C23

ANÁLISIS ONTO – SEMIÓTICO DE UNA TAREA QUE EXIGE CAMBIOS DE ESCALAS: REFLEXIONES DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS

Patricia DELLAMEA[1], Silvia ETCHEGARAY[2], Silvia COLOMBO[2]

[1]*Universidad Nacional del Nordeste (UNNE – Corrientes) San Roque 556 (3500) Resistencia, Chaco, Argentina*
[2]*Universidad Nacional de Río Cuarto, Ruta Nac. Nº 36 Km 601 (5800) Río Cuarto, Argentina*
patriciadellamea@yahoo.com.ar setchegaray@unrc.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Polimodal (Enseñanza Media).

Palabras Clave: Función, cambios de escalas, análisis onto-semiótico.

RESUMEN

El siguiente trabajo de investigación didáctica es parte de nuestro trabajo de tesina correspondiente a la carrera de Licenciatura en Didáctica de la Matemática, que se dicta en la Universidad Nacional del Nordeste (Corrientes). En el mismo se pretende indagar acerca del uso de las escalas en los gráficos cartesianos y el rol que ellos juegan para la comprensión de la noción de función. A partir de investigaciones didácticas que develan el uso transparente y limitado que se hace de los gráficos cartesianos en la educación secundaria y que resaltan la importancia de las escalas en las representaciones gráficas de las funciones, más la detección en libros de textos nacionales de "*una ausencia marcada de tareas escolares que movilicen cambios de escalas*" nos propusimos realizar un análisis onto– semiótico a una tarea específica convencidos que nos puede ayudar a avanzar en tal problemática. Con dicho análisis se trató, por un lado, de explicitar la trama de relaciones que se ponen en juego ante una actividad que haga funcionar operatoriamente el cambio de escala y por el otro, de poder formular hipótesis sobre posibles puntos críticos del conocimiento que podrían darse en un posterior proceso de enseñanza y aprendizaje.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación didáctica es parte de nuestro trabajo de tesina correspondiente a la carrera de Licenciatura en Didáctica de la Matemática, que se dicta en la Universidad Nacional del Nordeste (Corrientes). El mismo se desarrolla en el marco de la TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS (Juan D. Godino, 2003). Nos proponemos a partir de las herramientas didácticas que nos brinda esta teoría, realizar un análisis sistemático de los objetos matemáticos, y las relaciones semióticas que se ponen en juego ante la actividad mencionada por E. Lacasta y M.Wilhelmi[1] a propósito de sus investigaciones sobre el gráfico cartesiano de funciones. Lo hacemos con el fin de poder identificar, describir y explicar algunos **significados institucionales**[2] y posibles **conflictos semióticos**[3] relacionados con dicha actividad.

[1] El gráfico cartesiano de funciones como "medio material": el paso de la representación gráfica a la analítica, con especial interés en el problema de las escalas (2001)
[2] Significado que emerge de las prácticas operatorias y discursivas y que se comparten en el seno de una institución.
[3] Disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa y que pueden explicar las dificultades y limitaciones de los procesos de enseñanza.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

El trabajo investigativo que realizamos es fundamentalmente de tipo cualitativo. En efecto, tratamos de describir, a través del análisis de una actividad específica, concepciones compartidas por un grupo de personas, ***significados institucionales,*** acerca del uso del gráfico cartesiano en la enseñanza de las funciones y de la necesidad de considerar a las escalas de los gráficos como variables didácticas fundamentales en el proceso de *transposición didáctica.* De este modo, y para avanzar en el análisis epistémico de la actividad es que realizamos la indagación sistemática del contenido de las funciones semióticas puestas en juego a partir de la resolución de la misma por un sujeto experto,[1] con el fin de poder anticipar potenciales conflictos semióticos que nos ayudarán a delimitar el significado institucional pretendido.
La fiabilidad y validez de los resultados, puesto que se trata de una investigación cualitativa, no se medirán por medio de índices cuantitativos, sino que será a través de una descripción objetiva y minuciosa de las herramientas de análisis que utilizaremos y que pueden afectar, de algún modo, la interpretación de los mismos.
Consideramos que este tipo de análisis nos ayuda a reflexionar sobre lo que podría estar sucediendo en una clase de matemática ante esta tarea, como así también, nos provee información relevante para poder construir **el significado institucional de referencia**. Es sabido que, en este marco de análisis didáctico, la caracterización de este significado es el punto inicial para abordar la construcción de una secuencia didáctica que ayude a mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje ligados a la noción de función.

HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE UN SIGNIFICADO DE REFERENCIA

Con el propósito de transparentar en la producción escrita el marco referencial que ponemos en funcionamiento ante la resolución de la actividad, se explicitará el significado con el cual se usarán las definiciones de algunas nociones matemáticas consideradas en este trabajo.
La **escala** es la relación matemática que existe entre las dimensiones reales y las del dibujo que representa la realidad sobre un plano o un mapa. Se puede escribir en forma de fracción donde el numerador indica el valor del plano y el denominador el valor de la "realidad". En el marco de este trabajo se hace necesario hacer una adaptación de esta definición pues ¿Qué significa "realidad", en el contexto intra - matemático en el cual se plantea la situación problema? Y en consecuencia ¿Qué significaría **valor de la "realidad"**?. En este sentido caracterizamos a la **escala** en cada eje cartesiano como la relación matemática entre un número real y el segmento que representa la unidad en la recta.
Teniendo en cuenta la adaptación realizada de la noción de escala consideramos entonces que hay un **cambio de escala** cuando se produce un cambio de la unidad de medida con la que se representa un número real en cada eje. En consecuencia, cuando hablamos de **relaciones entre las escalas** de los ejes nos referimos a una relación de relaciones, cuya notación mas usual es: Esc: a:b. Por ejemplo, Esc: 5000:5 indica que la relación entre las escalas de los ejes es de 5000 a 5 y que además sobre el eje **x** la unidad representa a 5000 mientras que sobre el eje **y** la unidad representa a 5.
En los trabajos de investigación perteneciente a E. Lacasta y M. Wilhelmi (2001*)* se afirma que en toda representación gráfica de funciones las escalas deben ser tenidas en cuenta como variables didácticas y que el uso sistemático de escalas 1:1 condicionan la interpretación y resolución de problemas que exigen una relación desigual entre las escalas. Según los autores, la actividad siguiente: *Calcule de forma aproximada la solución mayor de la ecuación*

[1] De acuerdo a la teoría en la cual encuadramos nuestra investigación, las soluciones expertas quedan a cargo de los investigadores, matemáticos o profesores de matemática.

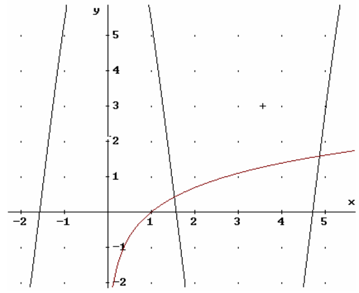
$10\cos x = \ln x$. *¿Cuántas soluciones tiene dicha ecuación?* "obliga" a un cambio de relación entre las escalas de sus ejes cartesianos para su resolución.

Es por ello, que nos propusimos **indagar sobre la riqueza epistemológica y didáctica de dicha tarea.**

A continuación presentamos la solución experta[1] al problema planteado por Lacasta y Wilhelmi a propósito de sus investigaciones sobre los gráficos cartesianos[2].

Unidad de análisis 1: Gráfica 1

Esc: 1:1



Si se trabaja con escala convencional 1:1 es posible afirmar que en el primer período de $10\cos x$ hay dos puntos de encuentro de ambas funciones y por lo tanto tenemos dos soluciones de la ecuación, pero no se aprecia cómo crece la función logaritmo.

Sistema de prácticas previos

Considerando que el problema esté planteado para segundo año del nivel polimodal (de acuerdo a la Ley Federal de Educación) o para quinto año de la escuela secundaria, se supone que el alumno ya ha trabajado con anterioridad, al menos con gráficos cartesianos de funciones lineales, es por ello que le resultan familiares términos tales como coordenadas cartesianas, origen de coordenadas, unidad de medida; y que también conoce o debería conocer la técnica para representar pares ordenados en ejes cartesianos. Por otro lado, y de acuerdo con los programas oficiales de nuestras instituciones, ya se trabajó con funciones trigonométricas y logarítmicas, por lo tanto, se debería tener una idea aproximada, al menos, de la forma de ambas curvas ($\cos x$ y $\ln x$) como así también de algunas de las propiedades de las funciones. El hecho de conocer algunas propiedades de $\cos x$ nos pone ante condiciones potenciales de poder trasladarlas a la nueva función $10\cos x$ ya que sólo cambia el intervalo de variación de la imagen, produciendo en una gráfica conjunta una onda de mayor amplitud pero con el mismo período en relación a la del $\cos x$.

Ahora bien, ¿por qué hemos comenzado con esta relación entre las escalas? A partir de la indagación que hemos realizado sobre libros de textos más utilizados en nuestras aulas y considerando prácticas cotidianas, nos permitimos asegurar que en las representaciones cartesianas, casi constantemente se utilizan relaciones 1:1 entre las escalas de los ejes, o a lo sumo, si se cambian las escalas se mantiene la misma relación entre ellas como así también las señales guías de los ejes[3] normalmente se indican con números enteros. Es por ello que si un alumno intenta resolver el problema gráficamente es muy probable, que utilice como primer intento tal relación entre sus ejes. Es esta la razón por la que comenzamos la resolución empleando dicha relación.

