C14

UN ESPACIO PARA DISCUTIR EN EL AULA PROPIEDADES Y DOMINIO DE VALIDEZ DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Carmen SESSA, Diego VILOTTA

FCEN - UBA y Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura / I.S.F.D. Dr. Juan Pujol
Ravignani 1156, Buenos Aires - Las Margaritas 365, Corrientes - Argentina
pirata@dm.uba.ar vilottadiego@arnet.com.ar

Nivel Educativo: Educación Polimodal / Nivel Medio.

Palabras Clave: Función exponencial, Análisis didáctico, Procesos de validación en el aula.

RESUMEN

En esta comunicación nos centraremos en ciertos aspectos de un estudio didáctico que hemos realizado en torno a la función exponencial. A partir de un estudio matemático/didáctico del tema optamos por aprovechar el carácter modelizador de la función para iniciar a los alumnos en el aprendizaje de las funciones exponenciales, sin dejar de lado una cuestión tan importante como la validez de la ampliación del dominio de la función a valores fraccionarios y negativos. Presentamos la secuencia que elaboramos en un contexto de crecimiento poblacional de bacterias, junto con un análisis a priori que se detiene en precisar cómo podrían validar los alumnos la obtención de la imagen para los valores 2, ½ y –1. La puesta en aula realizada nos permitió confirmar la posibilidad de tratar estos temas con los alumnos de secundario. Mostramos algunos fragmentos de la clase realizada donde se puede apreciar la riqueza de generar un espacio como este en el aula, provocando argumentaciones muy ricas por parte de los alumnos y mostrando como esta forma de introducirlos a la función exponencial les permite seguir comprendiendo el modelo lineal al diferenciarlo de otros modelos. Al respecto nos resultó particularmente sorprendente como varios alumnos, luego de encontrar una expresión exponencial, utilizaban y defendían la pertinencia del modelo lineal para calcular la imagen de ½.

DESARROLLO

Ubicados en una posición didáctica que considera esencial la posición de un alumno como sujeto productor en el aula, son muchos los aspectos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de generar un espacio de discusión en el aula sobre algún concepto matemático. Al pensar cómo hacer esto con la función exponencial surgieron dos cuestiones que nos parece importante destacar: por un lado el enfoque matemático que se elija para presentar este concepto a los alumnos y, por otro, muy ligado a lo anterior, la manera en que se vaya abordando con los alumnos la extensión del dominio de validez de la función.

El estudio didáctico de las funciones exponenciales realizado nos ha llevado a delinear cuatro enfoques distintos, apoyados cada uno de ellos en distintas características de la función exponencial. Según el enfoque que se elija, algunas propiedades resultan más inmediatas y otras más lejanas.

Uno de los enfoques consiste en realizar un estudio sobre el origen histórico de la función. En el mismo se puede vislumbrar que la motivación principal fue simplificar los cálculos de productos de números muy grandes que debían efectuar los astrónomos en sus investigaciones. Napier construyó las tablas de logaritmos - históricamente surgen los logaritmos antes que la función exponencial - haciendo corresponder una progresión aritmética a una geométrica[1].

Hay otros dos enfoques que se encuentran generalmente en los libros universitarios y que para desarrollarlos se necesitan conceptos de análisis matemático[2]. Uno de ellos consiste en buscar una función (al principio “no se sabe” cuál es) que cumpla con la propiedad $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ *para todo* x *e* y, donde a partir de la búsqueda de esa propiedad se termina definiendo la función logarítmica como el área bajo la curva 1/x vía una integral y la exponencial como la función inversa de ella. El otro enfoque se basa en definir previamente y cuidadosamente todas las operaciones para cada uno de los subconjuntos de los números reales vía sucesiones y después dar la fórmula de la función que describe la operación con la que se encuentra la imagen para cada valor de la variable independiente.

Un cuarto enfoque consiste en pensar la función exponencial como modelo, por ejemplo de crecimiento poblacional, o de variación de capitales en el interés compuesto. Este enfoque pone de relieve una de los aspectos más importante por la cual matemáticamente son tan importantes las funciones, que es su capacidad de modelizar cuestiones de la realidad. Yves Chevallard, entre otros educadores matemáticos, han subrayado la importancia de colocar este aspecto modelizador en el corazón de la enseñanza (ver por ejemplo Chevallard et al (1997).

A continuación vamos a detallar algunos de los motivos por los que elegimos el cuarto enfoque para trabajar con los alumnos, destacando que fue una constante en todo el estudio matemático/didáctico el cuidado que se tuvo al considerar el dominio de la función. Es decir que esta cuestión que es matemáticamente importante también lo fue en las decisiones didácticas.

Creemos que es posible comenzar con los alumnos el estudio de las funciones exponenciales vía el cuarto enfoque ya que, este carácter modelizador de la función permitiría recuperar del problema aspectos importantes de éstas que, a su vez, puedan ser tomadas como base para ir justificando las distintas propiedades[3].

