C41

APLICANDO MODELOS A DATOS EXPERIMENTALES PARA ESTIMAR EL VALOR DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Nélida AGUIRRE, Cecilia ELGUERO, Fabiana ROSSO

Universidad Nacional de Río Cuarto
Enlace Rutas 8 y 36 Km. 606 - Río IV- Córdoba - Argentina
nvaguirre@exa.unrc.edu.ar

Nivel Educativo: Superior.

Palabras Clave: Modelos matemáticos, datos tabulares, estimación, integral definida, cambio total.

RESUMEN

Consideramos que la aplicación de modelos matemáticos posee valor educativo por si mismo porque puede constituir un medio para la construcción de conocimientos matemáticos.
En ocasiones, en el trabajo de modelación, se presenta la necesidad de integrar uma función f cuya expresión analítica es desconocida y de la cual sólo se dispone de su valor en un conjunto discreto de puntos. Aparece entonces la necesidad de encontrar un modelo que mejor ajuste a los datos tabulares para que, a partir de él, se pueda obtener un valor aproximado de la integral definida de f en un cierto intervalo.
Presentamos dos actividades de aprendizaje relacionadas con la temática antes expuesta y en las que se refleja una metodología de trabajo basada en el análisis de datos y planteo de conjeturas a los fines de decidir el modelo más adecuado, la selección del método correspondiente para su tratamiento y la evaluación e interpretación de los resultados.

INTRODUCCION

Cuando usamos matemáticas para resolver problemas del mundo real nuestra intención es obtener un *modelo matemático* que describa o represente algún aspecto de esa situación. Pretendemos que el modelo nos ayude a entender el fenómeno y nos sirva para predecir lo que pasaría en la situación real, tanto en condiciones normales como al modificar algún factor que intervenga en el modelo.
La formulación de un modelo matemático puede ser una tarea desafiante en varios problemas. Debido a la complejidad de los fenómenos del mundo real, casi siempre se tienen que hacer simplificaciones al construir un modelo matemático. Por ello se hace necesario distinguir claramente entre el modelo como representación y la realidad misma.
Para un fenómeno particular es posible construir varios modelos, unos quizás enfocados a algunas características del fenómeno, otros a otras, unos más complejos, otros más simples. Para determinar si un modelo es apropiado o no a una cierta situación, nos basamos en las limitaciones que se generan en el propio diseño del modelo. Por esta razón las interpretaciones y conclusiones deben ser controladas en su exactitud, respondiendo cuestiones como: *¿es suficiente la información disponible?, ¿son razonables las suposiciones hechas en el desarrollo del modelo?, ¿existen factores que no fueron considerados y que*

podrían afectar los resultados?, ¿cómo son los resultados al compararlos con los datos reales?
En la respuesta a estas cuestiones podemos necesitar modificar nuestro modelo. Este proceso de refinamiento debería continuar hasta obtener un modelo que concuerde tan estrechamente como sea posible con las observaciones del fenómeno del mundo real que llevaron a establecer el modelo.
Desde hace aproximadamente dos años, las autoras de este trabajo integramos un equipo de investigación que está avocado a la elaboración de actividades vinculadas a la vida real, relacionadas con el proceso de modelación matemática, dirigidas a futuros profesores de matemática. Para llevar a cabo la tarea de modelación, nos basamos fundamentalmente en métodos gráficos, analíticos, algebraicos y de simulación.
Compartimos la posición de que trabajar en la construcción de modelos matemáticos, recorriendo las distintas etapas del proceso que ello implica, permitirá a los estudiantes desarrollar destrezas y habilidades tales como procesar información, reflexionar, plantear hipótesis y conjeturas, buscar vías de solución, validar.
Ahora bien, en muchas ocasiones, en el trabajo de modelación, se presenta la necesidad de integrar una función que puede ser, en general, de una de las tres formas siguientes:

1. una función simple y continua tal como un polinomio, una función exponencial o una función trigonométrica
2. una función complicada y continua que es difícil o imposible de integrar directamente, como $f(x) = e^{-x^2}$
3. una función tabulada en donde los valores de las variables independiente y dependiente se dan en un conjunto discreto de puntos, como es el caso a menudo de datos experimentales.

