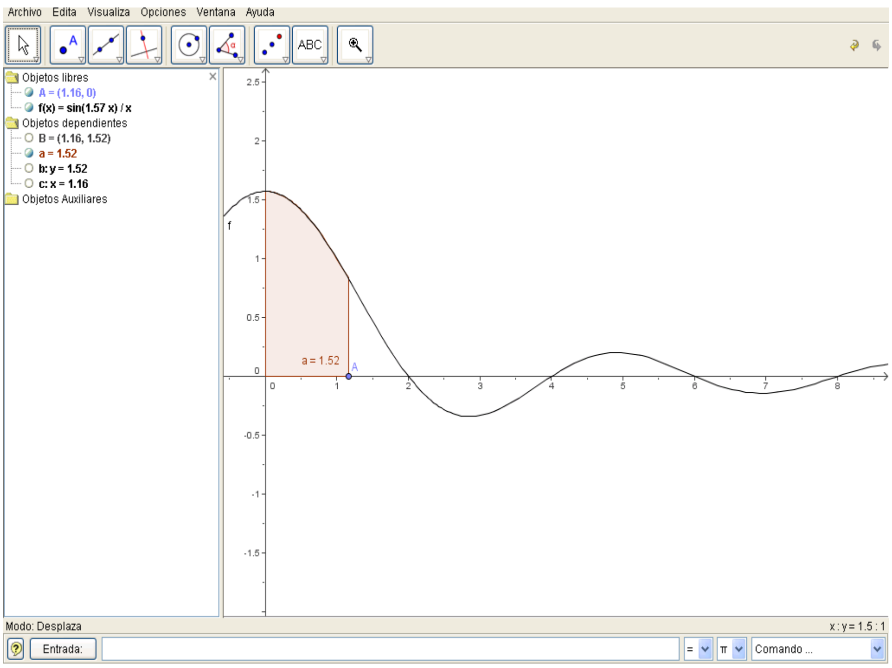

Figura 1: Visualización del área bajo la curva desde cero hasta el punto móvil A

En la segunda página dinámica (Figura 2) se introduce la graficación de la función área bajo la curva (o diferencia de áreas) en cada punto, entendida como el valor numérico del área o de la diferencia de áreas (gráfica de la función

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx \qquad (2)$$

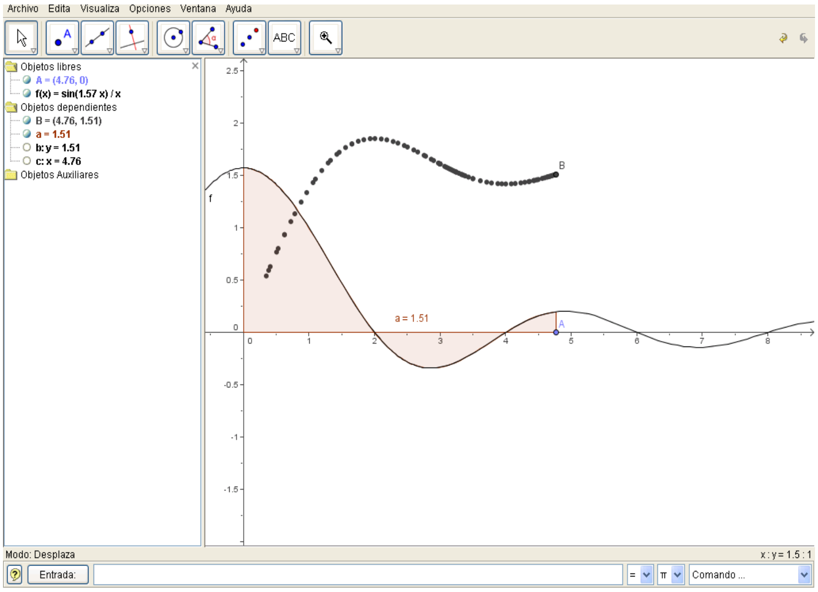

Figura 2: Visualización de algunos puntos de la función área bajo la curva (o diferencia de áreas)

