C31

ANÁLISIS DE PROTOCOLOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Carlos PARODI[1], Estela RECHIMONT[2], Nora FERREYRA[2]

[1]*Fac. Ingeniería - U.N.L.Pam - Gral. Pico - La Pampa - Argentina*
parodic@ing.unlpam.edu.ar
[2]*FCEyN-U.N.L.Pam - Uruguay 151, Santa Rosa, La Pampa - Argentina*
eduardog@cpenet.com.ar francis@cpenet.com.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Geometría, análisis, protocolos, heurística.

RESUMEN

El presente trabajo analiza las producciones de dos grupos de alumnos a los que se les proponen una misma tarea vinculada con la resolución de un problema geométrico el cual encierra una riqueza de propiedades a ser descubiertas e involucra abundantes estrategias de resolución.
Uno de los grupos proviene de un Curso para graduados cuyo objetivo fundamental era trabajar con Protocolos y Herramientas Heurísticas y el otro proviene de una asignatura curricular “Taller de Resolución de Problemas” correspondiente a la carrera Profesorado en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y naturales de la UNLPam.
Puesto que el análisis de protocolos es una herramienta que permite mostrar la complejidad que encierra la resolución de problemas matemáticos, decidimos utilizarlo para el estudio de una tarea con la idea de responder algunas de las siguientes preguntas:
¿Qué caminos ha seguido el resolutor para resolver el problema?, ¿Qué decisiones ha tomado?, ¿Ha insistido en alguna idea en particular?, ¿Ha considerado distintas opciones para abordar el problema?, ¿Qué tipo de representaciones ha empleado?
Todo ello en pos de contar con elementos que nos sirvan para analizar cómo aprenden los alumnos.

INTRODUCCIÓN

El problema fue propuesto como una de las actividades para la evaluación de un Curso que se dictó en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, en el año 2006. Dicho curso estaba dirigido a docentes en actividad, estudiantes avanzados del Profesorado en Matemática y procuraba aproximarse a la utilización de herramientas heurísticas en la resolución de problemas y la utilidad de los protocolos, entre otros aspectos.
Efectuamos un análisis a priori para tratar de anticipar las posibles resoluciones de los asistentes, apoyando esa tarea con la utilización de un software geométrico.
Analizar los procesos involucrados en la resolución de problemas es una tarea que presenta ciertas dificultades metodológicas, por tratarse de actividades que involucran aspectos que no son observables sino inferibles a partir de la ejecución del sujeto que resuelve el problema. Una de las metodologías existentes para el análisis de procesos desarrollados en el ámbito de

la matemática es el análisis de protocolos escritos.

El trabajo con protocolos y herramientas heurísticas es importante como elemento didáctico por el hecho de que ponen de manifiesto las diferentes estrategias involucradas en una resolución y cada una de ellas comprende varios pasos a seguir, pausas y reconsideraciones que son propias de la actividad.

ANÁLISIS DE PROTOCOLOS ESCRITOS

El análisis de los protocolos escritos por el individuo que encara la resolución de un problema matemático, es un método que permite comprender mejor los variados procesos involucrados en tales actividades.

Los esquemas de protocolos escritos se refieren a la explicitación de secuencias de las propias acciones desarrolladas por un individuo cuando resuelve un problema. Estos esquemas de pasos han sido muy utilizados en la enseñanza de la matemática.

Los protocolos tienen como propósito realizar análisis cualitativos que permitan describir estrategias útiles y documentar acerca de su nivel de efectividad. Ya en 1967, Kilpatrick diseñó un protocolo riguroso que sirvió de paradigma a muchos otros desarrollados a posteriori. En dicho protocolo se esquematizan diversas conductas heurísticas consideradas importantes en la resolución de problemas matemáticos.

Aunque los protocolos codifican básicamente conductas observables en secuencia, éstos pueden ser enriquecidos por otras técnicas complementarias tales como "pensar en voz alta" o las "autoexplicaciones". Es decir, la conducta implícita puede ser explicitada por el individuo.