En el primer caso, la integral se puede calcular fácilmente usando los métodos analíticos desarrollados en Cálculo. En los últimos dos casos, sin embargo, se deben emplear métodos aproximados. Los esquemas más comunes dentro de la integración numérica se basan en la estrategia de reemplazar una función complicada o un conjunto de datos tabulares con alguna función aproximada que sea más fácil de integrar.
En este trabajo nos restringiremos a considerar el tercero de los casos planteados; esto es, la función viene especificada en forma tabular y entonces el concepto de función primitiva carece de sentido puesto que no se conoce la expresión analítica de la función a integrar. ¿Cómo podemos entonces integrar funciones que no conocemos explícitamente?
Presentamos dos propuestas de actividades de aprendizaje dirigidas a estudiantes que cursan el tercer año de la carrera de profesorado en matemática. Estas actividades se distinguen de las planteadas habitualmente en la literatura, en cuanto a la metodología de trabajo que implican, ya que los estudiantes, a partir de situaciones reales, analizarán conjuntos de datos y harán conjeturas a los fines de decidir el modelo más adecuado y el método correspondiente para su tratamiento, como así también interpretarán y evaluarán los resultados.
Pretendemos con ellas mostrar que la aplicación de modelos matemáticos puede constituir un medio para la construcción de conocimientos matemáticos y que, por lo tanto, la modelación matemática tiene valor educativo por sí mismo.
Antes de realizar la presentación de las actividades mencionadas señalaremos aquellos aspectos básicos a tener en cuenta para lograr una mayor comprensión de la problemática planteada. Nos centraremos en el concepto de integral definida, su significado geométrico y su interpretación.

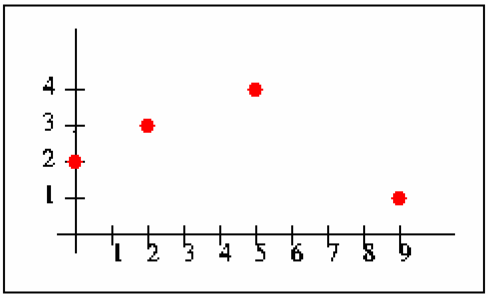
ELEMENTOS TEÓRICOS

A continuación se describen brevemente algunos modelos que se aplican frecuentemente en el área matemática de análisis numérico para reemplazar datos tabulares y poder encontrar un

valor aproximado de la integral definida de la función que subyace al conjunto de datos y cuya expresión analítica resulta desconocida.
Denotamos las variables con x e y, el conjunto de datos por $(x_0\ ,\ y_0)$, $(x_1\ ,\ y_1)$, ... $(x_n\ ,\ y_n\ )$ y damos las ejemplificaciones considerando la siguiente tabla de datos:

x	y
0	2
2	3
5	4
9	1

Tabla A

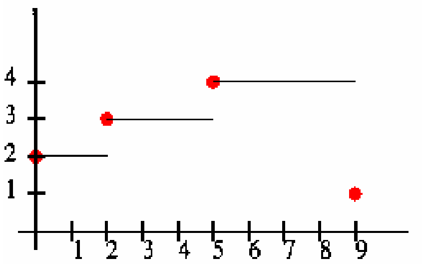


Gráfica de los datos tabulares

- **Modelos lineales a trozos**

Dentro de ellos distinguimos tres tipos:

✓ *Constante a trozos (Regla de la mano derecha)*: Para los valores de la variable x comprendidos entre x_0 y x_1 el valor del modelo constante por trozos es y_0, para los valores de x comprendidos entre x_1 y x_2 el valor del modelo constante por trozos es y_1 y así sucesivamente.
Se necesita hacer una suposición sobre cómo definir el modelo para valores menores que x_0 y mayores que x_n. Hacemos la suposición simple que el modelo es siempre cero para estos valores.
A continuación se muestra la gráfica de la función modelo f, construida como se describió anteriormente con los datos consignados en la *Tabla A*, junto con la forma general de su expresión analítica y el cálculo de la integral definida:



