C29

ANALISIS DE ESTRATEGIAS: UN ESTUDIO DE CASO PARA LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

María B. BOUCIGUEZ, Liliana IRASSAR, María de las Mercedes SUÁREZ

Facultad de Ingeniería – Escuela Superior de Ciencias de la Salud. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Av. del Valle 2737 – 7400 Olavarría - Argentina
boucigue@fio.unicen.edu.ar lirassar@fio.unicen.edu.ar msuarez@fio.unicen.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Polimodal / Nivel medio, Educación Superior.

Palabras Clave: función cuadrática, ecuación de segundo grado, transferencia de aprendizaje, ingreso universitario.

RESUMEN

La propuesta presenta el análisis de algunas estrategias desplegadas por los ingresantes a Medicina de la Escuela Superior de Ciencias de la Salud de la UNCPBA en la resolución de un problema correspondiente a Funciones Cuadráticas. Dado que la carrera es de las denominadas no matemáticas, se considera adecuado proveerlos de una "caja de herramientas" matemáticas que les permita la interpretación y manejo de modelos.
Damos cuenta de un análisis previo, en el cual el problema es abordado en relación a los contenidos conceptuales y procedimentales involucrados y las respuestas esperadas; y otro posterior, centrado en las estrategias desplegadas por los alumnos en la resolución. Considerando las condiciones que influyen en una situación de examen se han observado y analizado también algunas estrategias desplegadas en las clases prácticas.
Si bien nuestro estudio es de carácter exploratorio, detectamos que el registro algebraico tiene más presencia que los otros en las respuestas.
En lo relevado en este artículo se observa que la mayoría de los estudiantes manifiestan una ausencia notable de invariantes operatorios para enfrentar el problema, con predominio de los aspectos procedimentales por sobre el uso del carácter conceptual de las operaciones asociadas con el objeto matemático función detectándose un uso reiterado de algoritmos.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo damos cuenta de un análisis en las estrategias desplegadas por los estudiantes en la resolución de un problema correspondiente a Funciones Cuadráticas que se aplicó a un grupo de ingresantes a la carrera de Medicina de la Escuela Superior de Ciencias de la Salud de la UNCPBA. Considerando las condiciones que influyen en una situación de examen se han observado y analizado también algunas estrategias desplegadas en las clases prácticas_y si bien las estrategias involucran combinación de tratamientos y conversiones entre registros de representación se ha detectado que en algunas situaciones los estudiantes las reducen a algoritmos.

ALGUNOS ASPECTOS TEÓRICOS

El concepto de función ha sido objeto de gran número de investigaciones en el campo de la Didáctica de la Matemática y desde enfoques muy diversos.
Luisa Ruiz Higueras (1998) llevó a cabo una de ellas con el propósito de identificar distintas concepciones de función y en sus conclusiones sobre las definiciones dadas por los alumnos expresa: “Nuestros alumnos de secundaria manifiestan en general una concepción de la noción de función como un procedimiento algorítmico de cálculo... Podemos decir que sus definiciones no determinan el objeto función, sino las relaciones que han mantenido con él”
Para expresar la relación entre dos variables se utilizan fundamentalmente tablas de valores, expresiones algebraicas y gráficos de sistemas de coordenadas. Durante largo tiempo se les enseña a los alumnos cómo construir tales representaciones y los métodos para manipular dichas representaciones, pero aún así los alumnos presentan dificultades en torno a la conversión entre los sistemas gráfico y simbólico del objeto matemático funciones.
El conocimiento matemático tiene, entonces, unas características propias que hacen que no sea posible el acceso a él sino recurriendo a una variedad de registros de representación. Entre éstos el lenguaje natural, no obstante ser el registro semiótico por excelencia, no es más que uno entre otros; y al igual que el resto, no es autosuficiente para movilizar conocimiento matemático. La particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación, distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes.
En general, sucede que la coordinación de los registros de representación no aparece como contenido explícito de enseñanza en el nivel educativo polimodal, lo cual hace que los estudiantes tengan dificultades para realizar cambios de registro. Se desaprovecha así la complementariedad que dicho manejo permite y su potencialidad para evitar en el alumno la confusión entre el objeto matemático y sus representaciones. Esta deficiencia se revela en la dificultad de los estudiantes para formular sus explicaciones. Con frecuencia los docentes suelen describir situaciones en las cuales los alumnos “saben más de lo que son capaces de expresar y redactar”.
Guy Brousseau, quien toma las hipótesis centrales de la epistemología genética de Jean Piaget como marco para modelizar la producción de conocimientos, sostiene al mismo tiempo que el conocimiento matemático se va constituyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otros problemas. Brousseau concibe la matemática como un conjunto organizado de saberes producidos por la cultura (Sadovsky, en Alagia, H.; Bressan, A.; Sadosky, P. 2005).
La concepción de la matemática como un producto de la cultura permite distinguir la diferencia entre el conocimiento que se produce en una situación particular y el saber estructurado y organizado a partir de sucesivas interpelaciones, generalizaciones, puestas a punto, interrelaciones y descontextualizaciones de las elaboraciones que son producto de situaciones específicas. Resulta entonces que no se puede acceder al saber matemático si no se dispone de los medios para insertar las relaciones producidas por la resolución de un problema específico en una construcción teórica que abarque dichas relaciones. En palabras de Brousseau (1986): *“un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que él adquiera”*.
Por otra parte, Godino (2002) define a las matemáticas “*... como quehacer humano, lenguaje simbólico y sistema conceptual”*. Este autor considera necesario distinguir en las matemáticas por lo menos estos cuatro aspectos esenciales, mutuamente imbricados, que deben ser tenidos en cuenta en la organización de su enseñanza:
a) Las matemáticas constituyen una actividad de resolución de situaciones problemáticas de una cierta índole, socialmente compartida. Estas situaciones problemáticas se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internas a la propia matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los

objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc.).
b) Las matemáticas son un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones-problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje, implica unas reglas de uso que hay que conocer y su aprendizaje ocasiona dificultades similares al aprendizaje de otro lenguaje no materno.
c) Las matemáticas constituyen un sistema conceptual, lógicamente organizado y socialmente compartido. La organización lógica de los conceptos, teoremas y propiedades explica también gran número de las dificultades en el aprendizaje.
d) La búsqueda de relaciones entre los diversos objetos matemáticos pone en juego razonamientos inductivos y plausibles, pero la estructuración de los resultados se realiza de acuerdo con la lógica deductiva.
Las matemáticas constituyen, por tanto, una *realidad cultural* configurada entre otros por conceptos, proposiciones, teorías (los objetos matemáticos) y cuya significación personal e institucional está íntimamente ligada a los sistemas de prácticas realizadas para la resolución de las situaciones-problema.
En nuestro caso específico trabajamos con un grupo de ingresantes a la carrera de Medicina, cuyo perfil corresponde al de las carreras denominadas *no matemáticas.* Teniendo en cuenta esto, consideramos que es necesario crear un contexto donde los conceptos matemáticos, en tanto medios para la resolución de problemas, sean utilizados como posibilidad de poner en juego herramientas de validación propias de la disciplina.
Asimismo, en nuestra labor docente adherimos a la idea de que la modelización matemática implica múltiples procesos de pensamiento, entre ellos: emplear herramientas matemáticas para operar racionalmente a nivel del modelo matemático y obtener la solución del problema original; aplicar el modelo a la situación para describirla; y evaluar la solución matemática en términos de ajuste y pertinencia. Por esta razón tratamos de mantener una visión de la enseñanza que tenga en cuenta la generación de retroacciones entre quienes comparten la misma comunidad y con la mediación de quienes representan el saber cultural - los docentes -. Intentamos que nuestros estudiantes logren respuestas a problemas particulares, a través de las cuales se puedan posteriormente abordar cuestiones que van más allá del contexto que las hizo observables, con el fin de atender al carácter social y cultural de la construcción del conocimiento. En este marco, consideramos adecuado orientar a los estudiantes en el proceso de reconstrucción de un repertorio de modelos matemáticos "ya hechos" (objetos culturales); esto es, proveerlos de una suerte de "caja de herramientas" matemáticas. Es por ello que en el problema que analizamos no se requirió de la instancia "poner en ecuación" (dicho de otro modo, de "diseñar el modelo").
Tal como dijimos, función cuadrática es un conocimiento disponible y los estudiantes ya han trabajo en el nivel anterior con la metodología de resolución de problemas, no obstante, es preciso fundamentar nuestra opción por la resolución de problemas en el trabajo en el aula. Desde un enfoque ontosemiótico Godino (2002) sostiene que, como consecuencia de la conceptualización del conocimiento matemático, "conocer" o "saber" matemáticas no puede reducirse a identificar las definiciones y propiedades de los objetos matemáticos. Debe implicar también ser capaz de usar el lenguaje y el sistema conceptual matemático en la resolución de problemas y aplicar constructivamente el razonamiento matemático. Un sujeto no puede atribuir un sentido pleno a los objetos matemáticos a menos que éstos se relacionen con la actividad de la que indisolublemente provienen. En consecuencia, la actividad realizada con el fin de resolver problemas es uno de los pilares del aprendizaje significativo de las matemáticas. Esta actividad es esencial en el aprendizaje de la disciplina, además de una fuente de motivación intrínseca hacia la misma, ya que permite contextualizar los conocimientos y también atribuir significado a las prácticas de índole matemática realizadas, mediante el reconocimiento de una finalidad o intención en las mismas. Es por ello que en nuestro trabajo en el aula se hace importante hincapié en la resolución de problemas, propiciando el trabajo del estudiante con las diferentes formas de representación de las