Asimismo, el enunciado del problema se refiere a una situación intra-matemática potencialmente realizable: resolver una ecuación donde intervienen funciones conocidas. Una

[1] tal cual lo define la Teoría de las Funciones Semióticas (Godino, 2003), las soluciones expertas quedan a cargo de los investigadores, los matemáticos o profesores de matemáticas

[2] Para la resolución de la misma se utilizó el programa Derive

[3] Esta expresión se usa con el significado que le asigna Lacasta en el artículo que genera esta investigación.

primera estrategia de resolución, y tal vez reproduciendo conocimientos anteriores, podría pensarse la resolución numérica del problema probando con valores pequeños de x correspondientes a los primeros períodos, y por tanteo aproximarse a uno de los resultados buscados; pero los valores con los que hay que trabajar son en su mayoría números irracionales. En consecuencia, la estrategia del tanteo puede resultar altamente tediosa, por lo que se hace necesaria la búsqueda de otros modos de resolver la ecuación. Al ser una expresión muy compleja no resulta sencillo hallar una expresión de x por medio del despeje, que permita encontrar todas las soluciones; por lo tanto **la solución gráfica** se presenta como una alternativa muy viable a considerar y más aún teniendo en cuenta que el problema pide una "solución aproximada". Para el análisis semiótico es crucial reconocer el significado que se le puede estar dando a esta expresión, ya que la resolución del problema exige un cambio de registro, y este cambio de registro puede estar planteado por el significado de esta expresión. Es decir, lo que desbloquea la situación es el cambio de registro; y es, sin duda esta forma de significar ***"solución aproximada"*** lo que puede estar movilizando la recurrencia al gráfico, debido a que normalmente, los gráficos cartesianos funcionan como ideogramas, tal como lo destaca Lacasta[1]. Además, la noción de que los gráficos son utilizados como ideas aproximadas es lo que queda como saber institucionalizado.
Por otra parte, las acciones que requiere la resolución del problema están vinculadas a la construcción de las gráficas de las funciones asociadas a cada miembro de la ecuación; esto implica reconocer en cada una el comportamiento de las mismas, identificar sus puntos singulares; considerar dominio e imagen de cada función; como así también, manejar la técnica para la representación cartesiana de puntos en el plano, esto es, ubicar los ejes de abscisas y ordenadas y el origen de coordenadas, elegir una escala conveniente para cada eje, identificar que a cada par ordenado de una función le corresponde un punto del plano cuya abscisa y ordenada son la primera y la segunda componente y que el dominio es un subconjunto del eje horizontal o eje **x,** y que sobre él se sitúa la variable independiente. También hay que identificar que el codominio es un subconjunto del eje vertical o eje **y,** y que sobre él se sitúa la variable dependiente.
La tarea se presenta a través de un lenguaje verbal y matemático, se utiliza la expresión $10 \cos x = \ln x$ con la que frecuentemente se presentan las ecuaciones, en la cual la letra ***x*** representa a un elemento genérico pero con distintos tipos de representaciones; siendo concientes de que el tipo de actividades que normalmente vive en las aulas y el trabajo realizado en libros de texto, para un alumno de secundario, la palabra $\cos x$ remite a una representación en el sistema radial, y más aún cuando se trabaja en ejes cartesianos[2]; como así también para logaritmo natural la representación asociada es en el sistema decimal. Se plantea entonces, una necesidad de establecer relaciones entre el sistema decimal y el radial, de modo que la ***x*** tenga el mismo status para ambas funciones.
El lenguaje utilizado refiere a objetos de naturaleza conceptual (función coseno de x, función logaritmo natural de x, noción de escala) y de naturaleza operatoria (resolver una ecuación, determinar la cantidad de soluciones, etc.); y aparecen objetos matemáticos tales como la notación con la que se indica la escala que se emplea. Esta notación, tal como se adelantara en el comienzo de este artículo, **Esc 1:1** lleva implícito tanto la relación entre las escalas de los dos ejes, como la relación que define cada escala en cada eje, lo cual plantea una complejidad semiótica que se debe tener en cuenta a la hora de diseñar la actividad para el aula.
Esta gráfica representa las dos primeras soluciones de la ecuación planteada, entonces, una respuesta probable, acerca de la cantidad de soluciones que tiene esta ecuación sea **dos**, ya

[1] Determinación de concepciones y funcionamiento del gráfico cartesiano de funciones: Problemática didáctica.(2000)
[2] Como así también, si se trabaja con cos x en un triángulo se lo relaciona con el sistema sexagesimal, casi nunca se ve en un triángulo llamar $\pi/4$ al ángulo de 45°.

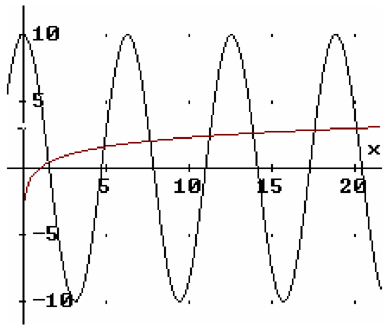
que eso es lo que les muestra el dibujo. Investigaciones[1] realizadas al respecto han demostrado que los alumnos, en su mayoría, en la interpretación de la gráfica de función tienden a centrarse en el número finito de puntos representados en el dibujo, y esto les impide reflexionar sobre el comportamiento de la función en otros intervalos o en formal global.