ELEMENTOS DEL MODELO DE COMPETENCIA

Por su parte Puig considera que lo propio de la heurística es "*el estudio de los modos de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución*" (L. Puig, 1996). Con esto, el autor es consciente de que deja de lado distintos elementos que intervienen en el proceso de resolución de problemas (esquemas, algoritmos, rutinas) y que los expertos utilizan. Para él, *buscar un problema relacionado* es lo que llama *sugerencia heurística* ya que nos indica una dirección de trabajo y no un procedimiento concreto para buscar o producir dichos problemas relacionados. Pero, c*onsiderar un caso* (o una serie de casos), es una *herramienta heurística* ya que se refiere a un procedimiento determinado que a partir del problema a resolver permite formular otro problema relacionado. Además, h*acer una tabla*, L. Puig lo llama *destreza* ya que no transforma al problema. Destaquemos que la *destreza* no es sólo una forma adecuada de trabajar o de presentar un trabajo, sino que sirve para descubrir, por lo que tiene un *potencial heurístico*, como el caso de una *notación adecuada* que permite descubrir lo necesario para resolver el problema.

Además de las *sugerencias heurísticas (SH)*, las *herramientas heurísticas (HH)* y las *destrezas con potencial heurístico (DH)*, que pueden aparecer combinados, Puig reconoce otros elementos que son parte de lo que llama *Modelo de Competencia*.

EL PROBLEMA

Sobre los lados de un triángulo rectángulo, se construyen exteriormente cuadrados como muestra la Figura 1. Hallar el área del triángulo determinado por los centros de los cuadrados considerados.

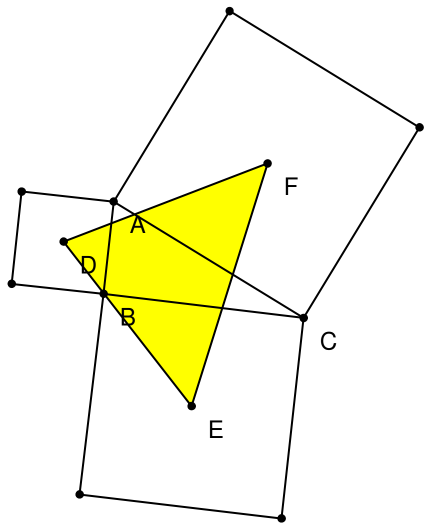

Figura 1

ANÁLISIS

Los protocolos inherentes en cada resolución, muestran herramientas heurísticas, las cuales al explicitarse, resultan conscientes en el resolutor.
A continuación analizamos los protocolos elaborados en la resolución efectuada por algunos alumnos:

Protocolo 1
En el inicio del protocolo, el alumno, no sólo muestra la necesidad de construir una figura auxiliar sino que es consciente de iniciar con un caso particular (herramienta heurística) y lo hace explícito. La construcción con regla y compás, que realiza, pone de manifiesto que no sólo es un esquema representativo sino más bien un elemento en el que se apoya para justificar, de alguna manera, los resultados parciales "*con el compás se puede verificar que h = AB´" es de igual longitud que la base ...*". Inmediatamente después de calcular analíticamente el área del triángulo pedido (área A´B´C´= AB^2), construye otra figura partiendo ahora de un triángulo rectángulo cualquiera y llega a otro resultado (área A´B´C´= $(AB + AC)^2/4$) pero no muestra en el protocolo un control que le permita reflexionar sobre ello.
El protocolo sólo muestra la descripción de los pasos seguidos y avanza muy precozmente en los comentarios, mostrando el arraigo fuerte del trabajo aritmético. En dicho comentario hace explícita una observación que procura justificar por medio del uso del compás a modo de comparador, pero no se involucra en un trabajo de validación.

Protocolo 2
En general el inicio con una gráfica se muestra evidente en (todos) los trabajos. En esta oportunidad la herramienta heurística de resolver otros problemas más simples que le permitan abordar la situación original es explicitado diciendo "*...No podré conocer el área del triángulo PSQ si antes no calculo su base y su altura...*". Lo que sigue es una descripción del camino transitado para determinar la base del triángulo que se quiere calcular que, "*es la suma de las mitades de las diagonales de los cuadrados que quedan establecidas por los catetos del triángulo rectángulo del cual partimos...*" según lo expresa la autora por la observación de su gráfica. Al cálculo correcto de la base ($\overline{SQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$) le sigue una argumentación bien justificada que la conduce a un nuevo problema "*me faltaría de ellos un dato más, para poder calcular la altura ...*" haciendo referencia a dos triángulos rectángulos

formados al considerar la altura del triángulo requerido en la tarea. Este nuevo planteo la conduce a considerar una serie de figuras auxiliares sobre la gráfica original y sobre ellas utiliza el Teorema de Pitágoras y el Teorema del Coseno para determinar la altura del triángulo y juntamente con la base ya calculada llega al resultado con algunas dudas del área pedida

$$(\acute{A}reaPSQ = \frac{\sqrt{2}}{4}.(a+b).\sqrt{\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)+b.\sqrt{a^2+b^2}.sen\alpha}).$$