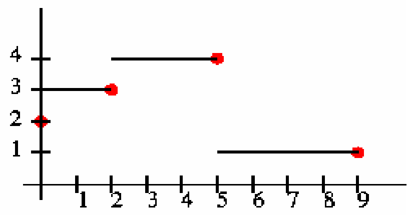
Gráfica de f

$$f(x) = y_k \quad , \ para \quad x_k \le x < x_{k+1}$$

$$\int_0^9 f(x)\,dx = \text{Suma de las áreas de rectángulos} =$$

$$= 2x2 + 3x3 + 4x4 = 29$$

✓ *Constante a trozos (Regla de la mano izquierda)*: Este modelo es similar al anterior salvo que para los valores de la variable x comprendidos entre x_0 y x_1 el valor del modelo constante por trozos es y_1, para los valores de x comprendidos entre x_1 y x_2 el valor del modelo constante por trozos es y_2 y así sucesivamente. La extensión del modelo para los valores que están fuera del conjunto de datos es igual que en el caso anterior.
A continuación se muestra la gráfica de la función modelo f, construida como se describió anteriormente con los datos consignados en la *Tabla A*, junto con la forma general de su expresión analítica y el cálculo de la integral definida.



Gráfica de f

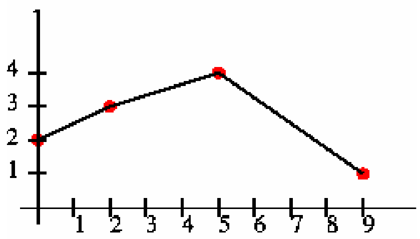
$f(x) = y_{k+1}$, *para* $x_k < x \leq x_{k+1}$

$$\int_0^9 f(x)\,dx = \text{Suma de las áreas de rectángulos} =$$

$$= 2x3 + 3x4 + 4x1 = 22$$

- ✓ *Lineal a trozos (Regla del trapecio)*: Este modelo es lineal entre dos puntos de referencias consecutivos. Así para los valores de la variable x comprendidos entre x_0 y x_1 el valor del modelo lineal a trozos está dado por la recta que une los puntos (x_0 , y_0) y (x_1 , y_1), para los valores de x comprendidos entre x_1 y x_2 el valor del modelo lineal a trozos está dado por la recta que une los puntos (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2) y así sucesivamente. La extensión del modelo para los valores que están fuera del conjunto de datos es igual que en los casos anteriores.

A continuación se muestra la gráfica de la función modelo *f*, construida como se describió anteriormente con los datos consignados en la *Tabla A*, junto con la forma general de su expresión analítica y el cálculo de la integral definida.



Gráfica de f

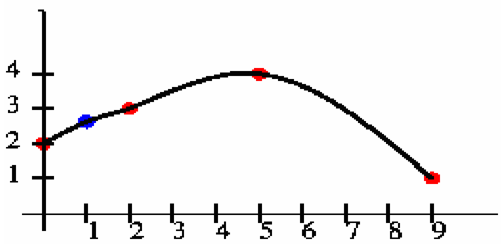
$$f(x) = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) + y_k, \quad para\ x_k < x \leq x_{k+1}$$

$$\int_0^9 f(x)\,dx = \text{Suma de las áreas de trapecios} =$$

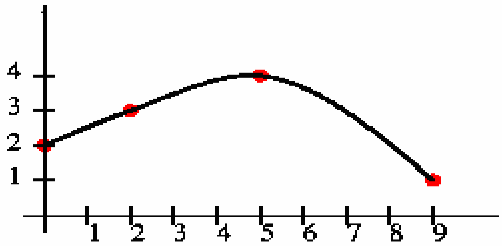
$$= \frac{(3+2)x2}{2} + \frac{(4+3)x3}{2} + \frac{(4+1)x4}{2} = 25.5$$

- **Modelos polinómicos (caso más general)**

Sabemos que es posible encontrar la ecuación de una recta que mejor ajuste a un conjunto de datos. Similarmente, es posible encontrar una función cuadrática o cualquier otro polinomio de un grado fijo que mejor ajuste a los datos.
Por ejemplo, sabemos que una función cuadrática es determinada totalmente por 3 puntos. El *modelo cuadrático a trozos* construye parábolas utilizando tres puntos de referencia y encadena las parábolas en sus puntos extremos. Es decir, la primera parábola pasa a través de los puntos (x_0 , y_0), (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2), la segunda parábola pasa a través de los puntos (x_2 , y_2), (x_3 , y_3) y (x_4 , y_4), y así sucesivamente, por lo cual necesitamos un número *impar* de puntos.
En caso de que el número de puntos sea *par*, se puede implementar el siguiente esquema: se ajusta una parábola a los tres primeros puntos de referencia (x_0 , y_0), (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2), se utiliza la parábola obtenida para interpolar un nuevo punto cuya abscisa esté entre x_0 y x_1 , agregado este punto a los anteriores se crea un número impar de puntos y se procede entonces como antes. La extensión del modelo fuera del rango de datos es la misma que en los otros modelos.
A continuación, se muestran dos gráficas de ajuste a los datos consignados en la *Tabla A*. La gráfica de la izquierda corresponde a la aplicación de un *modelo cuadrático* y la gráfica de la derecha, a la de un *modelo cúbico.*



