C05

NOCIONES MATEMÁTICAS BÁSICAS EN LA FORMACIÓN PROFESIONAL DEL INGENIERO Y NUEVAS TECNOLOGÍAS

Edgardo GÜICHAL, Graciela GUALA, Ana MALET, Viviana OSCHEROV

Universidad Nacional del Sur - Argentina
eguichal@criba.edu.ar

Nivel Educativo: Superior.

Palabras Clave: Educación Matemática, Enseñanza del Cálculo, Nuevas tecnologías y enseñanza, Soportes informáticos, Formación del ingeniero.

RESUMEN

Este trabajo da cuenta de los avances realizados en el marco del Proyecto de Investigación en Educación Matemática: El uso de nuevas tecnologías en la enseñanza del Cálculo que se desarrolla en el ámbito de la UNS. El trabajo de campo se lleva a cabo en el marco de la materia Análisis Matemático I que corresponde a la carrera de Ingeniería Civil. Nuestro propósito es mostrar en esta ponencia el proceso de avance que abarca situaciones de diagnóstico a partir de actividades matemáticas y encuestas e investigación, por parte de los alumnos, acerca de la matemática que "necesita" un ingeniero, realizada a través de búsquedas en la web y mediante entrevistas a docentes y a alumnos avanzados de la carrera. Estas actividades se constituyen en el soporte del diseño de las experiencias en laboratorio referidas a la incidencia de los soportes informáticos en la enseñanza del cálculo.

INTRODUCCIÓN

El proyecto desarrollado en el período 2004-2006 nos permitió analizar e interpretar procesos de enseñanza y de aprendizaje del Cálculo. Trabajamos en la identificación de obstáculos que dificultan la comprensión de los conceptos fundamentales del mismo y generamos propuestas alternativas con la intención de lograr un mejoramiento en el aprendizaje.
Actualmente continuamos esta línea de investigación a través del desarrollo del proyecto: *El uso de nuevas tecnologías en la enseñanza del Cálculo,* en el que nos proponemos indagar y aplicar las posibilidades de las nuevas tecnologías en un campo disciplinar específico que es el de la Educación Matemática, para abordar un contenido determinado: los procesos de visualización y representación en la enseñanza del Cálculo, la resolución de problemas y el uso de Planilla de Cálculo y la generación de criterios para la búsqueda de información relevante en la Web.
Entendemos que la utilización de procedimientos de visualización, como lo han señalado Arcavi (1999) y Tall (1991) constituyen una importante herramienta en la enseñanza, aunque el tema constituya aún un punto de discusión. Como lo expresa D. Tall (1996) "el hecho es que las figuras, *correctamente interpretadas*, pueden jugar un rol muy importante para ayudar a comprender mejor las ideas en análisis matemático".
Planteamos el uso de nuevas tecnologías desde distintos ejes articulados como son:

- los soportes informáticos, los procesos de visualización y representación en la

enseñanza del Cálculo, la resolución de problemas y el uso de planilla de cálculo;
- la generación de criterios para la búsqueda de información relevante en la Web referida al perfil del egresado y la utilización de la matemática como herramienta en su formación profesional.

Hemos seleccionado las siguientes metodologías acordes a los distintos ejes propuestos:
- Una Ingeniería Didáctica para abordar el trabajo referido a los procesos de visualización y representación en la enseñanza del Cálculo; la resolución de problemas y el uso de planilla de cálculo.
- En el marco de la formación de competencias profesionales se trabajará con talleres participativos y análisis de documentos.

El trabajo de campo lo realizamos con alumnos ingresantes de primer año de la carrera de Ingeniería Civil de la UNS.

PRIMEROS PASOS EN EL DESARROLLO DEL PROYECTO

1. Diagnóstico

Al iniciar el curso los alumnos participaron de un diagnóstico en cuyo diseño tuvimos en cuenta, que para la comprensión y manejo de conceptos matemáticos básicos, utilizados en un curso introductorio de Cálculo, es fundamental considerar preguntas que incluyan temas relacionados con:
- Expresiones algebraicas.
- Variables.
- Interpretación del significado de expresiones que podían servir de modelos de situaciones "reales".
- Relación entre magnitudes expresadas en forma verbal.
- El número π.
- Posibilidad de encontrar números racionales o irracionales en un intervalo.
- Números racionales y notación decimal.

