C43

DEMOSTRACIÓN Y RIGOR EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

José Luis AGUADO

Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de La Pampa
Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa - Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires - Argentina
jaguado@exa.unicen.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Demostración, Hilbert, Prueba, Verdad.

RESUMEN

Esta comunicación se orienta al análisis, desde la perspectiva de un matemático formador de Informáticos, Licenciados y Profesores de Matemática, de un fenómeno asociado a la práctica de la enseñanza de la matemática: la necesidad de criterios para "graduar el rigor" con el que se transmiten los conocimientos a los alumnos, dependiendo de los diseños curriculares.

VERDAD Y DEMOSTRACIÓN

Es un hecho que el objetivo básico de un matemático (y de la matemática como una ciencia) es establecer la verdad (verdadero conocimiento) sobre el mundo matemático.
Siguiendo a Platón, Aristóteles y Euclides se consideró que el mejor método para justificar y organizar el conocimiento matemático era el método axiomático. Los conceptos básicos que están bajo de este paradigma (llamado Euclideano) se establecieron ya en el siglo XIX.
Citemos, como ejemplo de fundadores del paradigma en este siglo, a Agustín Louis Cauchy, pionero en el análisis y la teoría de grupos, quien investigó también la convergencia y la divergencia de las series infinitas (además de ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática). En su Analyse Algébrique, de 1822, Cauchy precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgaron rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedaría eliminada, Más tarde, Cauchy sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir curvas sin tangentes. Entonces Cauchy vuelve a tomar el concepto tradicional de integral, como suma y no como operación inversa de la derivación. También introdujo el rigor en el tratamiento de las series fijando criterios de convergencia y eliminando las series divergentes.
Desde el siglo XIX el concepto intuitivo y bastante psicológico en su naturaleza, de una prueba informal fue reemplazado por una noción precisa de una prueba formal y de una consecuencia lógica que llamamos demostración.
El descubrimiento de paradojas en los fundamentos de la matemática forzó a la revisión de algunas ideas básicas y motivó distintas direcciones en las investigaciones meta-matemáticas.
Una dirección de estas investigaciones, y quizás la más popular fue el formalismo de David Hilbert que buscaba justificar teorías matemáticas por medios de sistemas formales.

Hilbert buscaba afianzar la validez de conocimiento matemático por medio de consideraciones sintácticas sin apelación al aspecto semántico.
Un criterio para la verdad del sistema matemático era, según Hilbert, su consistencia.
Los teoremas del incompletitud de Gödel y en particular el reconocimiento de la indefinibilidad del concepto de verdad mostraron un serio impedimento en el programa de Hilbert y, hablando en general, se cayó en la cuenta de que la verdad (total) no puede establecerse por *demostrabilidad* usando medios sintácticos.
Puede hacerse por:
(1) extender el alcance de los axiomas
(2) extender el alcance de reglas admisibles de inferencia y
(3) agregar tipos de orden superior.

DEMOSTRACIONES, RIGOR Y VALIDEZ EN LA INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