En este enfoque es muy importante la propiedad

$$f(x+h)=f(x)\cdot cte(h) \quad ,\forall x \text{ [4]}; \qquad (1)$$

y es por eso que muchas decisiones tomadas tienen como intención transmitir a los alumnos esta propiedad. Nos parece importante aclarar que en los libros de nivel superior consultados se toma al problema como una motivación inicial, pero después, para deducir las propiedades, no se apoyan en el contexto del problema, sino que aceptan la validez de todas las propiedades de la potencia de antemano. Nosotros demostramos la validez de la expresión exponencial para valores racionales apoyándonos en esta propiedad y creemos que se podría seguir avanzando aun más en la validación de otras propiedades.

La propiedad que enunciamos más arriba es fundamental a la hora de obtener una expresión de la función que me permita calcular la imagen de distintos valores. Si no se la tiene en cuenta, cuando uno quiere obtener la imagen para distintos valores de la variable independiente, se llegan a expresiones muy engorrosas. Esto nos sirve de móvil para la

[1] Ver por ejemplo el libro de Carl Boyer (1996)

[2] Un ejemplo de estos libros es: (Rey Pastor y otro; 1952)

[3] En (P. Sadovsky, 2005) podemos encontrar esta idea haciendo referencia al modelo lineal: *“...Podríamos decir que el contexto ofrece elementos que la matemática no ofrece todavía: se puede poner en juego la idea de variación uniforme antes de conocer que es una función lineal. La interacción entre el contexto y algunos conocimientos de los alumnos relativos a la proporcionalidad son suficientes para arrancar un proceso de modelización que “arribe” al modelo lineal.”*

[4] Con esta notación queremos decir que para cada *h* hay una constante, que sirve para todo *x*.

primera parte del trabajo que presentamos a los alumnos porque, si bien entienden lo que se les pide, necesitan ir avanzando en algunos aspectos para lograrlo.
Si bien tomamos como punto de partida un problema similar al que se encuentra en un libro de texto del nivel polimodal[1], a diferencia de éste, intentamos abordar con los alumnos la validez de la expresión exponencial para valores decimales y negativos.

Propuesta para la introducción al aprendizaje del tema

La propuesta que hemos armado cuenta con cinco fases que consisten en ir dando respuestas a distintas preguntas a partir de una situación inicial.
Pasamos a mencionar solamente las consignas dadas a los alumnos y los objetivos de cada una de las fases deteniéndonos un poco más en el análisis y desarrollo de la cuarta fase en el próximo apartado.

Consigna de la Fase 1:

> *En un laboratorio, están experimentando con una población de bacterias. Han observado que al reproducirse la masa de la población crece siempre en forma pareja, de manera que en cada hora aumenta un 25%. Al comienzo de la observación, el cultivo de bacterias tiene una masa de 60g. ¿Cuál será la masa de las bacterias después de dos horas?*

Objetivo: Se apunta a que los alumnos comprendan que en esta situación, no puede ser utilizado el modelo lineal para la obtención de nuevos valores. En este problema en particular, significa no poder recurrir al cálculo del 50% de 60 para obtener el incremento de la masa de la población al cabo de 2 horas.

Consigna de la Fase 2:

> *Calcular la masa de las bacterias al cabo de dos horas pero realizando un único cálculo combinado, esto quiere decir: si escriben todo de una vez en la calculadora, apretando una sola vez el signo igual, y, utilizando los datos del problema se debe llegar al resultado.*

Objetivos:
- Se apunta a que los alumnos logren un tratamiento más algebraico de lo numérico.
- Se pretende realizar un análisis el significado de cada signo, cada número y cada término en cada una de las posibles expresiones que elaboren los alumnos.
- Se incluirá también un análisis de la posible equivalencia de las distintas expresiones que se obtengan al dar respuesta a la consigna. Se pretende estudiar también la economía, la claridad y la conveniencia de una u otra expresión.
- También es objetivo de esta fase obtener expresiones que puedan ser trabajadas en instancias posteriores para calcular la cantidad de bacterias en tiempos más grandes.

Consigna de la Fase 3:

> *Calcular la masa de la población de bacterias 20 horas después de comenzada la observación.*

Objetivos: Comenzar a identificar que se necesita el factor que luego será la base de la potencia en la función exponencial - 1,25 en la situación problemática con la que se está trabajando – para obtener dicha masa. Si no se trabaja con este factor las operaciones combinadas se vuelven más largas y complicadas a medida que pasan las horas de observación.

Consigna de la Fase 4:

> *¿Se puede saber que masa hay a la media hora de iniciado el experimento?*

---
[1] (S. Altman, 2002).

Objetivo: Analizar la validez y significado de utilizar exponentes fraccionarios en la expresión obtenida en la fase anterior y entender que no se puede utilizar el modelo lineal para determinar los porcentajes de crecimientos en fracciones de tiempo menores que la unidad. En la situación con la que se está trabajando esto se evidencia al querer calcular el aumento de la masa de la población al cabo de media hora sacando el 12,5% (25:2) de 60.