funciones y teniendo en todo momento el objetivo de contribuir al logro de una transferencia desde lo intramatemático a lo extramatemático.
Consideramos que la transferencia del aprendizaje se produce cuando el aprendizaje, en una situación determinada, puede ser utilizado para facilitar e influir en el aprendizaje en otras situaciones. Lo central de la transferencia del aprendizaje consiste en determinar en qué modo y hasta qué nivel influirá la adquisición de conocimientos, en relación con una situación de aprendizaje en determinado contexto.
Si bien función cuadrática es un contenido tratado en el nivel anterior, éste y otros temas (conjuntos numéricos, funciones, trigonometría, etc.) se abordan mediante clases teórico-prácticas en el Curso de Nivelación a manera de revisión y para orientar hacia los objetivos del ingreso a esta carrera. Centrada nuestra mirada en el contenido *funciones*, el análisis de las respuestas de los estudiantes revela que éstos se limitan al registro en el cual está planteada la pregunta o recurren al registro algebraico. Es posible que este último sea el dominante en las clases en el nivel medio. La descripción en lenguaje natural de las visualizaciones de los registros gráficos revela, en general, "ingenuidad" en la redacción de las respuestas.

DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Enunciado:
En un laboratorio se realizó un estudio en una colonia de microorganismos, sin proporcionarles alimento durante todos los días que duró la investigación, y se estableció que la cantidad m (en millones) de microorganismos variaba en función del tiempo (en días) transcurridos desde que se originó el estudio, según la siguiente fórmula:

$$m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2},$$

determinar
a) ¿Con qué cantidad de microorganismos se comenzó?
b) ¿Cuál fue la mayor cantidad de microorganismos obtenida?
c) ¿Desaparecen todos los microorganismos en algún momento? Si es así, ¿cuándo?

ANÁLISIS PREVIO DEL PROBLEMA

Del análisis del problema del problema respecto de los contenidos conceptuales y procedimentales abordados y de las respuestas esperadas, se obtuvo la siguiente categorización:
Análisis en relación con:

a) Contenidos implicados en la prueba

	Conceptos	**Procedimientos**
	Función cuadrática	
Inciso a	Valor de función en un punto	Resolución numérica
		Resultado del análisis cualitativo
Inciso b	Condición de vértice	Resolución numérica
		Resultado del análisis cualitativo
Inciso c	Ceros de la función	Identificación de situación
	Dominio de función	Resolución numérica
		Resultado del análisis cualitativo

b) Afirmaciones de conocimiento o respuestas adecuadas.