En base a ello propusimos dos tipos de actividades relacionadas con:
- el concepto de variable y su reconocimiento en una expresión algebraica.
- el concepto de número real.

Estas actividades se diseñaron no sólo para identificar conocimientos disponibles y obstáculos, sino también con el objetivo de plantear interrogantes que sirvieran como disparadores para generar discusiones en el aula respecto a los conceptos y a las notaciones que permitan acordar un lenguaje común, necesario para una comunicación efectiva respecto de los temas disciplinares.

1.1 Actividades relacionadas con el concepto de variable y su reconocimiento en una expresión algebraica

El desarrollo del lenguaje algebraico y su utilización para diferentes propósitos requiere de la comprensión del concepto de variable como un concepto multifacético que incluye la noción de algo específico desconocido, de número en general, de indicador de una cantidad variable. Así mismo el concepto de variable es fundamental para el uso significativo del Cálculo y en general de la matemática avanzada. Trigueros y Ursini (2003) al caracterizar el concepto de variable distinguen tres aspectos que son: interpretación, manipulación y simbolización de variables. Poniendo el foco en la interpretación de los símbolos literales usados para representar variables propusimos a los alumnos la siguiente actividad[1].

[1] La actividad fue tomada de: Weimberg, A. et al (2004): Students'initial and developing conceptions of variable.

Las preguntas que enunciamos se refieren a la siguiente expresión:

$$\boxed{2\,n+3}$$

a) *¿Ha visto alguna vez expresiones matemáticas de este tipo? ¿dónde?*

b) *¿Puede explicar qué significa el símbolo señalado con la flecha?*

$$2\,\underset{\uparrow}{n}+3$$

c) *¿Podría ese símbolo representar el número 37? Explique por qué.*

d) *¿Podría ese símbolo representar a 27 +15? Explique por qué*

e) *¿Podría ese símbolo representar la expresión 4r + 1? Explique por qué.*

El análisis de las respuestas nos ha permitido elaborar las consideraciones siguientes:
Con respecto al inciso a) la expresión $2n+1$ es conocida por todos los alumnos. Expresan haberla visto de distintas maneras: en la secundaria y en el curso de nivelación; en fórmulas o expresiones de matemática; en funciones; en ecuaciones y funciones lineales; en el colegio; en expresiones matemáticas, ecuaciones y sistemas; en funciones o problemas; en función afín (el gráfico es una recta), en ecuaciones y sucesiones, en funciones y polinomios; en libros del secundario, en despeje de incógnita; en funciones de una variable.
Con respecto al inciso b) las respuestas también son dispares, observándose que el 43 %de los alumnos responde que **n** es una incógnita, mientras que el 28,33% indica que se trata de una variable. En el primer caso el 5 % aclara que puede ser reemplazada por un número y en el segundo 20,83 % aclaran que es una variable independiente. Las demás son todas respuestas individuales de las cuales mencionamos: variable dependiente; algo que se puede reemplazar; pendiente de una recta, el lugar en el que se puede tomar cualquier número; representa un número desconocido; término n-ésimo o último término; coeficiente variable de una función lineal; una constante a la que se le asigna un valor; incógnita que debe ser natural, cualquier número entero.
Hemos observado, desde un primer nivel de análisis, que en la mayoría de los casos en que el alumno en el inciso a) se ha referido a la expresión algebraica como una ecuación, ha respondido en el inciso b) que se trata de una incógnita y, por otro lado, en el caso en que mencionaron a la expresión como función en el caso a) nos hablan de una variable en el b).
Asimismo, el mayor porcentaje de respuestas respecto a que **2n+1** es una ecuación y que **n** es una incógnita, parecería responder a la historia escolar de estos alumnos. En investigaciones anteriores, hemos realizado entrevistas a docentes de Nivel Secundario, que dan cuenta del énfasis que se pone en la resolución de ecuaciones en ese nivel.
Ante la demanda de respuestas que abarcan un mayor nivel de complejidad, el análisis nos permitió reconocer:
En el inciso c) un 26 %, responde: sí, porque puede representar cualquier número real y un 4,20 %, si, porque n puede ser un número natural. En el resto de las respuestas podemos distinguir: un 13 % que interpreta la expresión como una ecuación cuyo resultado es 37, determinando para **n** el valor 17, y en otros casos, asignando a **2n** el valor 37. De las demás respuestas, en general individuales, mencionamos algunas de ellas:
Sí, porque:

- es una incógnita y puede representar cualquier número;
- es una variable, la variable puede tomar cualquier valor;
- la expresión no está igualada a ningún resultado;
- según futuros datos al despejar podría llegar a representar el nº 37;

- podría representar a ese número si toda la expresión es igual a 57;
- tendríamos que resolver o averiguar un valor.