Sistemas de prácticas emergentes

Lo primero que emerge es que cada miembro de la ecuación tiene asociada una función diferente, que provienen de distintos contextos; la función $y = 10\cos x$ proviene de un contexto trigonométrico, mientras que la función $y = \ln x$ del analítico. Y además, que cada función tiene asociada propiedades y características que las distinguen.
Además, para resolver la tarea es necesario que el alumno tenga algún tipo de representación para ambas funciones, por lo menos en cuanto a la forma de sus gráficas; pero para dar respuesta al problema, se debe poner en relación directa y funcional el registro gráfico de ambas funciones; y esta necesidad de relacionarlas surge de la tarea misma. Esto es, leer e interpretar gráficamente el comportamiento de una curva en función de la otra; para esto se hace necesario primero que se representen en un mismo gráfico, segundo analizar el comportamiento de ambas funcionando **juntas**, para poder identificar nuevos puntos singulares, y reconocer que los puntos en que las dos curvas coinciden representan la condición de igualdad que plantea la ecuación.

Unidad de análisis 2: Gráfica 2

Esc: 5: 5



De este gráfico se puede concluir que en cada período de $10\cos x$, $\ln x$ lo corta dos veces, por lo tanto, en cada período la ecuación $10\cos x = \ln x$ tendría dos soluciones y que además esas soluciones son todas positivas.
Pero todavía no se puede determinar cuántas son debido a que con la nueva escala en cada uno de los ejes 1: 5 tampoco se aprecia el crecimiento de logaritmo natural.

Sistemas de prácticas previos

Para esta tarea, los significados que se deben poner en juego de los conceptos de función periódica y función continua, son los que permiten aceptar que, como $10\cos x$ tiene período 2π y está definido para toda la recta real (propiedades trasladas de la función $\cos x$), entonces el gráfico se puede dibujar con trazo continuo para valores mayores de x; y además el dibujo tiene ondas que se repiten. Asimismo, con la función logaritmo natural se puede deducir que como sólo se la define para valores reales positivos, entonces, la curva de logaritmo natural no va a cortar al eje **y**.
Pero, ¿qué trabajo gráfico permite seguir avanzando? El avance en la búsqueda de soluciones conlleva un cambio de escala; y el primer cambio que se podría estar haciendo es el de cambiar las escalas en los dos ejes por igual, manteniendo la relación entre ellas. Por ejemplo

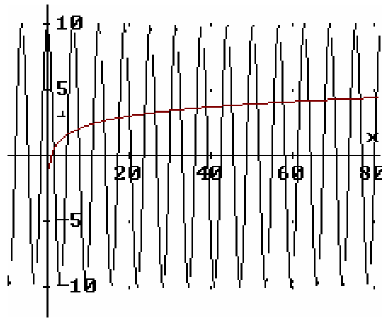
[1] Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones de estudiantes de bachillerato. Crisólogo D. Flores (2004).

Esc: 5:5; ya que existe un trabajo institucional que refuerza esta idea; la manera de planteo de actividades que existen en las instituciones[1] podrían estar conduciendo a la idea de que se deben cambiar las dos escalas por igual.

La decisión del cambio de escala está obviamente determinada por un conocimiento previo que se pone a funcionar cuando se relacionan propiedades de ambas funciones (continuidad y periodicidad). En otras palabras, el alumno puede "sospechar" la existencia de más soluciones de las que en primera instancia pudo visualizar por las propiedades de las funciones y es por ello, que decide cambiar de escala en los ejes para "ver" en la misma superficie mayor cantidad de representación de la situación.

Sistemas de prácticas emergentes

Se resignifican las propiedades de periodicidad y continuidad de las funciones que son propiedades particulares de funciones diferentes, pero que la actividad obliga a relacionarlas, permitiendo su funcionamiento en ambas funciones acopladas. La tarea no sólo mueve a relacionar ambas funciones, sino que además requiere una confrontación entre el gráfico 1 y el 2, esto es analizar comportamientos de ambas funciones en un gráfico y en otro, extraer conclusiones que de alguna manera permitirán una reinterpretación del problema, por ejemplo identificar más soluciones de las que se habían hallado en el gráfico 1.
Por otra parte, como se anticipara el cambio de escala permite el avance en la búsqueda de respuestas para el problema planteado, pero al llevar a cabo este cambio y no cambiar la relación entre las escalas, el ideograma que se genera es equivalente al anterior. Éste es el emergente más importante que hay que reconocer para que en el próximo paso se avance en el cambio de la relación entre ellas.



