C32

UN ESTUDIO INICIAL SOBRE MODELOS ESPONTÁNEOS DE LÍMITE FUNCIONAL A NIVEL SUPERIOR

Vilma L. COLOMBANO, Mabel RODRÍGUEZ

Facultad de Ciencias de la Educación - Universidad Nacional del Comahue - Argentina
Instituto del Desarrollo Humano. Universidad de General Sarmiento
J. M. Gutiérrez 1159. Los Polvorines. Buenos Aires. Argentina
vcolomba@ungs.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: concepto de límite, modelos espontáneos, sistemas de representación.

RESUMEN

Para los estudiantes que inician el estudio del Análisis Matemático, la apropiación el concepto de límite funcional presenta una dificultad que distintas investigaciones en Didáctica de la Matemática han analizado desde diferentes perspectivas con el objeto de comprender el proceso de aprendizaje. Tales son los casos de Tall, (1980); Tall y Vinner, (1981); Robert, (1983); Cornu, (1981), (1983), (1991); Williams, (1991), Artigue (1998) entre otros. Presentamos un estudio efectuado a estudiantes de profesorado de Matemática que nos permitió identificar los modelos espontáneos de la noción de límite, presentes en los alumnos, que han persistido luego de la enseñanza del tema. Hemos analizado, además, si el estudiante enfrentado a la resolución de actividades, opera coherentemente con sus modelos espontáneos o bien con la definición formal aprendida.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Si bien el concepto de límite funcional es la base para poder desarrollar el Análisis Matemático, ocurre comúnmente en el nivel superior que su enseñanza y aprendizaje se reducen al cálculo, a la resolución de indeterminaciones clasificadas por tipologías y al aprendizaje de ciertas "rutinas" que permiten llegar a la solución correcta del ejercicio planteado. Es decir el alumno aplica técnicas para resolver ejercicios sin tener mucha idea de la definición y se desvincula de la comprensión de la noción. Esto se evidencia, por ejemplo, cuando el estudiante se enfrenta a la tarea de construir la gráfica de una función coherente con información obtenida analíticamente sobre su comportamiento. Su destreza algebraica no puede aplicarse en este caso, en consecuencia no puede alcanzar el resultado, trayendo aparejado un conflicto. Tall y Schwarzenberger (1978) sostienen que el docente debe prestar especial atención a las dificultades de los alumnos que provienen de conflictos conscientes o inconscientes, aduciendo que las causas de esos conflictos pueden ser producto de apreciaciones deficientes. Cornu (1981) hace referencia a ideas, intuiciones, conocimientos que el estudiante tiene de un concepto, que no son fruto de una enseñanza previa y las denomina *concepciones espontáneas*. Esta noción se vincula con lo que Tall y Vinner (1981) denominan *imagen conceptual* y *definición conceptual*. Según estos autores, la *imagen conceptual*, referida a un individuo, consiste de un conjunto de representaciones visuales, incluyendo símbolos, que están asociadas con el concepto junto con propiedades y procesos asociados al mismo que están en la mente del individuo. Es decir que la imagen conceptual determina primariamente lo que el individuo comprende de la noción en cuestión y no necesariamente las partes que la componen son coherentes, cuestión que podría no manifestarse si acaso dichas partes no son evocadas simultáneamente por el sujeto. Por otra parte, la noción de *definición conceptual* se refiere a la forma de definir un concepto, ya sea en palabras, formalmente, o incluso personal cuando el individuo intenta definir o describir su imagen conceptual. Algunas de las concepciones espontáneas de los estudiantes podrían generarse, por ejemplo, a partir del uso cotidiano del término "límite" (los límites de un territorio, límite de tiempo admitido para la entrega de un trabajo, etc.) y conforman parte de su imagen conceptual. Si esto ocurre, es probable que esta parte de la imagen conceptual sea evocada por el sujeto para operar con ella, si acaso no dispone de manera operativa de la definición conceptual, consistente con la matemáticamente correcta, aprendida en la clase. Suele ocurrir, y este hecho dificulta aún más la comprensión del concepto, que haya una considerable distancia entre la enseñanza del concepto y la ejercitación que le sigue, en el sentido que probablemente el docente explique la definición del concepto de límite en términos gráficos, numéricos y lógicos, y la ejercitación siguiente se circunscriba a operatoria algebraica.

Siguiendo una línea similar, Blázquez y Ortega (2002) consideran conveniente presentar al alumno distintos sistemas de representación de la idea de límite antes de trabajar con la definición formal. Extraemos de la cita las siguientes descripciones:

> *Verbal: Es una aproximación óptima de los valores que toma una función en un entorno del punto en cuestión.*
>
> *Numérico: es un proceso de tendencia basado en una tabla de valores de la variable independiente y sus correspondientes imágenes, donde se mejora cualquier aproximación al límite con valores muy cercanos al punto de interés.*
>
> *Gráfico: el límite se representa como un punto en el eje de las ordenadas tal que a todo entorno que lo contiene le corresponde otro entorno del punto de interés sobre el eje x, en el que se proyecta.*
>
> *Algebraico: corresponde a la definición topológica, donde aparecen ε - δ que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones.*
>
> *Entendemos que la inclusión de estas representaciones favorecería la construcción de una imagen conceptual más amplia, operativa y con mayores posibilidades de que la definición conceptual del sujeto sea próxima a lo matemáticamente correcto.*