Ajuste cuadrático



Ajuste cúbico

- **Modelos periódicos**

Si se sospecha que los datos son periódicos sobre un cierto intervalo, tiene sentido elegir un modelo que sea también periódico. En analogía a los polinomios de mejor ajuste, es posible ajustar un modelo que consiste en una suma de funciones seno y coseno que mejor ajuste a los datos.

Es necesario, sin embargo, decidir antes el grado del modelo polinómico que ajustará a los datos. Los modelos que consisten en funciones trigonométricas como las mencionadas anteriormente se llaman *polinomios de Fourier*. Estos polinomios son ampliamente utilizados en ingeniería, física y otras ciencias para aproximar procesos que son periódicos.

ALGUNOS COMENTARIOS

Existen muchas maneras de modelar la función desconocida que subyace a datos tabulares. Cada modelo tiene ciertas ventajas y desventajas. Por ejemplo, el modelo lineal a trozos es preferible si los datos son escasos, pero si se tienen muchos datos, el constante a trozos resulta más simple.

Sabemos de la definición de integral definida como límite de sumas de Riemann que, cuantos más datos recolectemos, los modelos constantes por trozos se acercarán cada vez más al verdadero valor de la integral. Sin embargo, a veces, por el costo de recolectar y procesar datos, los investigadores prefieren utilizar la menor cantidad de puntos como sea posible que permitan conseguir buenos resultados.

Por otra parte, resultados absurdos se pueden obtener con los modelos periódicos si el período en el cual se toman los datos es casi coincidente con el período de la función subyacente a ellos. En estos casos se deben tomar precauciones en el muestreo de datos periódicos.

En la práctica se intenta elegir un modelo cuyas características refleje lo mejor posible lo que se sabe de la función subyacente. Es útil preguntarse si la misma es continua, derivable, si es monótona creciente o decreciente, etc. Por ejemplo, el conocimiento de que la función que subyace a los datos tabulares es monótona creciente nos permitirá saber por anticipado que tendremos una subestimación de la integral definida utilizando el modelo constante a trozos con la regla de la mano derecha, por el contrario, tendremos una sobreestimación de dicha integral con el modelo constante a trozos con la regla de la mano izquierda.

En la mayoría de las situaciones no alcanza con saber qué clase de función modelo se considera que da los mejores resultados, sino que, generalmente, es importante tener cierta idea de cuán exactos son dichos resultados.

Todos los modelos presentados hasta ahora corresponden a funciones elementales. Hemos considerado funciones polinómicas y funciones trigonométricas. Sin embargo, no debemos limitarnos a estos casos. En la práctica, se puede utilizar el tipo de función modelo que se considere que mejor se ajusta al conjunto de datos.

ACTIVIDADES

A) Introducción

El *Teorema Fundamental del cálculo integral* nos dice:

Si *r(x)* es la razón de cambio de una cierta cantidad *Q,* el *cambio total o acumulado* de la cantidad al cambiar *x* de *a* a *b* se expresa por:

$$\textit{Cambio total en la cantidad Q durante } [a,b] = \int_a^b r(x)\,dx$$

Observación: La razón de cambio *r* se mide en unidades de *Q* por unidad de *x* y el total $\int_a^b r(x)\,dx$ se mide en unidades de *Q*.

La actividad que se presenta a continuación consiste en un proyecto de modelación a desarrollar por los estudiantes en el cual ellos mismos deberán comenzar por la obtención de los datos reales.
Con ella se pretende que los estudiantes puedan comprender la utilidad de la integral definida para determinar el cambio total sobre cierto intervalo de tiempo en la posición de un automóvil que se mueve a lo largo de una línea recta, si se conoce la velocidad del automóvil en función del tiempo.