Unidad de análisis 3: Gráfica 3

Esc: 20:5
Trabajando con esta relación se puede apreciar que el crecimiento de $\ln x$ es muy lento, con respecto al crecimiento de x, de esta manera, uno podría suponer que si existe una máxima solución se encontrará para valores de **x** más grandes. Esto obliga a centrarse en la ampliación de la escala sólo correspondiente al eje **x.**

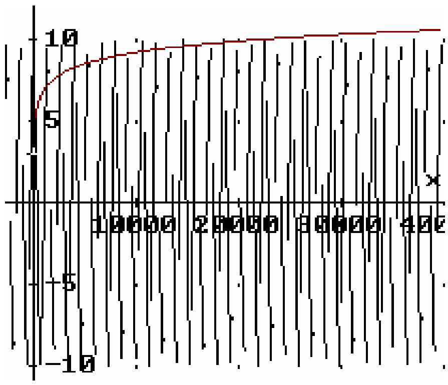
Sistemas de prácticas previos

La información que brindan los gráficos anteriores resulta insuficiente para dar respuesta al problema planteado, es por ello, que se hace necesario recurrir a una nueva relación entre las escalas; pero este cambio en la relación entre las escalas produce un dibujo que, con respecto a su forma, poco tiene que ver con las ondas de coseno. Por ello para reinterpretar la información del gráfico, hay que reconocer en principio que las funciones que aparecen allí son las mismas que las dibujadas anteriormente; y que por lo tanto, siguen siendo válidas las mismas propiedades: $10\cos x$ tiene periodo 2π y es continua, y $\ln x$ también tiene un comportamiento continuo.

[1] Llámese libros de textos, clases de matemáticas, profesores de matemática, etc.

Sistemas de prácticas emergentes

La lectura e interpretación que se puede hacer de este gráfico, podrían llevar a admitir que logaritmo natural tiene un comportamiento constante; proposición errónea, pero que en apariencia es lo que muestra el dibujo, y esto podría conducir a una respuesta falsa, "**la ecuación tiene infinitas soluciones**".
Pero para que se pueda reconocer a partir del gráfico que no hay infinitas soluciones habría que poner en juego la noción de que el logaritmo natural es una función creciente, y por lo tanto ese comportamiento que aparenta en el dibujo no es real. O sea, **habría que cuestionar lo que devuelve el gráfico de la función logaritmo en esta superficie acotada a partir de propiedades que se conocen de la función**.
Nuevamente lo que permite un avance, es el cambio de relación entre las escalas, sin embargo, este cambio de relación se produce en detrimento de la forma de las gráficas; las ondas características de la función coseno se van diluyendo, pero esto, sin que dejen de representar la misma condición de igualdad que propone el problema; en otras palabras, **se cambia la relación entre las escalas pero la idea que se representa sigue siendo la misma.**
Esta acción lleva implícita el reconocer que las funciones que se representan siguen siendo las mismas ($y = 10\cos x$; $y = \ln x$); y que por lo tanto, las propiedades atribuidas a cada una siguen siendo válidas para este nuevo gráfico.



Unidad de análisis 4: Gráfica 4

Esc: 10000:5

Con esta nueva relación se puede observar que hay un punto en donde la curva de $\ln x$ supera el valor 10, y que es un poco más que $x = 20000$. Por lo tanto, ya parece natural preguntarse, ¿para qué valor de x el logaritmo natural es 10? Dicho valor corresponde a $x = 22026{,}46579$ y entonces se tiene que $10\cos x = -7{,}25045616$.
En consecuencia, podemos decir que la solución máxima se encontrará alrededor de $x = 20000$. Ese valor pertenece al período 3183 de $10\cos x$, de este modo, como en cada período hay dos soluciones, podríamos tener 6365 o 6366 soluciones, según que, si en dicho período $\ln x$ corta una o las dos ramas de $10\cos x$ antes de sobrepasarlo.

Sistemas de prácticas previos

Este nuevo gráfico admite distinguir con mayor precisión que las soluciones no son infinitas pero sin embargo, con respecto a la cantidad de soluciones no brinda ningún tipo de información directa, es decir observando el gráfico es imposible determinar la cantidad de soluciones.
Este cambio en la relación entre las escalas permite confirmar que la ecuación tiene un número finito de soluciones; sin embargo, no permite identificar la cantidad; es por ello que hace necesario realizar algunos cálculos pertinentes. Es así que se establece que el valor exacto de x que le hace corresponder 10 a logaritmo natural, es 22026,46579 y para dicho valor de x, coseno asume uno distinto, por lo tanto, $10\cos x$ y $\ln x$ no se cortan en ese punto esto permite concluir que la solución aproximada rondará el valor x = 20000.
En cuanto a la cantidad de soluciones, primero hay que establecer el período de $10\cos x$ que le