Esa incertidumbre la lleva a probar sobre un triángulo rectángulo isósceles de 4 cm de lado. La expresión calculada del área la confronta con otros cálculos sobre los que se muestra más segura de sus resultados (calcula su base y altura) y al llegar a iguales resultados concluye "*aunque "rebuscada", creo que es una expresión que sirve para calcular el área del triángulo que me queda establecido...*".
Existe un evidente manejo algebraico. El protocolo muestra el trabajo consciente de todas las herramientas utilizadas y las idas y vueltas que fue experimentando, sus dudas y aciertos a pesar de que el resultado al que llega, por la expresión un tanto engorrosa, no la satisface del todo. La tecnología que utiliza acompaña a la técnica principalmente para justificar sus pasos.

Protocolo 3
Esta alumna realiza una descripción de los pasos seguidos pero haciendo una retrospectiva de lo realizado, es decir, luego de los cálculos vuelve sobre ellos para redactar lo que sería su protocolo. Haciendo uso del Teorema de Pitágoras, Teorema del coseno y de otras herramientas conocidas logra un resultado similar al trabajo anterior, y con iguales dudas sobre la validez veracidad del cálculo. Con la comprobación sobre un triángulo cuyos lados miden 4cm y 5cm logra resultados aproximados. Muestra cierta seguridad respecto de que lo calculado está correcto y sin dudas al respecto, a diferencia de Protocolo 2.
Este protocolo no muestra el transitar de la autora sobre su resolución en lo que respecta a los sentimientos que pueda experimentar, incluso sus dudas o aciertos por los que atraviese.
Parece que la determinación de un resultado aproximado con la calculadora la deja conforme.

Protocolo 4
Esta alumna presenta un protocolo que avanza sobre los anteriores, es decir, va un poco más allá de la descripción de los pasos algebraicos seguidos ya que procura describir los diferentes razonamientos utilizados. Su análisis comienza con una gráfica de un triángulo rectángulo de longitud 3cm, 4cm y 5cm, construida con regla y compás (técnica que utiliza en las 7 gráficas que presenta). Como la mayoría, determina algebraicamente la longitud de la base del triángulo pedido ($\left(\overline{oq} = \frac{\overline{ac}+\overline{ab}}{\sqrt{2}} \right)$).

Aquí una reflexión importante comienza a surgir (algo que no sucede en los anteriores relatos ya analizados) y es que la altura del triángulo del cual hay que calcular su área, coincide con la distancia del centro geométrico del cuadrado más grande al vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo de partida. Relación que no logra demostrar. Luego construye otra figura y logra visualizar otra relación en la que la altura "h" buscada dice ser congruente con la hipotenusa del triángulo rectángulo de partida, la cual no puede justificar adecuadamente para ella. (ver Figura 2).