Dictado por el paradigma que heredamos, desarrollado básicamente durante la primera mitad del siglo XX, el mandato fundamental de la fe matemática es que se debe demostrar todo rigurosamente.
¿Y qué significa demostrar todo rigurosamente? La visión lógica tradicional es que "una prueba matemática es una sucesión finita de proposiciones que empieza con un conjunto de axiomas y que a través de pasos lógicamente válidos, llamados reglas de inferencia, arriban a una conclusión" [Griffiths, 2000, pág. 2].
Mientras los matemáticos difieren en sus puntos de vista sobre lo que constituye una prueba rigurosa, y hay fundamentalistas que insisten en incluso un rigor *más riguroso* que el usualmente aceptado por las principales corriente, la creencia en este principio podría tomarse como la propiedad que define al matemático profesional.
Pero por otro lado, el propósito de demostrar un teorema es establecer su certeza matemática: "Una demostración confirma una verdad para un matemático de la misma manera que la observación lo hace para el científico natural" [Griffiths, 2000, pág. 2]. Tales puntos de vista normalmente son sostenidos por maestros de maestros de matemática y se pasan a lo largo de generaciones. Sin embargo, muchos educadores de matemática y algunos matemáticos creen que se deben hacer algunas distinciones cuando se habla de demostraciones.
El matemático William Thurston, medalla Fields 1994 defiende la tesitura sobre que es importante distinguir entre las demostraciones formales y las que los matemáticos bosquejan. En este caso, se suprimen muchos cálculos rutinarios y las manipulaciones lógicas. Tales omisiones no son debidas a descuido; más bien esto se hace porque las pruebas serían increíblemente largas si cada detalle lógico fuese incluido. Si se procediese a demostrar el Teorema de Pitágoras usando sólo los axiomas y reglas de inferencia permitidos en los Elementos de Euclides, la demostración ocuparía varias páginas.
Y, como así los describen la mayoría de ellos cuando son consultados sobre el punto, el proceso cognitivo por el cual los investigadores en matemática elucubran sus ideas se asienta sobre un sólido basamento: conocen muchas herramientas y saben usarlas. Es lo que se llama "técnica" u "oficio" en cualquier rama de las actividades humanas.
Podría decirse que para un matemático, el rigor en sus trabajos surge como un subproducto del profesionalismo del investigador y no es el resultado perseguido primariamente.
Tampoco, en su práctica diaria, los matemáticos se preocupan por las cuestiones meta-matemáticas. Pueden no estar de acuerdo con ciertas sutilezas de tipo filosófico, pero al menos son capaces de cambiar sus modos de aproximarse a los problemas. Pueden ser intuicionistas o constructivistas a nivel meta-matemático, pero esto no les impide comprender las matemáticas escritas por las personas con otros puntos de vista.
Por ejemplo, hay matemáticos que se sienten incómodos con la noción de infinitud. Usando el Axioma de Elección, Tarski y Banach han mostrado que es posible partirse una pelota de tenis

en unas pocas partes y combinarse de nuevo para producir una pelota del tamaño de nuestra Tierra. Muchos sienten que el Axioma de Elección no es una herramienta fiable. Sin embargo, la mayoría de los matemáticos no dudan en usarlo.
En un nivel más elemental, la teoría de cardinales de George Cantor, que se ha revelado como muy fecunda, permite convencer intelectualmente de que hay tantos números naturales como números racionales. Y nadie discute la validez de esta proposición, ni se atreve ya, a llamarla despectivamente *paradoja*.

DEMOSTRACIONES EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA

Por suerte, las paradojas y cimbronazos en los cimientos matemáticos no alcanzan aún la preocupación de los alumnos de los cursos de matemáticas (excepto quizás los que van a seguir la carrera de educadores o investigadores en la materia y eso, en algún curso optativo).
Sin embargo, los educadores matemáticos viven solicitados, de una manera más dramática, a vigilar el rigor en las demostraciones porque están y deben estar más preocupados por el componente meta-matemático que debe tenerse presente en el proceso de alfabetización matemática.
La alfabetización matemática es un concepto vago que implica desarrollar un punto de vista matemático y descubrir conexiones entre objetos matemáticos.
Es ahí donde todos (los educadores noveles y los experimentados) tenemos problemas.
Ni hablar de lo que desde el punto de vista de un estudiante se percibe.
De hecho, un matemático formado no hace más esfuerzos que un estudiante al abordar un problema, sólo que posee muchas más herramientas y sabe utilizarlas combinándolas.
Sin embargo, en la tarea diaria, el docente de matemática debe decidirse entre una demostración rigurosa (y entonces tediosa e inconducente en apariencia) o una "semi-rigurosa" pero que conlleva una idea que el alumno (la clase entera mejor dicho) puede aprehender y que, por lo tanto, consiste en una metodología que no presenta intrusión en su intelecto.
No deberían hacerse demasiadas distinciones en este punto de si se trata de alumnos de nivel secundario o universitario, ya que en ambos casos, algún tipo de delineamiento lógico se debe seguir siempre, ya se trate de enunciar una definición, demostrar una identidad o demostrar una propiedad geométrica.
Naturalmente, sabemos que en la práctica, esta escala de rigor se aplica con bastante flexibilidad y a veces de manera un tanto arbitraria, con el fin de conseguir algún objetivo de cumplimiento perentorio. Otra razón, puede ser, como veremos más adelante, la necesidad de tomar atajos debido a restricciones curriculares.
Pero cualquiera sea el criterio adoptado para "graduar el rigor" hay que ponerse de acuerdo en cómo puede enseñarse el concepto de demostración eficazmente.
La discusión del punto anterior nos muestra que no se puede esperar aprender demasiado del estilo que utilizan los matemáticos para comunicar sus resultados, por lo que lo que la tarea de enseñar a demostrar en matemática con un rigor aceptable, descansa precisamente en los educadores (quienes deben apelar a todas las teorías cognitivas, sicológicas, epistemológicas, pedagógicas de las que pueda disponerse).
La tarea es enorme, pues la idea de demostración es el concepto matemático más difícil para los estudiantes.
Para una mejor apreciación de las investigaciones en el tema, nos permitimos recomendar al lector el artículo-web: Students' Difficulties with Proof de Keit Weber (2003) (Copyright ©2003 The Mathematical Association of America)
En ese artículo, Weber recopila cifras estadísticas sobre el rendimiento de alumnos que aprueban los cursos orientados a demostraciones, así como distintas definiciones e