Actividad 1

Los automóviles están equipados con cierto instrumental que nos permite tener información acerca de la velocidad y la posición del mismo. El kilometraje que indica el *odómetro* da la posición, mientras que el *velocímetro* proporciona la velocidad instantánea.

Recolecta tus propios datos:

- En grupos de dos personas acordarán un momento conveniente en el que saldrán a conducir un automóvil.
- Cada grupo tendrá un conductor quien no participará en la recolección de los datos.
- Una persona será la responsable de realizar las lecturas del velocímetro en los intervalos de tiempo convenidos por el grupo de antemano.
- La otra persona registrará los datos del odómetro al principio y al final del recorrido y los datos del tiempo y de velocidad según los métodos convenidos por el grupo.

Algunas sugerencias: Tratar de incluir los datos correspondientes al pasar por una intersección de calles, paradas en semáforos, etc.

Construye modelos:

- Considera el modelo constante a trozos para los datos de velocidad. Explica el significado físico del área bajo cada segmento plano en el gráfico.
- Utiliza algún otro modelo para determinar una aproximación de la distancia total recorrida.
- Registra todas tus respuestas, junto con la distancia real de la lectura realizada del odómetro.
- Compara los resultados obtenidos con los distintos modelos con la lectura real del odómetro y anota el error absoluto para cada modelo, es decir, la diferencia entre la predicción del modelo y la lectura verdadera del odómetro.
- Concluye qué modelo es más exacto y cuál es menos exacto.

B) Introducción

Con la actividad que se presenta a continuación se pretende que los alumnos construyan un modelo que no está dentro de los más clásicos que se consideran y que fueran descriptos anteriormente. Se trata de un modelo *hiperbólico*.

Para resolverla los estudiantes realizarán una secuencia que incluye:

- La utilización de un gráfico para inferir la relación que vincula a las variables.
- La transformación de variables para aplicar el concepto de linealización.
- La aplicación del método de mínimos cuadrados.
- El cálculo del error cometido en la elección del modelo.
- El empleo del concepto de tasa relativa de crecimiento.
- El cálculo del valor medio o promedio de una función.
- El uso de la regla del trapecio compuesta.

Actividad 2: *Inflación de salario*

En una empresa se desea encontrar algún modelo matemático que permita estimar:

a) la tendencia en aumentos anuales de salarios,
b) el salario anual promedio de los trabajadores desde que entran a la empresa hasta que se retiran,
c) el salario anual promedio de un trabajador que ingresó a la empresa en el año 2000 y se retiró 3 años después.

La siguiente tabla contiene información acerca de los aumentos porcentuales de salario:

Año	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Cambio anual (%)	9.3	8.0	5.3	5.0	4.2	4.0	3.4	3.4

Año	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Cambio anual (%)	3.5	3.1	3.5	3.4	2.8	3.0	2.8

Tabla 1

Se sabe, además, que el salario promedio de un trabajador en 1993 era de 25000 pesos al año. ¿Qué repuesta podremos dar a los interrogantes planteados?

Para comenzar, lo primero que se debería hacer es graficar el conjunto de puntos que aparecen en la *Tabla 1* de datos. Con ello obtendremos una línea de tendencia que nos permitirá tener una idea de cuáles modelos matemáticos podrían ser adecuados y que serán luego usados para proyectar cambios futuros de los salarios. La figura siguiente muestra los datos graficados junto con la línea de tendencia:

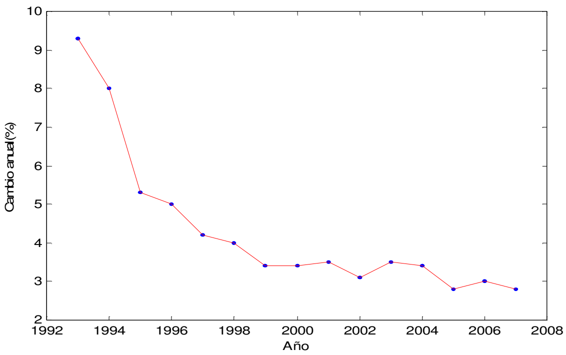


Figura 1

La gráfica parece indicar una tendencia decreciente, que se nivela más o menos a 3%. Existen varias curvas que se comportan en esta forma. Una de las más sencillas es la de la *función racional*:

$$f(t) = \frac{a}{t} + b\,, \quad t \geq 1 \qquad (1)$$

donde *a* y *b* son constantes (*Figura 2)*.