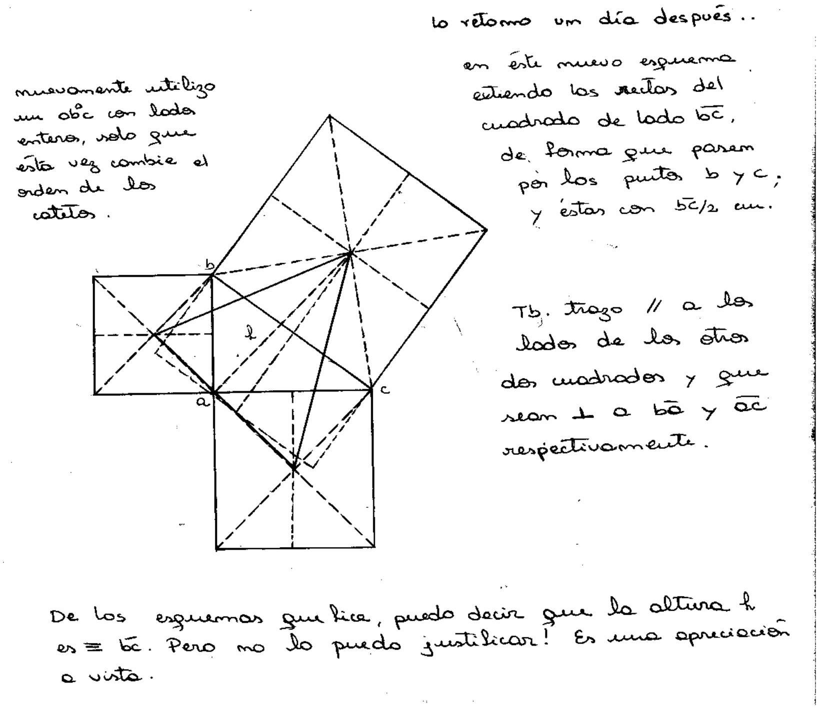

Figura 2

Regresa con una construcción de mayores dimensiones, pero proporcional a la anterior y determina una relación que considera "*no me ayuda mucho*". Sobre una nueva construcción procura probar que $\overline{ap} \equiv \overline{bc}$ (ver Figura 3) e incluso demostrar que dentro de la figura se encuentra el rombo *psaw*.

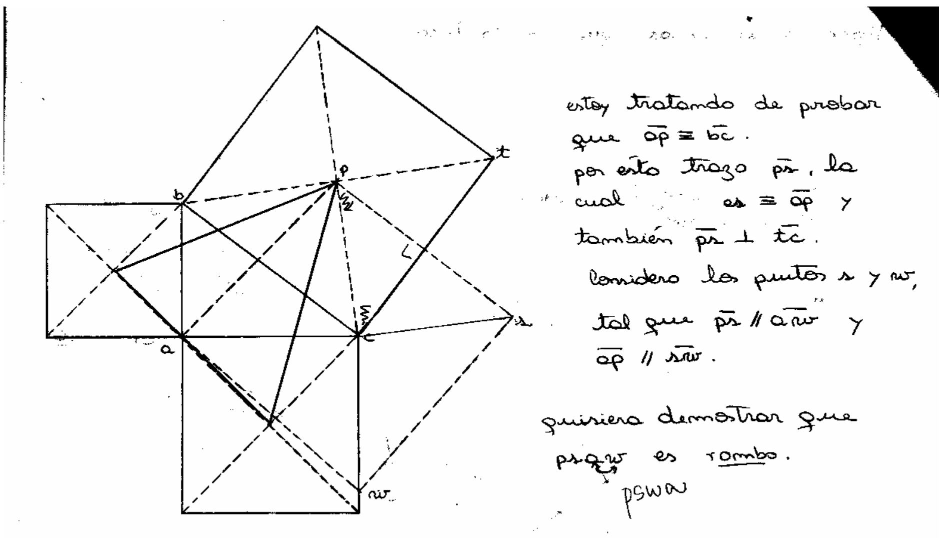

Figura 3

En su intento por caracterizarlo concluye que "*me di cuenta que queda determinado el paralelogramo bpsc*". Sobre una nueva figura (ver Figura 4) comprueba, construyendo circunferencias, que $\overline{pa} \equiv \overline{ps}$ lo cual no demuestra. Luego intenta retomar la demostración de que el cuadrilátero *bpsc* es un paralelogramo, resultado que puede ser evidente a la vista en la construcción pero poco claro en su demostración. Sin embargo el resultado al que arriba, "*bpsc es un paralelogramo*" le permite decir que $\overline{ap} \equiv \overline{bc}$. De allí al cálculo del área (del triángulo) pedida hay simplemente una fórmula, llegando al resultado con algunos errores.