Consigna de la Fase 5:

Si la observación de las bacterias comenzó a las cero horas de un día ¿Cuántas bacterias había a las 23 hs del día anterior?.

Objetivo: Ampliar el dominio de la expresión exponencial para los exponentes negativos con un sentido para estos valores y una justificación de la extensión. Al darse un retroceso en el tiempo, también es necesario que comprendan la imposibilidad de restar el porcentaje de crecimiento a la masa de la población ya incrementada.

Significado y validez del uso de exponentes fraccionarios en la expresión exponencial

Habiendo mencionado la consigna y los objetivos de la cuarta fase, nos proponemos presentar algunas cuestiones para ser tenidas en cuenta en el desarrollo de esta. Se trata de desplegar posibles soluciones de los alumnos y delinear intervenciones docentes que les puedan permitir avanzar en el trabajo. No se apunta solamente a que los alumnos lleguen a una respuesta correcta sino fundamentalmente que encuentren una fundamentación para el cálculo que realizan. Pensamos que los alumnos van a realizar dos tipos de procedimientos:

Procedimiento 1: Consiste en utilizar el modelo lineal para calcular el aumento de la masa. En estas soluciones se agrega a 60 su 12,5% y se lo puede hacer de diversas maneras. Algunas posibles soluciones serían: 60+12,5% de 60, 60 más la mitad de 15g que es lo que crece en una hora, 60*1,125 si es que el alumno incorporó la idea de llegar al valor final con un único cálculo, etc.

Procedimiento 2: Consiste en reemplazar 20 por ½ (o 0,5) en la expresión que se obtuvo en la fase anterior; es decir que la masa de la población al cabo de media hora se la calcula de la siguiente manera

$$60 \cdot 1{,}25^{1/2} \; o \quad 60 \cdot 1{,}25^{0{,}5} \qquad (2)$$

Teniendo en cuenta las combinaciones posibles, en esta fase se podrían presentar tres posibilidades.

a) Todos los grupos apliquen el modelo lineal. Como todos los alumnos coinciden en el tipo de respuestas, a la hora de discutir las soluciones, los mismos reconocerían las equivalencias en las respuestas. El docente plantearía entonces: al ser el crecimiento parejo, si aplicamos dos veces el 12,5%, es decir 60·1,125·1,125=75,93 *¿coincide con la masa que habían calculado para una hora?*

Observación: Notemos que si bien en el enunciado dice que el crecimiento es parejo, hasta ahora sólo se les había dicho a los alumnos que en una hora el incremento es del 25%, por eso es necesario explicitar aun más que en incrementos iguales de tiempo se tienen porcentajes de crecimientos iguales y que esto se traduce aritméticamente en los dos productos efectuados al calcular la masa al cabo de dos períodos de media hora para ver si coincide con lo sacado anteriormente en una hora. Esta es la característica que la hace una curva suave y no una poligonal con vértices en los valores enteros de x.

Después de esta fuerte injerencia del docente se les pide a los alumnos que determinen nuevamente cual es la masa de la población de bacterias al cabo de media hora. Algunos alumnos pueden buscar por tanteo cuál es el número que multiplicando dos veces a 60 da por resultado 75. Otros quizás busquen por tanteo el número que multiplicado dos veces de por resultado 1,25; en este caso estarían aplicando la propiedad asociativa ya que en vez de multiplicar 60 por un número y después por el mismo estarían pensando en multiplicar primero estos dos números. También es posible que algún alumno aplique un procedimiento más algebraico:

$$60 \cdot x \cdot x = 75 \quad ; \quad x^2 = \frac{75}{60} \quad \textit{por lo que} \quad x = \sqrt{1{,}25} \qquad (3)$$

b) Todos reemplacen el exponente por ½ o 0,5. Si todos los alumnos contestan de esta manera el docente puede preguntar: *¿por qué funciona la cuenta colocando en el exponente ½ si lo que hicieron en los puntos anteriores era con valores enteros?*. Creo que es difícil que los alumnos puedan justificar porqué funciona, pueden argumentar que cuando estudiaron otras funciones siempre funcionaba ponerle valores decimales entonces ahora tiene que funcionar también. En este momento de la clase sería muy importante tener en cuenta como estudiaron la continuidad de otras funciones para hacer referencia a que en ese momento le dieron un significado a los valores no exactos de x.

Una vez agotada esta discusión el docente puede plantearles: *¿no es lo mismo agregar el 12,5% de 60 a 60?* Es muy probable que lo primero que hagan los alumnos es comparar esta cuenta con el resultado que ellos obtuvieron al calcular $60 \cdot 1{,}25^{1/2}$ y vean que no da lo mismo. Luego el docente guiaría la discusión hasta concluir que no pueden calcular el 12,5% de 60 porque si realizan este cálculo dos veces, no se llega al mismo resultado que se obtuvo cuando se calculo la masa de la población de bacterias al cabo de una hora. Aquí el docente puede preguntar *¿en vez de 1,125 que factor hay que poner?*, y se puede continuar en forma similar a la que mencionamos en el caso de que todos los alumnos adoptaran el modelo lineal, con la diferencia de que en este caso son los alumnos los que propusieron colocar ½ en el exponente y ahora confirmarían que existe una justificación para realizar esto.

c) Algunos alumnos apliquen el modelo lineal y otros reemplacen el exponente de la expresión obtenida en la fase anterior por ½. En este caso el profesor pediría a los grupos que se pongan de acuerdo en las respuestas y analicen si las dos son correctas o sólo lo es una de las dos.