corresponde a 20000, esto implica determinar, aproximadamente, la cantidad de veces que 6,28... (período del coseno) "entra" en 20000. El precisar que el período del coseno que le corresponde a 20000 es el 3183 requiere reconocer por un lado que 2π es equivalente a 6,28...y entonces 20000 dividido 6,28...da como resultado aproximado 3183,098... y por otro lado, que dicho resultado indica la cantidad de veces que se repite 2π hasta llegar a 20000. Sabiendo el período al que pertenece el valor x = 20000 y, que por cada período se tienen dos soluciones, nuevamente haciendo las cuentas se determina la cantidad de soluciones; 6365 ó 6366 soluciones dependiendo de que en el último período se corten una o dos veces[1]. Como estamos trabajando desde la idea de ***"solución aproximada"*** el hecho de que en el período 3183 sean una o dos las veces que se cortan $10\cos x$ y $\ln x$ resulta irrelevante para la resolución del problema.

Sistemas de prácticas emergentes

Como veníamos considerando en las unidades de análisis anteriores, el alumno debe concebir que lo que tiene que representar son dos funciones diferentes que se deben ensamblar una con la otra para analizar el comportamiento en conjunto, esto está movilizado por la misma tarea, y el gráfico sirve como un medio de control del discurso de lo que se quiere comunicar, y es mediante esa interacción con el gráfico que se podrá dar respuesta a todas las cuestiones planteadas.

El cambio de la relación entre las escalas es el elemento necesario para considerar en el *mellieu* y así construir la solución buscada; pero a medida que se aumenta la relación entre las escalas se deforman las curvas que representan a las funciones asociadas a cada miembro de la ecuación; sin embargo, necesariamente **para hacer emerger la solución buscada** se debe reconocer que **si se cambia la relación entre las escalas, la idea que se representa sigue siendo la misma**

A MODO DE SÍNTESIS DEL ANÁLISIS SEMIÓTICO "A PRIORI"

Relaciones semióticas y potenciales conflictos semióticos

El análisis semiótico realizado sobre la resolución de la tarea propuesta por Lacasta y Wilhelmi, nos permitió describir algunas relaciones semióticas que se ponen en juego ante esta actividad matemática y formular hipótesis sobre potenciales puntos de conflicto que podrían aparecer cuando los alumnos, mediados por un docente, interactúen con dicha situación.

A continuación describimos brevemente relaciones semióticas (RS) necesarias de establecer para resolver la situación y posibles conflictos semióticos (CS) que pudimos detectar a través del análisis realizado. La forma de comunicación que hemos elegido es puntualizar las relaciones semióticas con sus posibles conflictos asociados.

RS 1: Asociar el gráfico 1 con el 4 mediante la relación: "*Los dos representan la misma idea*".

En efecto, para resolver gráficamente la ecuación $10\cos x = \ln x$ hay que tener una idea de cuál es la forma que presentan las gráficas de cada una de las funciones asociadas a cada miembro de la ecuación y de su comportamiento, ya que al utilizar una relación desigual entre las escalas la función $10\cos x$ se deforma bastante. Como se puede apreciar a medida que la relación entre las escalas aumenta, más se deforma la función. En su tesis doctoral, Chauvat

[1] Este software no permite determinar la cantidad de veces que corta $\ln x$ a $10\cos x$ en el último período; sin embargo, trabajando con el software "GRAPHMATICA" se puede determinar que en el período 3183 coseno y logaritmo natural se cortan una sola vez.

define la noción de "gráficos geométricos equivalentes" que nos permite interpretar este fenómeno:..*"dos gráficos geométricos son equivalentes si se deducen uno del otro por un cambio de escala: cambios eventuales de origen y/o de graduaciones"...(Chauvat, 1998-1999)*
Esto es así pues al cambiar la relación entre las escalas, se genera el mismo ideograma, asociado a una misma función. En otras palabras, el alumno debe identificar que, tanto la gráfica 1 como la gráfica 4, representan la misma idea. Sin embargo, esta relación sabemos que no se adquiere de forma espontánea, sino que se debe construir a partir del planteo de actividades y reflexión sobre su resolución, en donde se favorezca el cambio de escala en los ejes y el cambio de relación entre escalas. Ésta es la razón fundamental por la que consideramos de un gran potencial didáctico-matemático a esta actividad.
A partir de este análisis determinamos el siguiente conflicto semiótico que podría surgir asociado a esta necesaria relación que el alumno debe establecer para poder avanzar en la resolución de la tarea:

CS 1. 1: Reconocer en un único grafico el comportamiento oscilatorio de la función coseno y la continuidad del logaritmo.