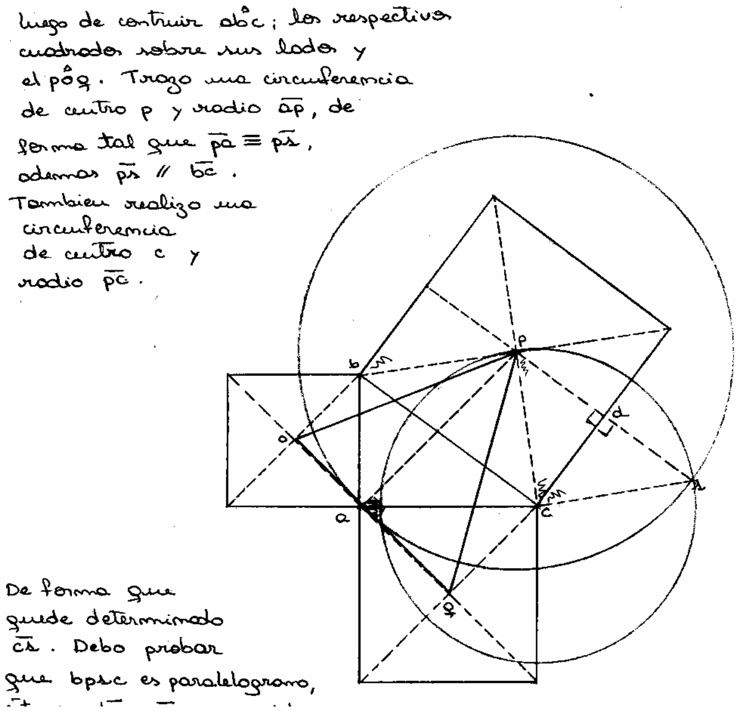

Figura 4

Este trabajo presenta por primera vez un resultado muy interesante que luego se manifiesta en algunos otros trabajos, y en todos ellos con escasa justificación, nos referimos a que el segmento *ap* coincide con la altura del triángulo al que se le debe calcular el área. Los demás resultados, no menos importantes en el desarrollo del trabajo de esta alumna, son considerados más importantes en el cálculo del área.

Protocolo 5

Inicia el trabajo con una recopilación de valores que luego son calculados, y así lo hace saber la alumna. Queremos rescatar el análisis que hace de la figura, principalmente luego de la construcción auxiliar con regla y compás. Así manifiesta, "*al construir la altura correspondiente al lado SQ observo que dicho segmento pertenece a la bisectriz del ángulo recto del triángulo rectángulo*". Resulta algo nuevo respecto del análisis de los otros trabajos.
Otro aspecto que nos muestra este protocolo es que en su afán de generalizar este resultado a los otros ángulos del triángulo rectángulo recurre al software Cabrí Géomètre II Plus concluyendo que "*verifico que las alturas del triángulo rojo correspondientes a los lados SP y PQ pertenecen a los segmentos TQ y SU, respectivamente, y la altura del lado SQ es el segmento RP. Pero no verifica mi hipótesis: las bisectrices de los ángulos ac y bc no contienen a las alturas*". Esto, parece restarle importancia a la hipótesis original, la que considera que la altura del triángulo, al que se le debe calcular el área, está contenida en la bisectriz del ángulo recto, y comienza con un laborioso trabajo algebraico iniciado con el Teorema del Coseno llegando a una expresión similar al de otra alumna, que denomina S. Avanza en el sentido de la incertidumbre de los cálculos y del resultado obtenido buscando la manera de verificar el resultado y así lo expresa: "*¿cómo puedo verificarlo?*", y lo verifica sobre las dos gráficas construidas tomando sus medidas.
En este punto los anteriores alumnos concluyen su tarea, pero sin embargo en este caso comienza una serie de razonamientos haciendo uso de la herramienta heurística "consideración de un caso particular" cuando supone que la altura y la base tienen igual valor en el triángulo al que debe calcular el área llegando a la expresión $S_1 = \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)^2$.

Reincidiendo en la aplicación del Teorema del Coseno, pero ahora sobre otro triángulo de la figura (SRP), llega nuevamente al mismo resultado original que denomina S_2. En éste momento retoma la condición de que la altura tiene igual valor que la base en el triángulo SPQ y al reemplazar su valor logra llegar a que $S=\frac{1}{4}(a+b)(a^2+b^2)$. Acá se da cuenta de errores cometidos, los arregla y modifica su resultado por $S=\frac{1}{4}(a+b)^2$ que resulta equivalente al que ya había llegado con S_1. Esto la convence de alguna manera de sus cálculos, principalmente por haber abordado de diferentes puntos de vista el problema, pero considerando la igualdad entre la base y la altura, algo que debería comprobarse.