No, porque quedaría como resultado un número real y no sería más una incógnita.

En algunos casos hemos observado respuestas que dan cuenta de una interpretación incorrecta del enunciado. Hipotéticamente consideramos que incide el hecho de seguir pensando en ecuaciones y en la necesidad de encontrar un valor determinado a partir de la manipulación de números. Asimismo, las respuestas que asignan a n un valor natural responderían al uso habitual en los dos niveles del símbolo **n** como número natural.

Con respecto al inciso d) queremos aclarar que el 14,17 % responde sí, sin ningún tipo de aclaración; 11 %, no se o no responde. Los restantes responden: 19,17 %, sí, porque 27+15=42 y puede representar el resultado de una operación; 5, 84 % sí, porque es una variable y puede tomar distintos valores; 3,34 % si, 2(17+15)+3 y aplico propiedad distributiva. De las demás respuestas, en general individuales, mencionamos algunas de ellas:

No porque:

- cualquier número multiplicado por 2 es par y si se le suma 3 resulta un número impar y 27+15=42 es par;
- 3 es el término independiente, por lo tanto no se lo puede modificar por ningún número;
- 2 por algún número no daría 27;
- es una ecuación lineal y por lo tanto obtengo un único valor;
- en realidad podría representar o 27 o 15 o sino el resultado de ambos;
- n es un número no la suma de números;
- una incógnita es un solo número.

Sí porque:

- la variable independiente puede representar también una operación;
- se puede representar 2(27+15) o 2.42;
- si y la variable pasaría a ser una suma;
- la suma de dos naturales expresa otro natural;
- también puede significar cualquier ecuación o expresión numérica.

Con respecto al inciso e) queremos aclarar que el 17,5 % responde “sí” sin ningún tipo de aclaración, 3,34 %, no sin ningún tipo de aclaración, 16 % no sabe o no responde; 5,83 %, si $2(4r+1)$ lo que aplicaríamos es la propiedad distributiva; 4,17 %, si por ejemplo me quedaría un sistema de ecuaciones; 4,17 % sí, porque n puede ser una función y la meto en otra función; 3,34% sí porque puede ser cualquier número real. De las demás respuestas, en general individuales, mencionamos algunas de ellas:

Sí porque:

- dentro de esta expresión existe otra $(4r+1)$;
- aplico la distributiva y tengo otra incógnita;
- es una variable y puede tomar cualquier expresión numérica;
- lo usamos como sustitución; si pero se obtendría otra incógnita;
- una incógnita puede estar dentro de una incógnita;
- de otra expresión se puede haber deducido que esa expresión es igual a n;
- significa que la función se desplaza hacia arriba;
- podría serlo, porque dicha ecuación puede tener más de una incógnita dentro;
- en este caso la variable sería otra función y dependería de r;
- en este caso la variable sería otra función y dependería de r;
- la ecuación no está igualada a nada así que puede tener cualquier resultado y representar cualquier otra expresión;
- se podría, pero se comenzaría a trabajar con dos variables;

- a esa variable se la puede reemplazar por un valor, un binomio, incluso una incógnita.

No porque:

- cada función o problema tiene su forma de representarse;
- a menos que antes haya especificado la igualdad $n = (4r + 1)$;
- es una ecuación lineal y por lo tanto tengo un único valor;
- r no es un número real;
- emplea otra variable, en este caso r.

1.2 Actividades relacionadas con el concepto de número real

De las actividades propuestas seleccionamos las siguientes:

A) Al calcular el valor de $\frac{45}{83}$ con la calculadora de mi computadora, aparece en el monitor el número: 0,63855421686746987951180722891566 3. Este número ¿es racional o irracional?

De las respuestas dadas: el 55,74 % dice que se trata de un número racional y el 42,62 % de un irracional.; con el agregado de una explicación en algunos casos del tipo: es irracional pero la calculadora no puede mostrar los infinitos números que siguen; es racional ya que es un número infinito; es irracional porque en ningún momento esta cifra es periódica; es racional porque la puede expresar como fracción; es racional ya que es un número finito.