Pensamos que en la discusión, los que aplicaron el modelo exponencial van a encontrar argumentos para decirles porque está mal a los alumnos que aplicaron el modelo lineal pero van a tener dificultades cuando quieran argumentar porqué es válido colocar ½ en el exponente.

Si los que hicieron lineal no se convencen de que en el medio no es lineal argumentando que en la primer hora se puede hacer 60 +12,5% de 60 y a esto se le vuelve a sumar el 12,5% de 60, el docente podría preguntarles: "*si aplican este procedimiento, ¿cuál sería la masa de la población de bacterias al cabo de dos horas?"*. Los alumnos verían que aplicando cuatro veces este procedimiento no se llega al 93,75, valor que se habrá obtenido en la fase 1 cuando se calculo la masa de la población luego de las dos horas de comenzada la observación. El docente entonces les diría: "*¿por qué habría de cambiar de golpe la forma de crecimiento en la segunda hora?"*. En la representación gráfica esto se interpretaría como el cambio de pendiente en la poligonal que mencionamos anteriormente.

Luego el profesor plantearía que si en media hora creciera un 12,5%, como el crecimiento es parejo, tendría que cumplirse la igualdad 60·1,125·1,125=75, cosa que no sucede. *¿Cuál debería ser entonces el porcentaje de crecimiento?* De acá en mas se continúa como se describió en los casos anteriores con la particularidad que ahora algún alumno que puso 1,25^1/2 puede decir que lo que él puso, sí funciona. Como se les va a dejar unos minutos para que trabajen solos, y la idea es lograr que se vea en la puesta en común de la clase, la igualdad de lo obtenido entre aquellos alumnos que buscaron una solución por aproximación, aquellos que plantearon una ecuación y lo que reemplazaron en la expresión exponencial pero

sin argumentar en positivo porque funciona.
En todos los casos se concluirá que como el crecimiento es parejo a incrementos iguales de tiempo se tienen porcentajes de crecimientos iguales. También se diría que es válido poner ½ en la expresión exponencial porque: como para dos horas calculamos 60·1,25·1,25, si quisiéramos calcular dos períodos de media hora, la cuenta sería $60 \cdot x \cdot x$ y, como nos tiene que dar 75, la constante (el calor de x en la ecuación) para media hora es $\sqrt{1{,}25}$, es decir que el factor es $1{,}25^{\frac{1}{2}}$.

Comentarios de la clase realizada

Teniendo como principal objetivo explorar el comportamiento de los alumnos al enfrentar la secuencia y con el objeto de profundizar en nuestra comprensión de los procesos de construcción de las nociones que configuran la idea de crecimiento exponencial, decidimos llevar a un curso del nivel polimodal una versión preliminar de la secuencia anteriormente descripta.
La secuencia se llevo a cabo en un tercer año del Colegio Saint Patrick cuando todavía no habían estudiado el tema función exponencial. La clase fue dada por Aníbal Stern con quien Diego se reunió antes para dialogar con él sobre los objetivos y pasos de la secuencia. Hubo un observador por grupo que registró por escrito y grabó lo que sucedía en su grupo. Los registros de la clase se encuentran en el anexo 5 y tratamos de reproducir textualmente las expresiones de los alumnos.
La clase observada se organizó en cuatro grupos de trabajo. Por inconvenientes técnicos, solamente logramos confeccionar un registro completo del trabajo de 3 de los 4 grupo. Del cuarto grupo contamos con algunas intervenciones aisladas.
Seleccionamos algunos aspectos de la clase que nos resultaron interesantes siendo conscientes de que un análisis de mayor profundidad de los registros puede ser de gran utilidad. Las cuestiones consideradas serán ilustradas con fragmentos de los registros.

1. “Hábitos” matemáticos del grupo de alumnos. En el fragmento siguiente se puede observar que los alumnos de este curso ya han trabajado con problemas de modelización de fenómenos por medio de funciones y es un grupo que está acostumbrado a justificar lo que han hecho. Incluso en algunos fragmentos de la clase dejaban de lado algunas respuestas por no saber como justificarlas.[1]

Alumno: Cómo va a ser regla de tres simple b......
*Alumno: Pará, no, **acá tenés que hacer una función**.*
Alumno: ¿Por qué?
Alumno: Porque si. Porque estamos dando eso, b….
Alumno: Y sí, nabo.
*Alumno: Si no después empezás a tirar números verdura y después **¿cómo le explicás como hicimos?***
Alumno: No, esperá. Sabés lo te voy a ....