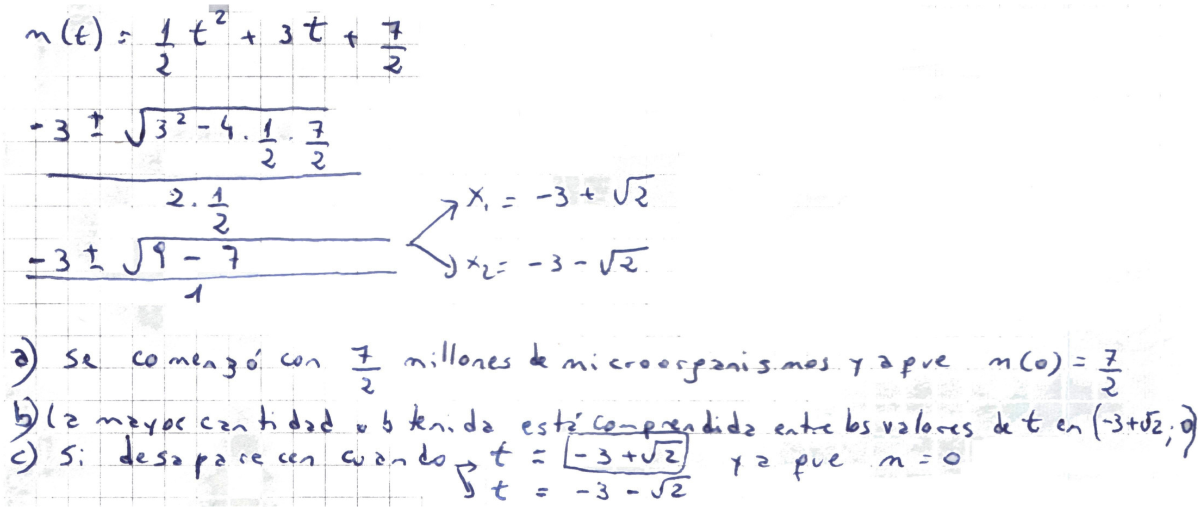
	Item
Inciso a	Resolución numérica
	Análisis de datos cualitativos
Inciso b	Condición de vértice
	Resolución numérica o por tanteo
	Análisis de datos cualitativos
Inciso c	Identificación de situación
	Resolución numérica o por tanteo
	Dominio de función
	Análisis de datos cualitativos

Tabla 1

RESULTADOS

Del total de estudiantes que se presentaron al examen se consideró una muestra de 57 seleccionados entre los que tenían algún desarrollo del problema. El análisis de las estrategias desplegadas por los alumnos en la resolución del problema nos permite obtener un perfil del grupo, con las siguientes características:
Respecto del inciso a, un 39 % de los alumnos realizan correctamente la resolución numérica y el análisis cualitativo de los datos.
En cuanto al inciso b, un 46 % de los alumnos realizan correctamente la resolución numérica y el análisis cualitativo de los datos, aunque un número menor de alumnos explicita la condición de vértice. Se puede considerar, sin embargo, que poseen este conocimiento porque finalmente han dado una respuesta correcta a dicho inciso.
Cabe acotar que aproximadamente la mitad de los alumnos que identifican favorablemente el vértice de la parábola, lo hallan por medio de tanteo por tabla. Esto evidencia alguna dificultad en el tratamiento analítico de la situación. De todas maneras este tipo de respuestas se consideraron correctas pues no había ningún condicionamiento acerca de su resolución.
En cuanto al inciso c, el grupo comparte un conocimiento procedimental -que es la utilización de la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado- aunque no identifica la situación en la cual es aplicada la ecuación (no la formalizan). Parecería ser que tienen asociada esa fórmula a la función cuadrática pero no su interpretación.
Aparece una buena conceptualización del dominio de la función ya que el 53 % de los alumnos descarta correctamente una de las soluciones de la ecuación cuadrática en el contexto del problema.
Comparando los análisis de datos cualitativos de los distintos ítems, se observa que el correspondiente al inciso c tiene un mayor número de respuestas positivas, probablemente porque la transferencia de los datos obtenidos del desarrollo intramatemático al extramatemático son más directos. Por ejemplo, es más sencillo interpretar $t = 7$ como 7 días y más dificultoso interpretar $m(0) = 7/2$ como 3,5 millones de microorganismos iniciales. En las imágenes siguientes se muestran dos respuestas dadas por los alumnos donde se evidencia esta afirmación (Figuras 1 y 2).