Observamos que desde el sistema educativo y de los textos utilizados los alumnos adquieren el uso de reglas que les permiten convertir números periódicos en fracciones, que sin embargo no son utilizadas aquí al plantear una situación fuera del contexto habitual.

B) ¿Qué número suele representarse con la letra griega π ? ¿en relación con qué tipo de problemas lo ha estudiado? ¿puede representarlo usando notación decimal?

- ✓ Respuestas a la consulta sobre el tipo de número:

Irracional, 38,33 %; real, 6,67 %; racional, 6,67%; 3.14, 14,17 %; 180º = π ($\cong$ 3,14), 6,67 %; NC 15,83 %; decimal, 3,3%.

- ✓ Respuestas a la consulta sobre el tipo de problema:

Trigonometría, circunferencia, 40,83 %; problemas de geometría 10,83 %; circunferencia, 15,83 %; áreas y ángulos 7,5 %; NC, 12,5 %

Comentarios de los alumnos

π sirve para marcar ángulos ej: 1/2 π = 90º
Es la cantidad de veces que entra el diámetro de una circunferencia en la propia circunferencia
Usamos 3,14 y representa una aproximación
Pi es un número que representa unidades en radianes. Suele representar ángulos
Es un número real. Se puede emplear en cualquier tipo de problema aunque siempre se lo deja aparte porque su notación decimal es demasiado extensa.
π como número es 3,14 y en el caso de los ángulos es igual a 180º.

- ✓ Respuestas a la consulta sobre la posibilidad de representar π usando notación decimal:

SI, 53,33 %; NO, 15,83 %; NC: 29,17 %

Comentarios de los alumnos

No se puede representar usando notación decimal ya que detrás de la coma hay infinitos números sin ningún orden.
Sí pero se adoptan para trabajar sólo dos decimales después de la coma.
No, ya que es incalculable.

No se puede representar porque es irracional.
Puede ser representado decimalmente pero sin exactitud.
Sí pero es un número largo de escribir.
No se puede porque es una expresión infinita.
Se lo ve con valor finito aproximado.

1.3 Devolución
El análisis realizado a partir de las actividades del diagnóstico se constituyó en el soporte de una puesta en común en la que los alumnos confrontaron sus respuestas con las resoluciones matemáticas esperadas. Se originó así un debate en que se explicitaron una serie de situaciones problemáticas consideradas claves al momento de enseñar y aprender cálculo y en particular se analizaron los distintos comentarios que surgieron con el número π.

2. Encuesta
Teniendo en cuenta que desde nuestro Proyecto nos proponemos el uso de Nuevas Tecnologías, y en ese marco es nuestra intención trabajar con programas amigables utilizándolos como recurso didáctico y como herramienta matemática, nos planteamos la realización de una encuesta que nos permitiera obtener información acerca de las posibilidades de acceso a una computadora por parte de los alumnos, en forma personal, así como a la utilización de algunos de los programas de computación que pueden ser usados en la realización de cálculos de mayor complejidad a los que podrían ser efectuados con una calculadora manual (no programable), en instancias previas al ingreso a la universidad. La consulta se enfocó en las siguientes preguntas:

¿Tiene posibilidad de acceso habitual a una computadora personal?
¿Conoce el manejo de una Planilla de Cálculo, por ejemplo: EXCEL?
¿Conoce el manejo del programa DERIVE?

De las respuestas obtenidas, el 90,11% de los alumnos aseguró tener acceso a una PC; el 80,22% conocía el uso de la Planilla EXCEL, pero solamente el 16,48% conocía el uso del programa DERIVE.

Nuestra consulta se centró en los programas EXCEL y DERIVE, debido a que el primero se encuentra en forma regular como parte del ambiente de trabajo del sistema WINDOWS, mientras que el programa DERIVE es, dentro de los sistemas de cálculo asistidos por computadora (CAS), el que tiene una estructura más amigable y sencilla, ya que es muy fácil comprender el manejo de los menús que permiten realizar los cálculos, sin necesidad de aprender previamente la sintaxis de un lenguaje de computación particular.
Los resultados obtenidos se tuvieron en cuenta en la organización del trabajo en el Laboratorio de Computación.