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx \qquad (3)$$

Luego de una primera etapa de “juego libre” los alumnos responden algunas preguntas relacionadas con lo que han observado de modo de “especializar” la observación.
Por ejemplo:
¿En qué puntos la gráfica de la función área (g(t)) tiene un máximo o un mínimo?
¿Cuál es el valor de la función f(x) en esos puntos?
¿Cómo se comporta la función “en los alrededores” (en un entorno) de esos puntos?
¿En qué intervalos la función f(x) es positiva?
¿Para que valores del dominio la función f(x) es negativa y decrece?
¿Cómo es la gráfica de g(t) en esos valores?
Etc.
A medida que la actividad avanza, los alumnos van relacionando el comportamiento de la función f(x) con las propiedades geométricas de la curva área (gráfica de g).
Ellos proponen, luego, diferentes funciones para las cuales realizan análisis similares y, mediante analogías, van “descubriendo” regularidades.
Nuevos interrogantes favorecen la aparición de conceptos y propiedades:
¿En qué puntos la función f(x) cambia su crecimiento? ¿Cómo es la gráfica de g(t) en esos puntos? Etc.

ALGUNAS CONCLUSIONES

- La presión sobre el tiempo didáctico provoca, habitualmente, la supresión de momentos de la clase propicios para la adquisición de conocimientos tales como la exploración/experimentación, y la conjeturación entre otros. De esta manera, los momentos de comunicación y validación son asumidos por el profesor.
- Para enseñar en el nivel educativo donde ocurren los procesos cognitivos del PMA, hay que apoyarse sobre los cimientos del PME, es decir, hay que construir desde esos primeros conocimientos, procesos y modos de hacer para crear puentes hacia el PMA.
- Los objetos matemáticos son mentales y sólo son perceptibles a través de sus representaciones semióticas, lo que da lugar a diferentes representaciones del mismo objeto. Estas representaciones del objeto matemático son las que permiten la construcción y reconstrucción del concepto y la transición entre una etapa cognitiva y la otra.

- La comprensión de un objeto matemático se alcanza cuando se diferencia el representante del objeto representado. En este trabajo, el gráfico computacional del área bajo la curva y de la línea que representa la función son sólo representaciones de ideas y conceptos más abstractos.
- Por esto, hay que implementar en las clases de matemática actividades que demanden el uso coherente de diferentes representaciones.
- La tecnología, desde este punto de vista, nos sirve como herramienta que potencializa la multiplicidad de representaciones necesarias para la construcción de conceptos matemáticos.
- "*Conceptualmente, el papel del pensamiento visual es tan fundamental para el aprendizaje del cálculo que es difícil imaginar un curso exitoso de cálculo que no enfatice los elementos visuales del tema. Esto es especialmente verdad si el curso tiene la intención de promover un entendimiento conceptual, el cual es ampliamente reconocido como carente en la mayoría de los cursos de cálculo como es actualmente enseñado. La manipulación algebraica ha sido enfatizada en demasía y... en el proceso el espíritu del calculo se ha perdido"* (Zimmermann, 1990,136).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BORBA, M. y VILLARREAL, M. 2006. *Humans-with-Media and Reorganization of Mathematical Thinking*, (Springer, U.S.A).
- CONTRERAS, A. Y FONT, V. 2002. ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica? Mesa redonda realizada en XVIII Jornadas del SI-IDM, Castellón.
- DREYFUS, T. 1991. Advanced mathematical thinking processes, en Tall, D. (1994), Advanced mathematical thinking, Ed. Mathematics Education Library.
- DUVAL, R. 1993. Registres de répresentation sémiotique et functionement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,Vol.5,IREM Strasbourg,Francia.
- DUVAL, R. 1996. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? En Garbin, S. (2005, Julio) ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime, 8(2), 169-193.
- DUVAL, R. 1999. L`Apprendimento in matematica richiede un funzionamiento cognitivo specifico? En Garbin, S. (2005, Julio) ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime, 8(2), 169-193.
- GARBIN, S. 2005, Julio. ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. Relime, 8(2), 169-193.
- HITT, F. 2003. Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. Boletín de la asociación Matemática Venezolana, Vol. X(2), 213-223.
- TALL, D. 1994. Advanced mathematical thinking, Ed. Mathematics Education Library.
- TALL, D. 1995, Julio. Cognitive Growth in elementary and advanced mathematical thinking. Plenary lecture at the annual conference of the international group for the psychology of mathematics education, Recife, Brasil.
- VILLARREAL, M. 1999. *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. Disertación doctoral. Universidad Estadual Paulista. Rio Claro. Brazil.
- ZIMMERMANN, W. 1990. Visual thinking in calculus. En Hitt, F. 2003. Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. Boletín de la asociación Matemática Venezolana, Vol. X(2), 213-223.