Alumno 1



$m(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2}$

$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$

$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 7}}{1}$ $x_1 = -3 + \sqrt{2}$, $x_2 = -3 - \sqrt{2}$

a) se comenzó con $\frac{7}{2}$ millones de microorganismos ya que $m(0) = \frac{7}{2}$

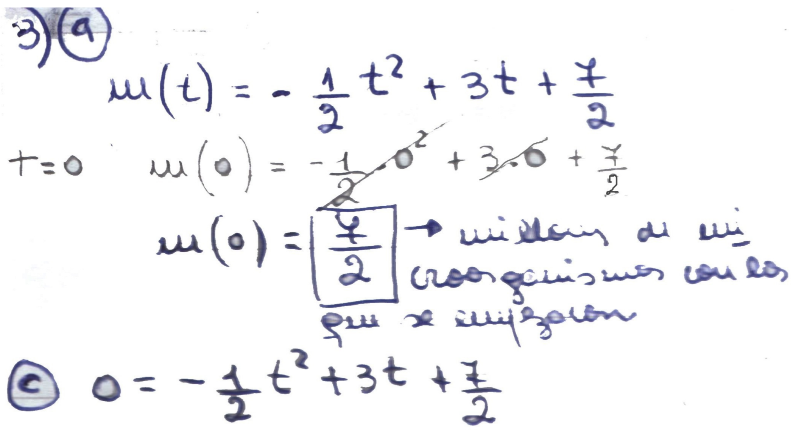
b) la mayor cantidad obtenida está comprendida entre los valores de t en $(-3+\sqrt{2}; 0)$

c) si desaparecen cuando $t = \boxed{-3+\sqrt{2}}$ ya que $m = 0$

$t = -3 - \sqrt{2}$

Figura 1

Alumno 2



3) (a)

$m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2}$

$t=0$ $m(0) = -\cancel{\frac{1}{2} \cdot 0^2} + \cancel{3 \cdot 0} + \frac{7}{2}$

$m(0) = \boxed{\frac{7}{2}}$ → millones de microorganismos con los que se empezaron

(c) $0 = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2}$

Figura 2

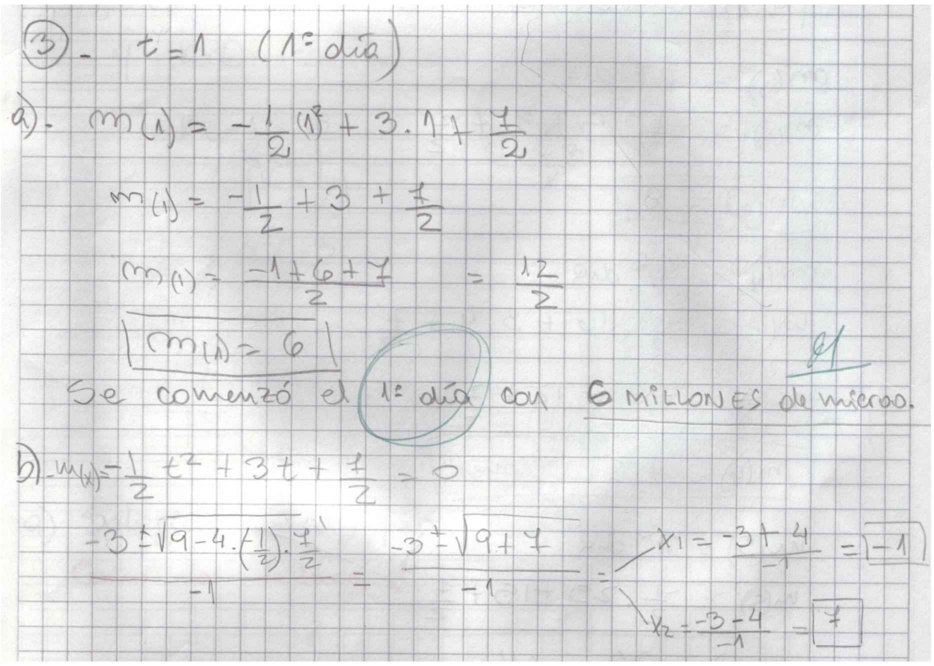
A partir de estos resultados se puede obtener otra categorización, considerando grupos de estudiantes que comparten el mismo cuerpo de conocimientos, para ello se consideraron cuatro niveles según la cantidad de ítems de la tabla 1 respondidos correctamente

Nivel Muy bueno (9, 8, 7 items resueltos favorablemente): Consideramos que poseen los conocimientos del tema evaluado con algunas dificultades menores a la hora de formalizar los conceptos utilizados para efectuar los cálculos pertinentes.