3. Propuesta de investigación
Teniendo en cuenta la consulta habitual de los alumnos traducida en la pregunta ¿para qué me sirven los conceptos matemáticos que me están enseñando?, hemos querido cambiar el foco y como actividad complementaria a las realizadas en el inicio del cuatrimestre, se les propuso un trabajo en el cual ellos tendrían que responder a las preguntas:

¿Por qué los ingenieros deben estudiar matemática?
¿Qué tipo de matemática deben estudiar los ingenieros?

valiéndose de consultas a profesionales, a alumnos avanzados, Internet, u otros medios.
Podemos decir con respecto a las respuestas, que todos expresan la necesidad de saber

matemática y existen "palabras claves" que están presentes en la mayoría de los trabajos como son: *la matemática como herramienta para el ingeniero* y *la matemática como herramienta para modelar y resolver problemas de ingeniería.* Pero también aparecen otros conceptos relacionando la matemática con la formación del ingeniero y el papel del ingeniero en la sociedad, expresadas por los alumnos como:

Necesidad de razonamiento abstracto
Manejo riguroso de la lógica
Aproximar mediciones
Necesidad de conocer y manejar estadística
Necesidad de nociones de física avanzada
Uso de computadoras
Representaciones en la computadora
Uso de la matemática como lenguaje
La matemática debe expandir la mente
Favorecer la formación de un pensamiento productivo
Diseño de proyectos
Ingeniería como profesión/arte/ciencia
Conocimiento utilizado para desarrollo y beneficio de la sociedad
Así mismo aparece una mención a Arquímedes como quien primero aplica la matemática griega a la ingeniería y una sola referencia a la Geometría como herramienta importante.

Dado que un sólo alumno menciona la Geometría, esto ya nos plantea la necesidad de una reformulación de la encuesta incluyendo una pregunta que oriente al alumno en la búsqueda de modelos geométricos en edificios, estadios, etc, de la ciudad de modo que compruebe la necesidad del uso de la matemática en general y de la geometría en particular.
Por último, es interesante señalar que se observa una estrecha correlación entre las características de los trabajos presentados, en el sentido de quienes realizaron presentaciones más detalladas y con algunas opiniones personales, y los resultados de las evaluaciones ya realizadas, entre los que se cuenta el mayor número de aprobados.

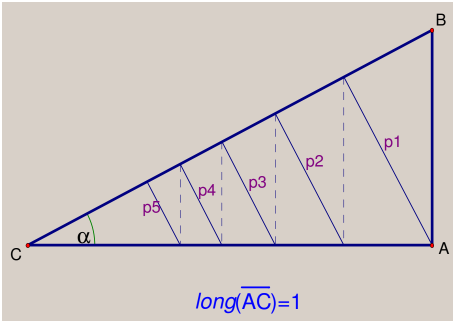
4. Trabajo en laboratorio

Para el trabajo en laboratorio se constituyeron ocho comisiones, que desarrollaron Guías de Actividades[1]. Las mismas incluían un cuestionario final que cada comisión debía responder mediante un informe escrito. Como parte de la primer Guía se planteó a cada comisión el análisis de un problema para cuya resolución numérica se solicitó el uso de la Planilla de Cálculo.
A modo de ejemplo, mostramos aquí los informes de dos comisiones, a las que designaremos con A y B.
El enunciado del problema propuesto es:

1. Dado un triángulo rectángulo ΔABC, donde α es la medida del ángulo en el vértice C (Ver dibujo) y la longitud del lado $\overline{AC}$ es 1, se traza una perpendicular a la hipotenusa $\overline{CB}$. Queda determinado así un segmento de longitud p_1. Desde el punto de intersección con la hipotenusa se traza una perpendicular al cateto $\overline{AC}$ y desde el punto que queda determinado de vuelve a trazar una perpendicular a la hipotenusa, definiendo un segmento de longitud p_2. Si se continúa este procedimiento en forma similar a la ya descripta, se desea calcular las longitudes de los segmentos p_n y las sumas de los mismos, es decir, los números $s_n = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1} + p_n$, que también puede escribirse como