2. Intentos y dudas en torno a la factibilidad del modelo lineal. El análisis de los registros nos muestra hasta que punto es necesario ese primer momento de discusión entre los alumnos sobre si es valido o no aplicar un modelo lineal

Reflexiones de Diego: recuerdo cuando dialogaba con mi directora y yo le mostraba mi intención de aclarar rápidamente a los alumnos sobre la impertinencia del modelo lineal y ella, con mucha paciencia, me argumentaba sobre la importancia que tenía este momento -. En realidad yo había trabajado un tiempo con mis alumnos siguiendo el

[1] En la segunda clase el grupo 3 reemplazó por un medio en la expresión exponencial, pero, al no poder justificar optaron por aplicar el modelo lineal.

segundo libro de texto que analicé, y el autor propone de una sola vez varias preguntas, como yo se las daba todas juntas a mis alumnos, los que aplicaban el modelo lineal quedaban fuera de la discusión de las restantes preguntas, es por eso que yo en clase aclaraba rápidamente la cuestión. A medida que profundicé el estudio del tema y en particular el armado de la secuencia, he ido cambiado muchísimo los objetivos de la misma. Recuerdo que cuando yo trabajaba con mis alumnos, prácticamente mi único objetivo era que llegaran a la fórmula como una manera de garantizar que se había aprendido lo más importante del tema.

Dos de los tres grupos calcularon el crecimiento durante la segunda hora teniendo en cuenta que el mismo es proporcional al valor obtenido trascurrida la primera hora (al menos se impuso esa postura, ya que la Alumna 5 del grupo 2 de entrada no parece diferenciar los dos modelos):

A2 - bueno, no, acá tiene que haber algo raro, una función, acá hay algo raro
A5 - si una función que sume 15 acá
A2 - no porque después.... tiene que ser que sume el 25%, no siempre es 15 porque después no es 15
A5 - haaaa ..y como vamos hacer
A1 - tenés que hacer 60...
A2 - después de 25 ya no es más 15......
A3 - después de 25 ya no es más regla de tres simple? [1]
A2 - el 25% de 75, ahora es 100 por 75...pero hay que sacar alguna regla, algo, no vamos a estar así hasta.....

Al principio en el grupo 3 consideraron que el modelo es lineal:

Alumno: ¿Hace falta hacer algún tipo de cuenta acá?
Alumno: Le multiplico por (...)
Alumno: ***Si te dice que el 25% aumenta en una hora. Entonces en dos horas aumenta 50%.*** *El 50% de 60 son 30. No vamos a ponernos a dividirle por dos. No nos vamos a poner a joder mucho.*
Docente: ¿Así interpretan ustedes el problema?
Alumno: Si.
Docente: ¿Que dice qué?
Alumno: ¿Cuál es la masa después de dos horas? Y bueno, ahí está. Si aumenta...
Alumno: ***Cada hora aumenta 25, a las dos horas va a aumentar un 50****. Y la masa del principio era 60 gramos...*
Alumno: ***90 gramos***

Este grupo abandona el modelo lineal, pero lo hace después de una intervención del docente (en nuestras conversaciones previas, no había aparecido la posibilidad de esta intervención):

Alumno: Ahhh, y bueno, que querés que ponga 60 más equis por el 25% de 60.
Docente: Digo, mientras tenemos algo que se duplique por hora, ***por ejemplo una hoja de papel. Lo corto, duplica. En un corte tengo dos. ¿En dos cortes?***
Alumno: cuatro
Docente: ¿Y en tres cortes? ¿Seis?
Alumno: Ocho
Docente: Ahhh, ocho. Entonces si vamos de dos en dos... Si dos por cada corte son 6 cortes nomás...
Alumno: Y no...
Alumno: Pero bueno, pero eso es otro caso.....

[1] En este comentario se puede observar otra dificultad para los alumnos: el modelo no es lineal, pero se sigue usando regla de tres, incluso para calcular la masa al cabo de dos horas se hace regla de tres sobre la masa obtenida al cabo de la primera hora.

3. Explicaciones entre pares *a favor* del modelo exponencial. No deja de asombrarnos las explicaciones que se dan entre ellos, muchas veces pueden ser más convincentes que las que las que damos nosotros. En este sentido es muy provechoso estudiar detalladamente los registros, ya que en una futura clase el docente podría tomar los argumentos dados por los alumnos a la hora de iniciar una discusión.

Alumno: le sumaron 15 por hora, ¿y eso no está bien?
Alumna: no
Alumna: puede ser, según más o menos...
Alumna: A mi no me parece
Alumna: A mi tampoco, porque no es que los 60, ***no es que solamente las bacterias originales se están reproduciendo.***
Alumna: Claro, son todas.
Alumna: En lo que se reproducen y después de una hora ya están y se reproducen de nuevo.
Alumna: O sea, cada hora, cada hora, ***es la masa inicial de las bacterias más lo que aumentó.***
Alumna: Claro, o sea que son los 75 gramos.