interpretaciones del concepto de demostración matemática, por ejemplo Explicación, Sistematización, Comunicación, etc.

¿DÓNDE ABANDONAMOS EL RIGOR MATEMÁTICO Y DÓNDE LO RETOMAMOS EN LA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE GREEN?

Un ejemplo que ilustra el laberinto al que nos exponemos a entrar, si insistimos en demostrar todo rigurosamente es el siguiente:
En cursos de cálculo de varias variables, típicamente Análisis II, que se ofrecen en la Universidad tanto para alumnos de carreras de matemática, ingeniería, computación y muchas veces economía, se enuncia y se demuestra (para algunas regiones sencillas) el llamado teorema de Green en el plano, que es de gran utilidad en aplicaciones a la física y a la mecánica. Sin entrar en detalle sobre su enunciado, digamos que se trata de una generalización de la regla de Barrow a funciones de 2 variables $f(x,y)$ y $g(x,y)$ y establece que dadas ciertas condiciones se verifica la identidad $\iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C fdx + gdy$, donde la integral doble en la región plana *R* se puede calcular como una integral curvilínea a lo largo de la curva *C* que es el contorno de la región *R*.

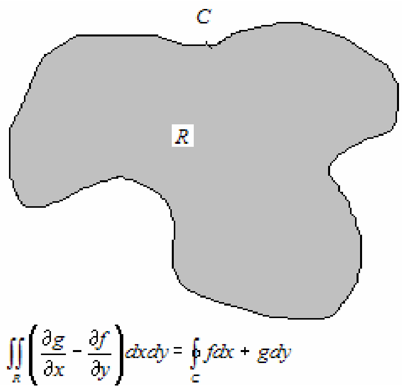

Figura 1

El teorema de Green es válido para una gran familia de regiones *R*, y también para integración de funciones de variable compleja. Una formulación del teorema de Cauchy sobre funciones analíticas usa el mismo tipo de regiones.
El punto es que lo que se suele postular sobre la región *R* es la hipótesis de que sea simplemente conexa en un primer término para simplificar la demostración y luego que también vale para una región múltiplemente conexa.
Pero en el nivel en el que se halla estudiante, se prefiere eludir la complicación de las definiciones de estos conceptos, y se dice por ejemplo, que está orientada de manera que un observador que camina por su contorno, siempre deja a la región *R* del mismo lado.
Esto a su vez presupone que el contorno es continuo (arco-conexo) y que es una curva que no tiene auto-intersecciones.
Ya son demasiadas presuposiciones y se termina imaginando una región con un contorno no demasiado complicado, como el la Fig. 1.
Una curva cerrada continua que no tiene auto-intersecciones (y que puede tener longitud finita o infinita) se llama *curva de Jordan*.
Pero por mucho que usemos la imaginación, y dancemos con las definiciones no podemos suplir de manera elemental una verdad geométrica que es la siguiente:
Si *J* es una curva de Jordan, entonces cortando el plano por la curva, nos quedaremos con, exactamente, dos componentes conexas, una acotada y una no acotada, y *J* es la frontera de cada una de ellas. Todo como creemos intuitivamente.