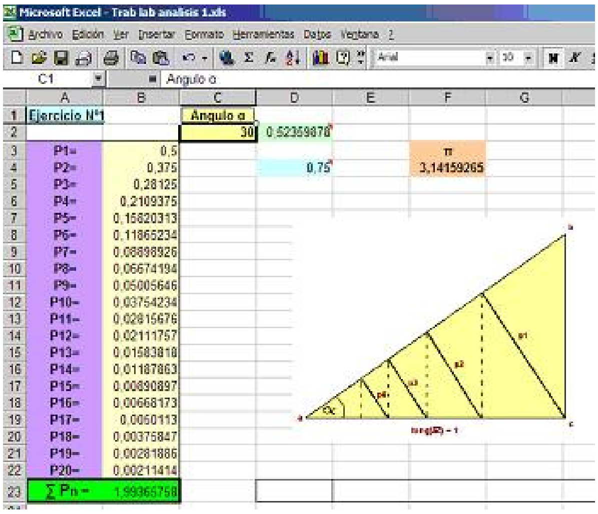
[1] Estas Guías se basaron en la propuesta que se encuentra en: Solow, A. 1999. *Learning by Discovery*.

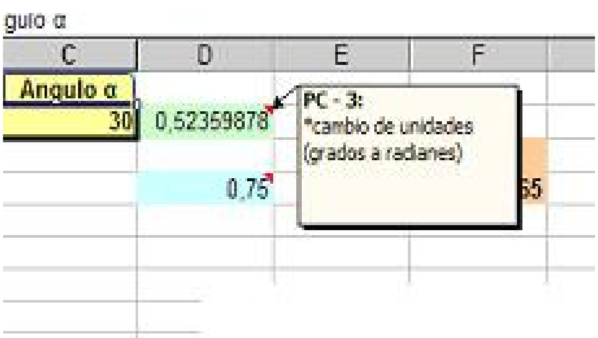
$s_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$, en función del valor α y del número n, que da la cantidad de términos que se suman.



4.1 Comisión A

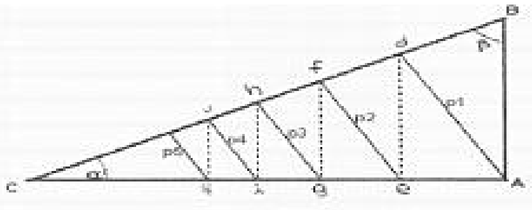
La Comisión A presentó un informe con los cálculos solicitados acompañado de un disquete que incluía el Libro de Excel en el que se podía obtener, en forma dinámica, los resultados requeridos, pudiendo hacer variar el dato correspondiente al ángulo dado en el problema, incluyendo detalles de interés, como la posibilidad de introducir la medida del mismo en grados, que era convertidos a la medida en radianes en forma automática. Agregaron también comentarios que explicaban el cálculo que se efectuaba en esas celdas, como se muestra en las siguientes figuras.





4.2 Comisión B

El informe de esta Comisión muestra los procesos de cálculo en forma muy detallada y precisa que incluye tablas obtenidas con la Planilla de Cálculo, ilustrando los valores obtenidos dando al ángulo un valor particular. A continuación mostramos una copia del informe presentado, que no incluye las tablas antes mencionadas.



$long(\overline{AC})=1$

- Paso 1: Se necesita conocer la longitud del cateto $\overline{ab}$, en base al ángulo α.

Como conocemos la longitud del Cateto $\overline{ca}$, determinamos $\overline{ab}$ con la tangente:

$$Tg\ \alpha = \overline{ab}/1 \quad => \quad \overline{ab} = Tg\ \alpha$$

- Paso 2: Deducimos ahora que el ángulo formado por $\overline{ab}$ y p_1 es igual a α:

Como el triangulo ABC es un triangulo rectángulo, entonces $\beta + \alpha = 90°$. Entonces como β es un ángulo del nuevo triangulo rectángulo formado por el segmento p_1 se deduce que:

$$90° - \beta = \alpha$$

- Paso 3: Calculamos p_1

Como ya conocemos α el segmento $\overline{ab}$ (hipotenusa del nuevo triangulo), calculamos la longitud de p_1

$$Cos\ \alpha = p_1 / Tg\ \alpha \quad => \quad \boxed{p_1 = Cos\ \alpha\ .\ Tg\ \alpha}$$