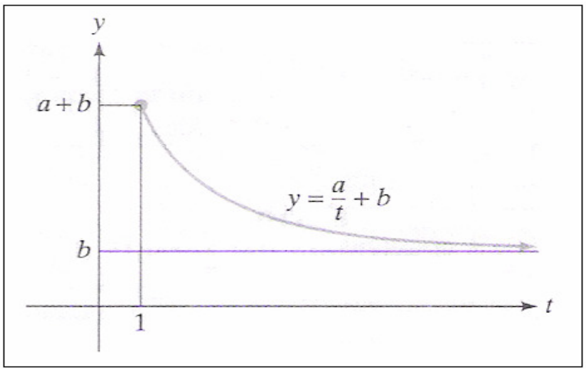


Figura 2

Considerando que *t=1* es el tiempo correspondiente al primer dato, *1993*, y convirtiendo todos los porcentajes en decimales, se tiene la siguiente tabla de datos:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0.093	0.080	0.053	0.050	0.042	0.040	0.034	0.034

t	9	10	11	12	13	14	15
y	0.035	0.031	0.035	0.034	0.028	0.030	0.028

Tabla 2

A continuación se determinarán los valores de *a* y *b* que se ajusten mejor a los datos. Para ello observamos que la función racional *(1)* puede ser *linealizada* al reescribirla como:

$$f(t) = a\ \ T + b \quad , \text{ en donde } T = \frac{1}{t} \qquad (2)$$

El problema se reduce entonces a aplicar el *método de mínimos cuadrados* a los fines de obtener la ordenada *a* y la pendiente *b* de la ecuación lineal (2).
Usamos el comando *polyfit(t,y,1)* de MATLAB, que proporciona los parámetros del polinomio de grado 1 que ajusta los datos, ingresando los vectores *t* e *y* que aparecen en la *Tabla 2.* En nuestro caso, devuelve los valores $a = 0.0749$ y $b = 0.0266$. Calculado el coeficiente de correlación lineal este es $r = 0.9589$, un valor muy cercano a 1, lo cual hace predecir que estamos ante un buen ajuste.
La *función modelo* que se propone es:

$$f(t) = \frac{0.0749}{t} + 0.0266$$

La figura siguiente muestra la gráfica de la función *f* superpuesta a los datos.

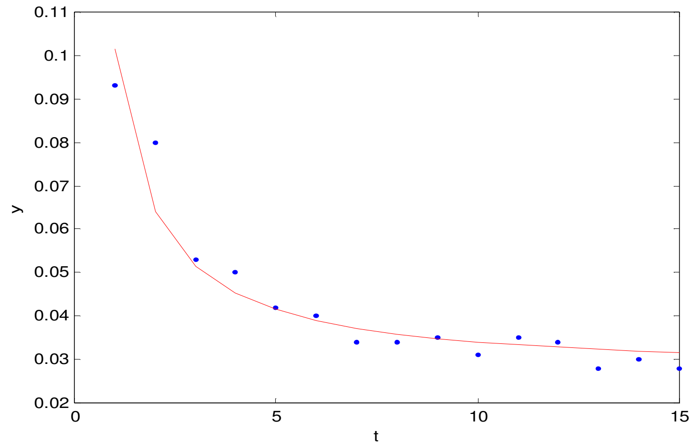


Figura 3

Calculado el porcentaje de error de los datos derivados de la aplicación del modelo matemático respecto de los datos observados de la siguiente forma:

$$Porcentaje\ de\ error = \frac{\left| y_i - f(t_i) \right|}{f(t_i)} \ .\ 100$$

se obtiene que el porcentaje de error promedio resulta del orden del *7,5%.* Este resultado parece razonable y concluimos que existe buena concordancia entre los datos calculados vía el modelo y los datos observados. Podemos decir entonces que el modelo obtenido describe satisfactoriamente la inflación de salario.

Ahora que se dispone de un modelo y antes de continuar para determinar el salario anual, debemos observar que el modelo describe la *tasa fraccionaria* (*o relativa*) *de aumento* de salarios, puesto que se especifica como un porcentaje o fracción del salario total. Es decir, si *s(t)* representa el salario anual de un trabajador en el momento *t*, entonces aplicando la regla de la cadena para derivadas se tiene que

$$f(t) = \frac{ds/dt}{s} = \frac{d}{dt}\ (ln\ s)$$

Así

$$ln\ s = \int f(t)\, dt = \int \left(\frac{a}{t} + b \right) dt = a\ ln\ t + b\ t + C$$

donde *C* es la constante de integración.