4. Procedimientos de los alumnos no anticipados por nosotros. Cuando se les pide que calculen la masa de las bacterias al cabo de dos horas hay un procedimiento que no anticipamos:

$$5\cdot(60\times 0{,}25)+5\cdot(60\times 0{,}25)\cdot 0{,}25\,. \qquad (4)$$

Este procedimiento es una combinación de los procedimientos

$$(60+0{,}25\cdot 60)+0{,}25\cdot(60+0{,}25\cdot 60) \quad y \quad \frac{5}{4}\cdot 60+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot 60\right) \qquad (5)$$

porque aparece el 5 de los 5/4 y el 0,25 del 25%. A los compañeros les costó entender este procedimiento.

Alumna: Bueno, acá, esto da 15 y nuestra masa inicial agregada al 25% da 75 gramos. ***Entonces fue cuestión de probar y 15 por 5 da 75****. Sería, esto representaría los 75 gramos del principio. Y lo mismo hice con los 75 gramos, pero a los 75 multiplicándolos por 0,25 que sería el 25%, entonces esto da 18...*
Alumna: coma 75.
Alumna: Y esto más esto...
Alumna: Noooo, yo no entendí nada.
Alumna: Está mal
Alumna: ¿Querés pasar?
....
Alumna: Yo no entiendo esa parte, por qué por 0,25.
Alumno: porque 0,25 es el 25%.
(hablan todos juntos)
Alumna: Yo explico, es lo que sacamos con esta cuenta.
Alumna: Ya entendí
Alumna: (...) sacar el 25%. Entonces, 5 por 60 por 0,25, te da 75, porque acá sacamos el, acá sacamos el 25% de 75, que a la masa de la primera hora ya le agregaron 25%, que fue esto lo que creció, es 75.
....
Alumno: Para conseguir ese 5 tenés que agregar un igual.
Alumno: ***Tenés que tener otra cuenta. No podés****..*
....
Docente: La pregunta es, podés reemplazar ese cinco por el cálculo que vos hiciste para que te de el 5?

Alumna: El cálculo, pero ***primero tengo que decir 15 más cuánto me puede dar 75.***

Los compañeros les cuestionan que el "5" de la expresión obtenida no es un dato del problema, para superar este obstáculo hay que ser capaz de determinar de donde sale el "5" y reemplazarlo en la expresión. La alumna intentó explicar de dónde sale el 5 aunque finalmente la fórmula quedó sin arreglar.

5. Discusiones en torno a la validez del modelo para valores no naturales. Como dijimos en los objetivos generales, uno de los propósitos de la secuencia era estudiar con los alumnos la validez de utilizar exponentes fraccionarios en la expresión exponencial. Si se tiene "incorporada" la continuidad de la función, no habría mayores problemas en aceptar que en el exponente se pueden poner valores decimales, pero esta aceptación puede no estar basada en la comprensión, sino en una especie de "extensión automática" a la función exponencial de la continuidad de otras funciones. Para los alumnos las cosas suelen pasar de manera bastante diferente. En particular en la clase que observamos pasó algo sorprendente: el grupo que encontró la expresión exponencial para valores enteros, después es el que defiende con mayor firmeza la no validez de usar exponentes fraccionarios en la expresión que ellos obtuvieron (nuestro temor había sido que una vez que encontraran la expresión exponencial la reemplazaran sin justificar y que luego fuera muy difícil hacerlos reflexionar sobre esta cuestión). Transcribimos, con comentarios intercalados algunas partes de la puesta en común donde se puede observar las discusiones referidas a este tema.

Docente: No, decile cómo hiciste ...
Alumna1: Bueno. 60 por 1,125 es igual a 67,5 gramos.
Alumna: Punto final.
Alumna1: Punto final.
Docente: 60 por ...
....
Docente: A ver, de dónde sale este 15 dividido dos...
Alumno: y bueno, porque 15 es el 25% de una hora entera...
Docente: Ajá.
Alumno: ... entonces media hora va a ser el...
Alumna1: va a ser la mitad
Alumno: va a ser la mitad
Docente: Ajá. Bien. A ver, el equipo 3.
Alumna: 60 dividido 8... más 60.
Alumno: Pero, pero, ahí yo no entiendo Aníbal una cosa.
Docente: Si...
Alumno: Vos decías que ***para dos horas*** *no podía ser,* ***no podía ser el doble*** *de una hora, porque iba cambiando...* ***Yo no entiendo por qué, para media hora va a ser la mitad de una hora****. No entiendo porque ..*

En el fragmento anterior se puede observar que cuando uno de los grupos está mostrando un procedimiento lineal[1] un alumno de otro grupo plantea el interrogante que desata la discusión (este alumnos en su grupo planteó la posibilidad de poner 0,5 en el exponente pero como todos hicieron lineal y no se ponían de acuerdo su grupo también hizo lineal).