- Paso 4: Antes de poder calcular p_2 debemos calcular la longitud del segmento $\overline{ed}$. Conocemos p_1 y como antes podemos decir que uno de los ángulos es igual a α, con estos datos podemos calcular ed:

$$Cos\ \alpha = \overline{ed} / p_1 \quad => \quad \overline{ed} = Cos\ \alpha\ .\ p_1 = Cos\ \alpha\ .\ Cos\ \alpha\ .\ Tg\ \alpha$$

$$\overline{ed} = (Cos\ \alpha)^2\ .\ Tg\ \alpha$$

- Paso 5: Calculamos p_2:

$$Cos\ \alpha = p_2 / \overline{ed} \quad => \quad p_2 = Cos\ \alpha\ .\ (Cos\ \alpha)^2\ .\ Tg\ \alpha$$

$$\boxed{p_2 = (Cos\ \alpha)^3\ .\ Tg\ \alpha}$$

- Paso 6: Calculamos $\overline{fg}$:

$$Cos\ \alpha = \overline{fg} / p_2 \quad => \quad fg = Cos\ \alpha . p_2 = Cos\ \alpha\ .\ (Cos\ \alpha)^3\ .\ Tg\ \alpha = (Cos\ \alpha)^4\ .\ Tg\ \alpha$$

- Paso 7: Calculamos p_3

$$Cos\ \alpha = p_3 / \overline{fg} \quad => \quad p_3 = Cos\ \alpha\ .\ \overline{fg} = Cos\ \alpha\ .\ (Cos\ \alpha)^4\ .\ Tg\ \alpha$$

$$\boxed{p_3 = (Cos\ \alpha)^5 . Tg\ \alpha}$$

Y así sucesivamente. De todo esto deducimos que el exponente de la formula de cada p_n en $(Cos\ \alpha)$, corresponde a una sucesión (A_n):

$A_n = 2n - 1$ (son todos los números impares)

$$p_1 + p_2 + ... = p_{n-1} + p_n =$$

$$(Cos\ \alpha)^{(2.1-1)}\ .\ Tg\ \alpha + (Cos\ \alpha)^{(2.2-1)}\ .\ Tg\ \alpha + ... + (Cos\ \alpha)^{(2.(n-1)-1)}\ .\ Tg\ \alpha + (Cos\ \alpha)^{(2.n-1)}\ .\ Tg\ \alpha =$$

Formula:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \left((Cos\ \alpha)^{(2k-1)}\ .\ Tg\ \alpha \right), \qquad \forall\ \alpha}$$

Observando estos resultados consideramos apropiado atender a las observaciones que ha hecho C. Winslow (2003) con relación a los posibles “peligros” que se deben tener en cuenta al diseñar una actividad didáctica basada en el uso de CAS. Mientras que la Comisión A muestra gran habilidad en el manejo del programa no logran expresar una fórmula general como indicaba la consigna. En el informe de la Comisión B se nota un mejor manejo de conceptos matemáticos, que los conduce a la expresión de una fórmula general. Como señala Winslow, citando un trabajo de Usiskin (1994), una computadora permite realizar un ejemplo tras otro con gran facilidad, alentando un razonamiento inductivo, donde las conclusiones están basadas en ejemplos particulares.

Esto daría lugar al debate acerca de la operatividad en matemática y la fundamentación crítica del hacer en función de apartarse de la mecanización del aprendizaje matemático y la construcción de competencias matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

- Arcavi, A. 1999. *The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics.* Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics.
- Peral, L.; Díaz Gómez, J. 2003. Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos Nº* 11. (diciembre) Reporte de Tesis Nivel Superior.
- Solow, A. E. (Editor) 1999. *Learning by Discovery*. MAA Notes 27. The Mathematical Association of America. U.S.A.
- Tall, D. (ed) 1991. Advanced Mathematical Thinking. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Tall, D. 1996: Functions and Calculus*, en Bishop et al (eds): International Handboock of Mathematical Education. Kluwer Academic Publishers*
- Trigueros, M.; Ursini, S. 2003. *First-year Undergraduates' Dificulties in Working with Different Uses of Variable*. American Mathematical Society. CBMS Issues in Mathematics Education, Vol 12.
- Weinberg, A.; Stephens A.; Mc Neil, N.; Krill, D.; Knuth, E.; Alibali, M. 2004. *Student´s initial and developing conceptions of variable*. University of Wisconsin- Madison. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego.
- Winslow, C. 2003. Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering. *Educational Studies in Mathematica* 52: 271-288.