Este es el célebre *Teorema de la Curva de Jordan*.
En la página 92 de su Cours d'Analyse, Camile Jordan conjeturó y creyó haber probado el teorema que le inmortalizaría. Sin embargo su demostración no era correcta y por más que lo intentó no consiguió enmendarla. El honor de la primera demostración correcta fue para O. Veblen en 1905. Posteriormente, L. E. J. Brouwer propuso una generalización *n*-dimensional del teorema que sería probada por J. W. Alexander en 1922 y denominada Teorema de separación de Jordan-Brouwer. El advenimiento de las teorías de homotopía y homología permitió demostraciones de gran brevedad del Teorema de Jordan-Brouwer.
Si hay un teorema evidente y difícil en topología, es el Teorema de la curva de Jordan. Evidente en el sentido de que su enunciado puede ser comprendido por cualquiera, incluso sin formación matemática. No sólo comprenderse sino que además puede percibirse como cierto lo que se afirma (por poner un ejemplo, el Teorema de los Cuatro Colores también tiene un enunciado comprensible por cualquiera, pero no es en absoluto evidente que lo que afirma sea cierto).
Difícil en el sentido de que una demostración rigurosa del teorema lo es, y siempre hay que apelar a conceptos o métodos que exceden los provistos en los cursos básicos de topología.
Con el nivel de conocimientos que tiene un alumno al cursar un segundo año de cálculo, la decisión de apelar a la intuición geométrica solamente no puede criticarse, ya que el Teorema de Green es demasiado importante para las aplicaciones como para omitirlo.
Si el alumno es de Licenciatura en Matemática, más tarde o más temprano sabrá que está frente a una propiedad que requiere una demostración seria. Si la especialidad final del alumno no es la matemática (incluso si va a ser Profesor) es posible que jamás se entere que esa propiedad que le pareció obvia en su momento, es en realidad un teorema difícil.
Pero ambos, cuando vayan a utilizar el Teorema de Green, sabrán que no falla.

ALGUNAS PROPUESTAS

El ejemplo del Teorema de Green, nos muestra que el principio ortodoxo que aconseja demostrarlo todo rigurosamente debe ceder ante requerimientos curriculares y que esto nada o poco tiene que ver con la fase operacional formal de desarrollo cognoscitivo de Piaget, ni la desidia ni ignorancia de los educandos.
Si bien todo lo que discutimos antes, puede aplicarse con las salvedades del caso a la enseñanza de la matemática a alumnos de nivel secundario o universitario, es evidente que las estrategias "heterodoxas" concretas deben estudiarse en cada situación.
En el nivel secundario, las demostraciones en general pasan por algunas construcciones geométricas y comprobación de identidades. En nuestra opinión, como profesores de matemática de primero de universidad, no toda propiedad geométrica amerita ser demostrada, sobre todo si están involucrados conceptos geométricos intuitivos, pero de cuya demostración rigurosa no se está suficientemente seguro (como el ejemplo de la Curva de Jordan). Allí sostenemos que es preferible resaltar los elementos de geometría analítica y proponer problemas que ayuden a fijarlos. En cuanto a las identidades, deben ser deducibles de las leyes algebraicas, y a ese nivel, debería ser importante conocer el desarrollo de potencias de un binomio, de un trinomio quizás, pero no nos parece relevante que un alumno sepa reproducir al instante la demostración de la identidad $sen(x+y)=cos(x)sen(y) + cos(y)sen(x)$. Tampoco el método de resolución de la ecuación de segundo grado.
Con la masiva irrupción de la informática, en un futuro no muy lejano, las identidades formales y trigonométricas pasarán a formar parte del conjunto de programas de cálculo simbólico de cualquier calculadora estándar. Ni siquiera el método de aproximar raíces deberá preocuparnos. Eso dejará el camino expedito para abocarse a las leyes del álgebra.
En cambio creemos relevante el desarrollo de la lógica a nivel del cálculo con proposiciones y la confección de tablas de verdad. Y la habilidad operatoria en este tema.