Otro aspecto que por primera vez surge es el hecho de que la altura esté contenida en la bisectriz, como comentamos, y que no se avance en ese aspecto. Es un interesante trabajo de análisis en el que surgen interrogantes propios del ejercicio y que son poco analizados.

Protocolo 6

El protocolo nos va mostrando una cronología bastante cercana a su trabajo como resolutora, algo que en los otros trabajos no se manifiesta, según nuestra primera lectura. Esto es un avance respecto de los anteriores trabajos, pero en esta oportunidad el trabajo algebraico es preponderante por sobre el análisis de la figura, llegando al resultado del "*Área del triángulo A´B´C´ en función del triángulo rectángulo original*" que es $A=\frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AB}+\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{AC}^2-\overline{BC}.\overline{AC}.\cos\left(\hat{C}+90^{\circ}\right)\right)}}{2}$. Procura verificar este resultado para un caso particular, verificación que no se logra, por lo que procede a su construcción en el sofware Cabri. El trabajo concluye con la expresión: "*poniendo los valores en la computadora, llego al resultado (en forma aproximada) obtenido en la fórmula, quiere decir que me equivoqué en las cuentas*". Como hemos dicho, es un trabajo en el que podemos destacar el avance en la confección de los protocolos.

Protocolo 7

Este protocolo se apega a la descripción de los pasos a seguir basándose en la construcción con regla y compás de la figura. El problema lo desglosa en problemas más simples (como ya hemos mostrados en otros trabajos) pero en esta oportunidad selecciona un triángulo y lo grafica por separado fuera de la figura original. Es aquí donde observamos otro resultado que antes no se había manifestado y es que la altura del triángulo al que se le debe calcular su área pasa por el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo "*trazo la perpendicular a la base ab, para obtener la altura y veo que ésta pasa por el punto x*" (ver Figura 5). Sin embargo, éste resultado no es aprovechado y menos aún demostrado. Es un protocolo del que quisimos rescatar un resultado distinto a los anteriores aunque se relacione con algunos de ellos, como es el caso de un trabajo anterior.