A través de los diferentes gráficos se puede tener una idea aproximada del comportamiento de una función con relación a la otra: en cada período de $10\cos x$, $\ln x$ lo va a cortar 2 veces. De esto se podrá concluir que por cada período tendremos 2 soluciones y además que las mismas serán positivas. Ahora bien, ¿relaciona naturalmente el alumno, que si dos curvas coinciden en un punto entonces ese punto es solución de una ecuación? Este interrogante devela nuevas relaciones que debe poner en juego el alumno y explicitar para resolver la situación. El admitir que los puntos en que ambas gráficas coinciden son soluciones de la ecuación lleva asociada la siguiente relación:

RS 2: Reconocer que por cada período hay dos soluciones positivas

Pero para identificar esta relación hay que considerar por un lado, el significado de función periódica, es decir, una función tiene período 2π si verifica que $f(\alpha+2\pi)=f(\alpha)$ para todo α perteneciente al dominio de f; y por otro lado que $10\cos x$ tiene período 2π.
Por otro lado, generalmente, cuando se trabaja con funciones trigonométricas se utiliza 2π como expresión para referirse al período de las mismas y no la expresión 6,283... asociada a dicho número irracional, por lo tanto esto podría ser fuente de algún nuevo conflicto semiótico.
En consecuencia, aceptar que, tanto la gráfica 1 como la gráfica 4 representan la misma idea, es decir son gráficos geométricos equivalentes, es lo que va a permitir admitir que si en el primer periodo de $10\cos x$, $10\cos x$ y $\ln x$ se cruzan dos veces, entonces lo mismo deberá ocurrir en los otros períodos, relación semiótica que se torna necesaria para poder seguir avanzando.
Además, con respecto a la expresión: "positivas" que indica el signo de las soluciones, hay que tener en cuenta el valor representativo que para esta situación tiene el gráfico, ya que se hace visible la existencia de que las soluciones son positivas sólo reconociendo la propiedad de que el logaritmo es una función creciente.
Ahora bien, a partir del análisis realizado a esta relación podemos objetivar los siguientes conflictos semióticos:

CS 2. 1: La interpretación gráfica de las soluciones de una ecuación.

En efecto, generalmente las ecuaciones con una variable se resuelven de forma analítica, la resolución gráfica de ecuaciones está asociada en la escuela secundaria con los sistemas de ecuaciones. La representación gráfica de los mismos es utilizada en las aulas como un recurso ostensivo que da mayor significación a las prácticas algebraicas, el método gráfico de resolución de sistemas de ecuaciones resulta sumamente evidente, intuitivo y elemental; lo que conduce a una utilización transparente del gráfico cartesiano de funciones.

CS 2. 2: El reconocimiento de la existencia de una gran cantidad, pero finita, de soluciones para una ecuación

Tal como es sabido a través de investigaciones en Didáctica de la Matemática, en el trabajo algebraico con ecuaciones éstas se resuelven, por lo general, como si hubiere un único valor para la "incógnita a develar" es por ello que existe una fuerte resistencia por parte de los alumnos a aceptar la posibilidad de que una letra pueda representar a un conjunto de valores como solución de una ecuación.

Consideramos que explicar este fenómeno desde este marco conceptual nos permite poner en evidencia, en esta situación particular, que: el análisis onto-semiótico y la reflexión sobre los gráficos, puede llevar a plantear algunas hipótesis sobre el comportamiento de las gráficas para aquellos valores que no aparecen en el dibujo. Estas hipótesis estarán relacionadas con algunas propiedades importantes de las mismas, tales como la continuidad y periodicidad de $10\cos x$, su cota superior e inferior; como así también, la continuidad y crecimiento de $\ln x$, las que se supone han sido estudiadas anteriormente; y que deben ponerse en funcionamiento en algún momento del proceso de resolución de la tarea; ya que las mismas conducen a reconocer que para algún valor de x, $\ln x$ superará a $10\cos x$ y por lo tanto las soluciones no serán infinitas. De este modo, para aproximarnos a la solución buscada se hace necesario un cambio de escala en el eje x, y habrá que ir probando distintas relaciones entre las escalas hasta encontrar la que resulte más adecuada para responder a la cuestión inicial. Es así como, analizando la situación particular desde el marco teórico que sustenta este trabajo nos permitió dejar al descubierto la red de relaciones semióticas necesarias que sustenta el sistema de prácticas matemáticas que se despliega ante la pregunta ¿qué significa resolver esta ecuación?

Volviendo a nuestro problema, vemos que los gráficos brindan buena información acerca de la solución del mismo; podemos predecir, por ejemplo, que las soluciones son muchas pero no serán infinitas. Pero, no es posible responder con exactitud cual es la mayor, ni cuántas soluciones tiene la ecuación. De la lectura de los gráficos si nos preguntamos ¿Cuál es el máximo valor de x para el cual $10\cos x$ y $\ln x$ se cortan por última vez?, podemos suponer que la máxima solución de la ecuación $10\cos x = \ln x$ se encuentra alrededor de x = 20000.