Nivel Bueno (6, 5 items resueltos favorablemente): Consideramos que no desconocen el concepto de función cuadrática pero realizan cálculos por tanteo mediante tabla, mostrando no poseer manejo analítico y en otros casos algebraico del tema.

Se observa en este nivel un número considerable de alumnos que fallan en la resolución del inciso a) pues consideran como condición inicial el día 1 en vez de t = 0, probablemente por tener dificultad en la interpretación de la continuidad de la recta real. (Figuras 3 y 4)

Alumno 3



③- $t = 1$ (1° día)

a)- $m(1) = -\frac{1}{2}(1)^2 + 3.1 + \frac{7}{2}$

$m(1) = -\frac{1}{2} + 3 + \frac{7}{2}$

$m(1) = \frac{-1+6+7}{2} = \frac{12}{2}$

$\boxed{m(1) = 6}$

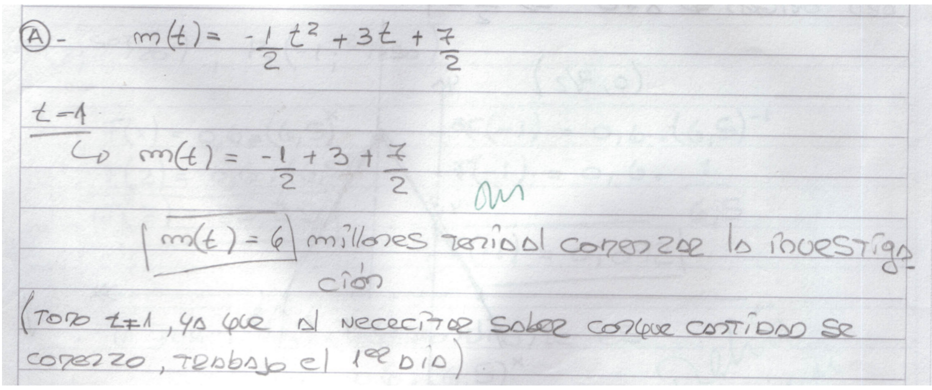
Se comenzó el 1° día con 6 MILLONES de microo.

b)- $m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2} = 0$

$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.(-\frac{1}{2}).\frac{7}{2}}}{-1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-1} =$ $x_1 = \frac{-3+4}{-1} = \boxed{-1}$; $x_2 = \frac{-3-4}{-1} = \boxed{7}$

Figura 3

Alumno 4



Ⓐ- $m(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2}$

$t=1$

↳ $m(t) = -\frac{1}{2} + 3 + \frac{7}{2}$

$\boxed{m(t) = 6}$ millones tenía al comenzar la investigación

(Tomo $t=1$, ya que al necesitar saber conque cantidad se comenzo, trabajo el 1er día)

Figura 4

Nivel Regular (4, 3 items resueltos favorablemente): Resuelven mayoritariamente sólo el inciso c), lo cual nos lleva a concluir que aplican la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado mecánicamente, sin identificar la situación en la cual es aplicada. Se presenta algo así como un "efecto Bhaskara" donde aplican la fórmula resolvente sin tener formalmente una ecuación cuadrática.
Nivel Malo (2, 1 items resueltos favorablemente): Plantean mayoritariamente la resolución numérica con la fórmula resolvente de la ecuación de segundo grado sin identificar la situación, sin tener en cuenta el dominio de la función y sin hacer una interpretación cualitativa de los datos.

CONCLUSIONES PRELIMINARES

No estamos en condiciones de afirmar que los estudiantes involucrados en la prueba *no saben lo que es una función cuadrática* aunque sí se podría sostener que no tienen habilidad para leer o interpretar los resultados parciales obtenidos apelando a conceptos pertinentes aprendidos en determinado registro (lenguaje natural u otro).