De manera que la ecuación del salario anual de un trabajador en el tiempo *t* es:

$$s(t) = e^{a\ ln\ t\ +\ b\ t +\ C}$$

Para calcular *C* tenemos en cuenta el dato de que el salario promedio de un trabajador en 1993 fue de 25000 pesos al año, es decir, *s(1) = 25000*. Entonces

$$25000 = e^{a\ ln\ 1\ +\ b\ 1 +\ C} = e^{b\ +\ C} = e^{0.0266\ +\ C}$$

Por consiguiente,

$$ln\ (25000) = 0.0266 + C$$

de donde

$$C = 10.100$$

Con esto ya se está en condiciones de escribir el modelo que da el salario anual de un trabajador en función de *t*, la cantidad de años a partir de 1993 y que da respuesta a lo planteado en el inciso *a)*:

$$s(t) = e^{a\ ln\ t\ +\ b\ t +\ C} = e^{0.0749\ ln\ t\ +\ 0.0266\ t +\ 10.100} = t^{\ 0.0749}\ e^{0.0266\ t}\ e^{10.100} \qquad (3)$$

Para dar respuesta al inciso *b)* es decir, el salario anual promedio de un trabajador, debemos tener en cuenta que el *promedio* es el *salario total* que gana el trabajador en su carrera, dividido entre la *cantidad de años* trabajados. Así

$$\bar{s} = \frac{1}{q-p}\int_p^q s(t)\,dt$$

donde p es el año en que un empleado comienza a trabajar en la empresa y q es el año que se retira. Reemplazando *s(t)* por lo obtenido en (3) y teniendo en cuenta que $e^{10.100}$ no depende de t se tiene que

$$\bar{s} = \frac{e^{10.100}}{q-p}\int_p^q t^{0.0749}\, e^{0.0266}\, dt \tag{4}$$

Finalmente, para dar respuesta al inciso c), como no es posible determinar una antiderivada explícita del integrando, obtenemos una aproximación de la integral y, por lo tanto de $\bar{s}$ usando, por ejemplo, la *Regla del trapecio compuesta* que establece que para $n \geq 1$:

$$\int_p^q g(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[g(p) + 2\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) + g(q)\right] \tag{5}$$

donde $h = \dfrac{q-p}{n}$ y $x_i = p + ih$

La aplicación de la *Regla* (5) usando los valores $p = 8,\ q = 8 + 3 = 11,\ h = 100$ juntamente con $g = t^{0.0749}\, e^{0.0266\,t}$ permiten lograr una aproximación de la integral definida que aparece en la ecuación (4). Multiplicando el valor de la integral por $\dfrac{e^{10.100}}{q-p}$ se obtiene que el salario anual promedio para el trabajador que ingresó a la empresa en el año 2000 y se retiró 3 años después es aproximadamente $\bar{s} = 41307$ pesos.

BIBLIOGRAFIA

- BELLOMO, NICOLA y PREZIOSI, LUIGI (1995). Modelling Mathematical Methods and Scientific Computation. (CRC Press).
- BENDER, EDWARD (2000). An Introduction to Mathematical Modeling. Dover Publicaions,Inc.
- BOSCH, MARIANNA, CHEVALLARD, IVES y GASCÓN, JOSEP (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Editorial Horsori.
- DE LANGE, J., HUNTLEY, ID, KEITEL, C. y NISS, M. (1993). Innovation in Maths Education by Modelling and Applications. Ellis Horwood, Chichester.
- GERALD, C. y WHEATLEY, P. (2004). Applied Numerical Analysis. Pearson Addison Wesley.
- GUZMÁN, MIGUEL DE (1993). Tendencias innovadoras en educación matemática. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Editorial Popular-ISBN: 84-7884-092-3 - Depósito Legal: M-9207.
- MEERSCHAERT, MARK (1999). Mathematical Modeling. 2da. Edición. Academic Press.
- PÓLYA, G. (1994). Métodos matemáticos de la ciencia. Madrid Euler Editorial.