En el nivel universitario, las estrategias se clasifican según nuestra experiencia, en tres clases:
I) Se trata con alumnos cuyo diseño curricular viene exclusivamente de carreras específicamente dedicada al quehacer matemático: Profesores de Matemática y Licenciados en Matemáticas (y posiblemente informáticos)
II) Se trata con alumnos cuyo diseño curricular viene exclusivamente de carreras no estrictamente matemáticas (ingenierías en general, ciencias económicas, etc.).
III) Una conformación mixta de las clases I) y II).
En la clase I) se dispone de cierta libertad para insistir en el rigor, si bien se debe recordar que, por lo general, la formación de un profesor de enseñanza media cubre apenas la matemática que debe enseñar en el nivel secundario y que, como sabemos no excede los conocimientos matemáticos producidos hasta el siglo XVIII.
En la clase II) se dispone de flexibilidad para NO insistir en el rigor de las demostraciones en sí, sino el rigor con el que serán aplicadas las propiedades matemáticas y las argumentaciones. Para tales alumnos, es importante conocer, enunciar y manejar con rigor el alcance de los teoremas, según las hipótesis. En nuestra opinión, es más útil solicitar ejemplos de que el tal Teorema o propiedad no vale si se debilitan algunas hipótesis.
En el caso de que nos toque la clase III), evidentemente el tratamiento debe ser como el de la clase II), y en la esperanza de que los alumnos de la clase I) tendrán más adelante, oportunidad de profundizar sus conocimientos. Esta es la situación, precisamente en la Facultad de Ciencias Exactas de nuestra universidad, en donde las materias Análisis I y II, Algebra I y Algebra Lineal son comunes a todas las carreras (licenciatura y profesorado física, ingeniería de sistemas, licenciatura y profesorado en matemática).
En conclusión, digamos que **en lo que se debe ser riguroso** es en la utilización del lenguaje matemático. Al extremo de no permitir a los alumnos agregar una coma donde no la hay en el enunciado de una definición o proposición matemática. ¿Esto va más en la dirección del orden que del rigor en sí? Si, pero sin orden no hay rigor matemático.
En cuanto al lenguaje permítasenos remarcar que debe ser impecable, repitiendo los términos técnicos cuantas veces sea necesario y no buscando sinónimos por cuestiones de estilo. Si los alumnos poseen alguna soltura en el manejo de los esquemas proposicionales, pueden utilizarse cuantificadores, pero sin oscurecer el concepto.
Los matemáticos usan con mucha parquedad los cuantificadores y el símbolo de implicación, como puede verse en cualquier libro o artículo escrito por un matemático.
Escrituras pedantes además de incorrectas que solemos ver en los pizarrones, tales como: *si n es un natural* $\Rightarrow n \geq 1$ hacen que los alumnos se confundan y no sepan lo que se espera de ellos. O se usa el formato $P \Rightarrow Q$ o el formato *si P entonces Q*. Pero la mezcla de ambos puede querer significar una proposición muy distinta. Si bien todos podemos cometer errores o abusos de notación por inadvertencia, se convendrá en que esto conlleva confusión a los alumnos.
Para enseñar a demostrar en matemática, se debe procurar que los alumnos sepan en todo momento, qué se espera de ellos.

REFERENCIAS

[1] Arenas, F. G., Puertas, M. L. (1998). El Teorema de la Curva de Jordan. *Divulgaciones Matemáticas v. 6, No. 1, 43-60.*
[2] Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly*, 107(1), 1-14.
[3] Spiegel, M. (1971) Variable Compleja, *Serie de Compendios Schaum. Mc Graw-Hill.*
[4] Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the AMS*, 30, 161-177.
[5] Weber, K. (2003) Students' Difficulties with Proof.
http://www.maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler.html