Se detecta en este análisis centrado en un problema que involucra el tema función cuadrática algo más general y que tiene que ver con el concepto de función: todas las representaciones son importantes y didácticamente necesarias, sin embargo puede causar obstáculos el hecho de que el concepto de función se identifique con un algoritmo o una fórmula o una curva (registro geométrico).
Nuestro estudio, si bien es de carácter exploratorio y preliminar, nos permite afirmar que el registro algebraico tiene más presencia que los otros en las respuestas de los estudiantes. Esto se reafirma en el hecho de que en este problema específicamente la resolución desde lo intramatemático es correcta en la mayor parte de los casos.
En el análisis realizado hemos reflexionado con el aporte de Raymond Duval (1995), según quien "*Es el objeto matemático el que debe ser importante no sus diversas representaciones semióticas"; y más aún, "el objeto representado no debe confundirse con el contenido de la representación… la ecuación de la parábola y el gráfico de la parábola se refieren al mismo objeto matemático… pero no dan cuenta de las mismas propiedades del objeto*".
Consideramos que este es uno de los obstáculos con el que se enfrentan nuestros estudiantes, dificultad que proviene de la falta de tratamiento de los distintos conceptos como objeto y herramienta.
Una de las cuestiones que se ha observado en el trabajo directo con los alumnos en las clases, es que éstos no están acostumbrados a relacionar los coeficientes de la expresión algebraica de una función polinómica con las características de su representación gráfica. En general tienen dificultades para relacionar los coeficientes de las ecuaciones algebraicas asociadas a las funciones con las características geométricas de su representación gráfica. Suelen recurrir más a menudo a los cálculos de la tabla de valores de la función, con lo que son más propensos a cometer errores que posiblemente con una concepción más ajustada de función y dominio de función no cometerían.
Finalmente consideramos que en las clases de matemáticas los profesores privilegiamos las escrituras simbólicas muchas veces pensando que "son más matemáticas" o confiando en que así puede traducirse el rigor matemático; pero es válido preguntarse de qué sirve el rigor matemático sin la comprensión del significado de los objetos involucrados.
Para favorecer los aprendizajes y el desarrollo del pensamiento conceptual es fundamental que los alumnos lleguen a articular diferentes representaciones semióticas; para lo cual es necesario enfrentarlos a suficientes problemas en los que usen las distintas representaciones semióticas que admite la noción matemática objeto del aprendizaje focalizado.
Consideramos que nuestros estudios son preliminares pero nos permitirán avanzar para diseñar mejores estrategias de enseñanza de un aspecto que reviste complejidad como lo es la transferencia del aprendizaje. Consideramos apropiado realizar este tipo de análisis en el contexto del tema funciones por la riqueza del mismo y lo apropiado que resulta en lo inherente a modelización y resolución de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

- ALAGIA, H.; BRESSAN, A.; SADOSKY, P. 2005. Reflexiones teóricas para la Educación Matemática. (Ed. del Zorzal, Buenos Aires).
- BROUSSEAU, G. 2007. Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Traducción: Dilma Fregona. (Ed. del Zorzal, Buenos Aires).
- DUVAL, R. 1995. Semiósis y pensamiento humano Registros semióticos y aprendizaje intelectuales. Traducción: Myriam Vega Restrepo Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía. (Grupo de Educación Matemática. Colombia).
- GODINO, J. 2002. La formación matemática y la didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas: el proyecto Edumat-maestros. http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/castellon_2002/edumat_maestros.pdf

- GOMEZ HERNÁNDEZ, M.A. 2002. La transferencia en el uso del conocimiento sobre funciones, una necesidad de las matemáticas escolares. Publicado en las memorias de RELME XIV. Ciudad de La Habana. Cuba.
- GOMEZ, P.; CARULLA, C. 1999. Sistemas de representación, mapas conceptuales y concepciones de los profesores sobre la función cuadrática. Universidad de los Andes. Colombia.
  http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/proyectos/CuadraticasIDEP/html/ConcProfFunCuad.html [abril 2008]
- GONZÁLEZ ASTUDILLO, M.T.; HERNÁNDEZ, E.M. Dificultades y concepciones de los alumnos de educación secundaria sobre la representación gráfica de funciones lineales y cuadráticas.
  www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/77_teresa_gonzalez_2.doc.[mayo 2007]
- RUIZ HIGUERAS, L. 1998. La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico. (Editorial de la Universidad de Jaén. España).
- RUIZ HIGUERAS, L. 1984 Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico. Tesis doctoral. (Universidad de Granada. España).