Después de un momento en el que hablan todos a la vez viene el un enérgico diálogo que se desencadena cuando Alejandro dice que hizo como Martina y ella "salta" para aclarar que ella no hizo eso que él dice:

Docente: ¿Se entiende lo que plantea... Alejandro? O sea... A ver alguien que defienda esta, y esta (...)
Alumna: El de 8...
Alumno: porque 8 es una parte... 12 ,5...
Alumno: elevado a la 0,5...

[1] Algunos grupos comenzaron a resolver de distintas maneras pero siempre con procedimientos lineales.

(hablan todos juntos)

*Alumno***: *yo hice como hizo Martina 65 elevado a la 0,5. 1,25 elevado a la 0,5***

Alumna: ***yo no hice eso...***

Alumno: ***Bueno vos hiciste elevado al cuadrado...***

Alumna: ***No lo hice ahí...en la otra...esta funciona para...*** *(se pierde la voz en el montón)*

Docente: Bien. A ver, este grupo falta

*Alumno***:** Para todo funciona esa

Alumna: ... en la otra, pero porque esa funciona para horas...

Alumna: ...... para 1,25 ......

Alumna: ***Esa fórmula funciona para horas. Cuando estás trabajando con 25%.***

Alumna1: si, porque si trabajás con media hora ......

(hablan todos juntos)

Docente: Silencio un poquito, respetémonos ......

....

Alumna: ***¿Qué tiene que ver esa fórmula con la que hicimos hoy para el otro problema?***

Alumno: Pero eso está mal porque ella lo que dice es que si las dos horas no es el doble, media hora no puede ser la mitad.

Alumna: ¿Y quién está haciendo la mitad? ¿Quién hizo la mitad? ¡No es la mitad!

Después, durante la discusión, verifican con la calculadora y le dicen a Alejandro que no le da. ¡Están tan convencidas de que su procedimiento es correcto, que, al sacar con la calculadora lo que hizo Alejandro, y no darles el mismo valor, le dicen que está mal!

Alumno A: ***pusimos 60 por 1,25***

Alumna: ¡Elevada a la 0,5!

*Alumna1***: *¡No te da!***

Alumna: ***¡No te da!***

Alumna: que esta bien para vos Emilio

Alumna: Nada esta bien, nada (protestan contra Emilio)

Alumna1: Te da 67 coma algo...

Alumna: ***esa era nuestra fórmula general pero eso es para cada hora.***

En el registro se puede observar que continúa una discusión bastante larga, algunos comienzan a tomar la postura de Alejandro y él hace una referencia a lo que sucedería al cabo de dos horas si se considera el 12,5% cada media hora. A continuación transcribo algunas partes que nos pueden ayudar a entender porqué los alumnos quieren aplicar el modelo lineal cuando se les pregunta por media hora.

Alumna: (...) ***es súper relativo*** *......... para que se puedan reproducir las bacterias no se que son, tiene que estar 45 minutos no se que cosa, y después de los 45 minutos aparecen los bichitos no se qué,* ***entonces a la media hora sigue habiendo 60****. Oooo, ¿entendés o no? Si te vas a poner a pensar eso...*

....

Alumna: porque no es que, no es que 60 a un minuto aparece 1, a dos minutos aparecen dos tres, cuatro, cinco, no es que va a apareciendo uno por vez, ***capaz que aparecen todos juntos*** *.......*

....

Alumna: No. Si te dicen por qué 50, ¿por qué no puede ser 50? Porque siempre cambia ehhh, el...principio digamos la .... la base, siempre va ser un número mayor, no es que siempre va a ser siempre la base 60, ***pero eso es cuando aumenta, pero para mi que cuando vamos en una hora si va a ser la mitad.***

Alumna: ***pero esta vez si es***

Alumna: ... ***cuando contamos en una hora si es la mitad.***

....

Alumna: cambió la base, porque en una hora crece 25% en dos horas 25 del primer resultado. ***En cambio ahí cuando nosotros hacemos la mitad, es porque siempre tenemos la misma base, usamos 60.***

Alumna: Si, 60 más el 12,5%.

Alumna: ***Porque estamos hablando dentro de la misma hora****.*

....

Alumna: ***Bueno listo está bien pero en esa postura en la media hora entonces no tenés porcentaje.***

Llegado a este punto, el docente corta la discusión y realiza una explicación para justificar el ½ en el exponente. Una explicación muy rápida que la mayoría de los alumnos no sigue (esto se puede ver cuando una de las alumnas más activa de un grupo, al final, después de toda la explicación, pregunta cuál es la que está bien).

Alumna2: ***Anibal entonces al final está mal o no eso.***

Alumna1: ***entonces no es por hora, es la fórmula general nomás.***

Alumna: estaba bien

Docente: ***esta es la que está bien. Porque acá demostramos ......***

6. La regla de tres para el cálculo de valores negativos. Cuando se pregunta por la cantidad de bacterias a las 23 horas del día anterior surge un procedimiento correcto no tenido en cuenta en nuestro análisis que es usar regla de tres simple considerando a 60 gramos como el 125%.