Ahora bien, para determinar la cantidad de soluciones hay que establecer una relación dialéctica entre conocimientos aritméticos y la gráfica; es decir de las gráficas se puede predecir el comportamiento de las funciones, pero no se puede precisar, por ejemplo, la cantidad de períodos que existen entre $x = 0$ y $x = 20000$, es ahí donde se debe poner en juego algunas relaciones y nociones aritméticas. Primero se debe determinar a qué período de $10\cos x$ corresponde 20000, para lo cual se debe reconocer que la amplitud de cada período es de 6,28...lo que permite determinar cuántas veces 20000 contiene a dicho período, y luego sabiendo que por cada período hay dos soluciones, hacer la multiplicación correspondiente para llegar a los resultados buscados. Estas relaciones nos ponen ante la evidencia de nuevos potenciales conflictos como:

CS 2. 2. 1: El establecimiento de una biyección entre números reales (con distinta representación) para la graduación del eje x

Normalmente al representar funciones trigonométricas para la graduación del eje x se consideran los múltiplos de π y de $\frac{\pi}{2}$, como por ejemplo, $\frac{1}{2}\pi$, π, $\frac{3}{2}\pi$, 2π, etc. y no es habitual utilizar sus correspondientes expresiones numéricas como expresiones equivalentes. Para encontrar la solución de este problema se hace necesaria la representación decimal de números reales para la graduación del eje x. Esto puede ser causa de un conflicto, ya que no sólo hay que utilizar una relación desigual entre las escalas, sino que además para el eje x hay

que elegir una escala con números reales muy grandes. El análisis y la reflexión sobre los gráficos, y la búsqueda de la mayor solución en un contexto intra-matemático, es lo que lleva a los cambios de las escalas del eje **x**, utilizando números cada vez más grandes, y al cambio de relaciones entre las escalas.
En las prácticas habituales, frecuentemente se tiende a representar gráficamente funciones en planos cartesianos utilizando siempre el mismo tipo de graduaciones para cada uno de sus ejes. En efecto, para funciones trigonométricas se utiliza el sistema radial y para funciones logarítmicas el sistema decimal de números reales, mientras que en este caso se hace necesario utilizar el sistema decimal como representante del sistema radial, de modo que los valores de abscisas tengan el mismo status para ambas funciones. O sea, estamos en presencia de un nuevo conflicto:

CS 2. 3: La representación de dos curvas en un mismo plano cartesiano

En efecto, con frecuencia, para representar gráficamente diferentes funciones se utilizan distintos planos cartesianos, son pocas las veces que en un mismo plano cartesiano se representan dos o más funciones. Esto sucede, casi exclusivamente en la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones o cuando se trabaja, a nivel algorítmico, con una función y su inversa (por ejemplo, la función exponencial y la función logarítmica). Normalmente, el gráfico cartesiano de funciones es utilizado como la culminación de una secuencia, la representación gráfica se reduce a un proceso algorítmico (a partir de la fórmula se construye la tabla y luego se grafica la función). En la enseñanza se priorizan las representaciones gráficas en las que dada la fórmula hay que construir la curva correspondiente y no aquellas representaciones que tengan como propósito que el alumno pueda retener la imagen de una curva representada gráficamente, esto es, que logre reconocer el trazo sobre el plano cartesiano junto con todas las propiedades asociadas a ella. En otras palabras, el gráfico cartesiano aparece como un fin en sí mismo y no como una herramienta del trabajo matemático tal como es señalado por E. Lacasta Z. y M. Wilhelmi(2001) en sus trabajos de investigación.
Para finalizar, vale destacar que con este análisis onto – semiótico de la actividad matemática desarrollada para la resolución del problema planteado, se pone al descubierto la complejidad de relaciones semióticas que se deben poner en juego, y potenciales conflictos semióticos que las mismas pueden generar, determinando así el significado institucional pretendido. Esto nos permite asegurar que en el "mellieu" de una futura secuencia didáctica, se deben considerar como constituyentes esenciales para la producción del conocimiento además del cambio de escala, reconocido por E. Lacasta y M. R. Wilhelmi, las relaciones semióticas detectadas a través de este análisis. Consideramos este hecho como un aporte esencial al trabajo de los investigadores citados.

BIBLIOGRAFIA

CHAUVAT, G. 1998 – 1999. *Courbes et fonctions au college.* Petit X n° 51. pp 23 – 44
FLORES, C. D. 2004. *Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 7 Núm. 3. pp 195 – 218
GODINO, J. D 2003. *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico – semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Cap. 3, 4, 7 y 9 – Soporte electrónico www.ugr.es
LACASTA, E. 2000. *Determinación de concepciones y funcionamientos del gráfico cartesiano de funciones: Problemática didáctica.* Departamento de Matemática e Informática. Universidad Pública de Navarra (España)
LACASTA, E. y RODRÍGUEZ W 2001. *El gráfico cartesiano de funciones como "medio" material: el paso de la representación gráfica a la analítica, con especial interés en el problema de las escalas.* Soporte electrónico elacasta@unavarra.es, mwilhelm@udep.edu.pe