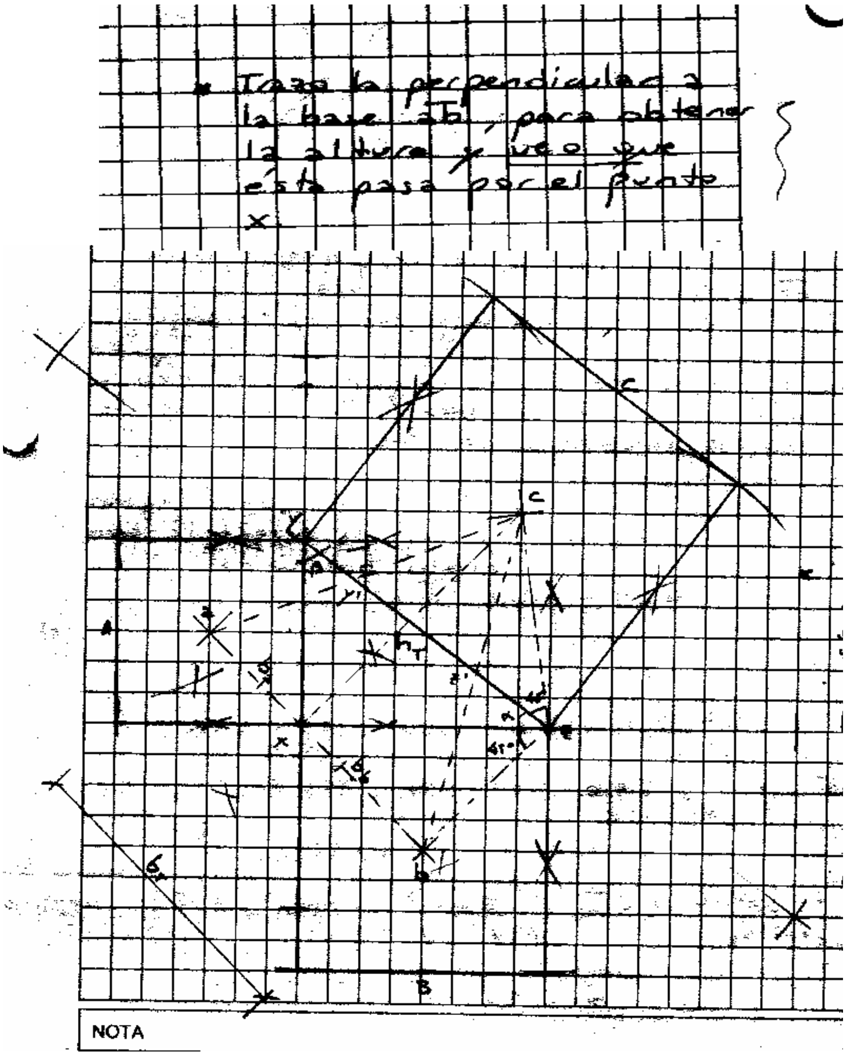

Figura 5

Protocolo 8

Comienza considerando un triángulo rectángulo cuyos valores son de 3cm, 4cm y 5cm. El área buscada y los resultados obtenidos (base y altura) los verifica midiendo sobre la gráfica. Luego comienza nuevamente, pero ahora con un triángulo rectángulo isósceles en el que observa que la altura es igual a la base del triángulo al que se tiene que calcular su área. Resultado que no es demostrado. De un análisis posterior observa que "*el área del triángulo rectángulo es* $A = \frac{1}{2}a^2$. *Es decir, el área del triángulo que busco es el doble del inicial ¿Resulta para cualquier tipo de triángulo?*". Otro resultado al que arriba es: "*las diagonales del cuadrilátero formado por el triángulo rectángulo y el cuadrado de la hipotenusa son iguales; es decir si tengo la medida de la hipotenusa (del triángulo rectángulo) obtengo la altura del que voy a calcular el área*". Estos resultados no los demuestra pero los verifica midiendo directamente sobre la gráfica correspondiente. Este análisis no involucra al Teorema del Coseno, y trabaja adecuadamente con la gráfica haciendo uso del Teorema de Pitágoras para llegar al resultado correcto: $\acute{A}rea = \frac{1}{4}(a+b)^2$. Sólo verifica midiendo sobre la gráfica como lo venía haciendo. Resultado con el que concluye su trabajo. Este protocolo muestra la riqueza de las hipótesis empíricamente comprobadas y le permite un trabajo adecuado para su resolución.

COMENTARIOS FINALES

Analizando los protocolos observamos el razonamiento de los alumnos y los conflictos semióticos con los que se enfrentan. Los caminos que ellos eligen para sortearlos nos muestran las nociones que ponen en juego y de las que se sienten más seguros. Algunos de ellos muestran una intención más acentuada de proponer justificaciones que se orientan a un formalismo propio de esta ciencia y que puede responder al contrato didáctico implementado en el aula. Otros se muestran esquivos a seguir trabajando en niveles más formales que un empirismo ingenuo, sin ni siquiera aventurarse a trabajar sobre las justificaciones más formales que los llevaría a pruebas intelectuales (Balacheff, 2000).
Pero es evidente que la riqueza presente en los protocolos y un análisis detallado de ellos nos permite orientar nuestro futuro trabajo docente con esta actividad, acentuando sobre aquellos aspectos que programemos para nuestros alumnos.
Además podemos ver en los protocolos una importante presencia de herramientas heurísticas, favorecidas quizás por la tarea propuesta, pero que nos revela su importancia en la resolución de un problema con contenido matemático, procurando dar cuenta de los elementos intervinientes no sólo desde el punto de vista de los conceptos sino con intención de estudiar aquello que es independiente del contenido, que es precisamente el objeto de la heurística. Rescatando todo aquello que sirva de fundamento de las actuaciones de los alumnos al resolverlos.

BIBLIOGRAFÍA

1. Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.
2. González, F. (2001). Los Protocolos Escritos como medio para evaluar la comprensión matemática aplicando el análisis semiótico al proceso de resolución de problemas matemáticos. *Revista Enseñanza de la Matemática (ASOVEMA, Venezuela)*; 10 (2), 44-51.
3. Kilpatrick, J. (1967). *Analyzing the solution of word problems in mathematics: an exploratory study*, Doctoral dissertation, Stanford University.
4. Poglioli, L. Serie “Enseñando a aprender”. En: www.fpolar.org.ve/poggioli/poggioli.htm .
5. Puig, L. (1996). *Elementos de Resolución de Problemas*, Granada: Editorial COMARES.