Docente: A ver, ¿cómo calcularíamos si nosotros sabemos que el experimento empieza a las 0 horas? Empezamos con 60 gramos. ¿si? Estamos hasta ahí ¿verdad?

Alumnos: si

Docente: pero, ¿qué masa había a las 23 horas del día anterior?

Alumna: ***A la menos****...*

Alumna: a la menos

Alumna: no, no Aníbal

Alumna: hacé a la menos

Docente: vuelvo a repetir la consigna. El experimento con 60 gramos empezaba a las 0 hora, ¿cuánta masa había a las 23 horas del día anterior?

A2: ***haceme 60 por 100 dividido 125*** *(lo dice despacito a sus compañeras)*

Alumna: pero no es (...) es menos.

Alumna1: ¿y será a la menos 1?

Alumna: ¿pero son 23 horas menos?

Alumna1: no, es una hora menos, ¿no?

A2: ¿48 puede ser Aníbal? Porque ***60 sería entonces el ciento coma veinticinco por ciento.***

Al decir esto escribe en su carpeta:

60---------125%

-------------100%

Aparentemente el docente se vio sorprendido por este procedimientos: cuando le pidió a la alumna que explique, le respondió en términos de ecuación, descolocándola:

Alumna: significa que voy a tener 100% de la hora anterior más 25%, que queda 125%, y el 100% sería 48.

Docente: ¿podés escribir ***la ecuación*** *acá? Porque ahí (...)*

Alumna: ***la que?****, a no, hice con regla de tres simple.*

7. Necesidad de revisar el requerimiento docente de una única respuesta para la producción grupal.

Docente: En este grupo todavía están divididas las aguas, vamos a esperar dos minutitos.

Expresiones del docente como estas -de las cuales se pueden encontrar varias durante las clases observadas- muchas veces surtieron un efecto contrario al que esperábamos. Era nuestra intención que la necesidad de llegar a una respuesta grupal obligara a los alumnos a fundamentar sus posiciones individuales. Sin embargo muchas veces cuestiones extramatemáticas (el liderazgo de algún integrante, o la minoría en que se encontraba alguna posición) hicieron que algunos procedimientos interesantes no llegaran al espacio colectivo. Quizás hubiera sido necesaria una intervención del docente durante la instancia de trabajo grupal para poder sostener democráticamente las confrontaciones de diferentes posturas.

REFLEXIONES FINALES A MODO DE CONCLUSIÓN

Para nosotros era claro que la planificación y análisis de la secuencia no pretendía transformarse en una anticipación de su realización efectiva ni en la producción de un texto para que el docente lo estudie como un libreto. La tarea de analizar y hacer un esfuerzo para imaginar posibles procedimientos de los alumnos fue al mismo tiempo difícil y productora de conocimiento en torno a la temática didáctica de la función exponencial.
A la hora de la producción de la planificación nos fueron apareciendo algunas preguntas de orden general que sirvieron como marco para nuestro trabajo, como por ejemplo:
-- ¿cómo redactar un enunciado de manera de que porte la esencia de lo que se quiere enunciar y que sea comprensible para los alumnos?
-- ¿cuáles podrían ser las intervenciones docentes en caso de que el trabajo de los alumnos se empantane en alguna cuestión?
-- Que todos los alumnos contesten correctamente una pregunta ¿significa que están comprendiendo realmente? ¿Se les puede volver a interrogar sobre la validez de sus procedimientos?

En relación con la temática de función exponencial, mencionamos dos cuestiones que se hicieron explícitas a partir del trabajo:
-- para los alumnos no es natural aceptar que una expresión que funciona para números naturales también va a funcionar para decimales y números negativos (esta fue una hipótesis de trabajo que se vio confirmada durante la realización efectiva de la secuencia), lo cual nos llevó a diseñar actividades para discutir específicamente esta cuestión.
-- las características de la función exponencial hacen que, el momento de estudiarlas, sea también apropiado para profundizar cuestiones donde la función lineal no sirve como modelo. Al querer dar respuesta a las distintas cuestiones que se abordan con el modelo exponencial los alumnos quieren recurrir a procedimientos que son válidos en el modelo lineal. Analizar los límites de un modelo ayuda a comprenderlo mejor.

BIBLIOGRAFÍA

- ALTMAN, Silvia; COMPARATORE, Claudia; KURZROK, Liliana (2002) *Matemática Polimodal*. (Longseller. Bs. As.).
- BOYER, Carl (1996). *Historia de la matemática*. (Alianza. Madrid).
- CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; Y GASCÓN, Joseph (1997). *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. (Horsori. Barcelona)
- REY PASTOR, J., PI CALLEJA, P., TREJO, C. (1952) *Análisis Matemático*, Volumen I. (Kapelusz. Bs.As.)
- SADOVSKY, Ptricia (2005) *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* (Ediciones del Zorzal. Bs. As.)
- VILOTTA, Diego (2007). *Función Exponencial.* Tesis de Licenciatura en Didáctica de la Matemática, UNNE.