Teniendo en cuenta lo expresado anteriormente se puede advertir que enfrentar tanto la enseñanza como el aprendizaje de este concepto no es tarea sencilla, la historia misma de la Matemática nos muestra que el concepto es sumamente complejo y constituye un obstáculo epistemológico. El docente, según el caso, estará consciente o no de las concepciones espontáneas de sus estudiantes previamente a la explicación de la noción. Por una parte sería interesante considerarlas al momento del diseño de su clase, pero lo más sorprendente aún sería si, luego del proceso de enseñanza, estas concepciones espontáneas siguieran estando presentes en los alumnos. Los estudios mencionados y otros como el de Juter (2007) anticipan que esto suele ocurrir enfatizando el carácter de obstáculo de la noción. Nos resulta útil, para prever el diseño de acciones del docente en el aula, analizar en nuestro contexto, un grupo de estudiantes de profesorado de Matemática, si hay concepciones espontáneas de límite que persisten en ellos luego de la enseñanza. Asimismo, nos interesa analizar si el estudiante, al enfrentarse a la resolución de actividades luego de la enseñanza del tema, opera con sus modelos espontáneos o con las nociones enseñadas.

Hemos tomado los modelos espontáneos utilizados por Williams (1991), Juter (2007) como las categorías iniciales de análisis.

Éstos son los siguientes:

Dinámico teórico: el límite es un valor que describe cómo una función se mueve cuando x

tiende a un cierto punto.
Dinámico práctico: en este modelo el límite se decide insertando valores de x cada vez más cercanos a un número dado hasta que el valor del límite es alcanzado.
Cota: el valor de un límite es un número más allá del cual la función no puede pasar.
Formal: corresponde a la definición formal de límite. El modelo se caracteriza por reconocer la arbitrariedad de la cercanía de las imágenes de la función respecto del límite restringiendo los valores de x a un entorno de punto de estudio del límite.
No alcanzable: el límite es un valor al cual una función se aproxima pero nunca alcanza.
Aproximación: el valor del límite es una aproximación que puede ser hecha tan precisa como se desee.
Nos interesa considerar el trabajo de Hitt y Murillo (2005) quienes elaboraron un listado de dificultades que pueden obstaculizar de alguna manera la comprensión del concepto formal de límite. Extraemos de su trabajo algunas que utilizamos en el análisis de la producción de los estudiantes y las explicamos mínimamente. Al finalizar, mencionamos sin mayor detalle, otras que incluyen los autores.

- *problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones* (el estudiante no se maneja fluidamente con los sistemas de representación numérico, algebraico, gráfico, verbal ya mencionados)
- *¿qué es el límite?* (el estudiante liga esta noción matemática con el uso cotidiano del término dando lugar a los modelos espontáneos recién definidos)
- *significados de las diferentes notaciones* (a modo de ejemplo: ¿qué es lo que el estudiante comprende de la notación $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y de $f(x) \xrightarrow{x \to a} L$?, ¿cómo interpreta $x \to a$?)
- *conflictos con la creencia sobre el concepto de límite como una simple sustitución* (es sabido que cuando la función es continua en el punto analizado, la sustitución directa es el recurso óptimo. Suele ocurrir que el estudiante utiliza este recurso, sin haber analizado la continuidad).
- *conflictos en la lectura de gráficas con respecto al límite* (confusión entre si la función está o no definida en el punto de análisis, el uso de los límites laterales, la variación en la variable dependiente entendida simultáneamente y a causa de la variación de la variable independiente).

Otras dificultades mencionadas son: *conflictos con la creencia de que una función no continua no tiene límite; conflictos para otorgarle un significado a la definición de límite en términos de (ε, N) en el caso de sucesiones y series y a la definición (ε, δ) en el caso de límite de funciones en un punto, o en el caso del límite de funciones cuando x crece sin límites; significados de los cuantificadores; conflictos con el uso adecuado de los cuantificadores cuando se intenta negar la convergencia; significado de demostración en el contexto del tema de límites, intuición y procesos de demostración, la intuición y el proceso infinito y significados del signo "=" en las diferentes notaciones.*

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Contexto

El estudio se realizó con alumnos de segundo año de un profesorado de Matemática de la provincia de Buenos Aires, ya que por diseño curricular el espacio areal Análisis Matemático I corresponde a ese año de la carrera.
La población posee las siguientes características generales:

- Sobre un total de 30 alumnos, 8 son recursantes.
- Tienen cursada, y en la mayoría de los casos aprobada, la materia correlativa anterior "Introducción al Análisis Matemático" correspondiente al primer año de la carrera, indicando esto que, en mayor o menor medida poseen los conocimientos y habilidades

básicas necesarias para desenvolverse en la materia.

- Es muy bajo el porcentaje de alumnos que no trabaja, por lo tanto es bastante común que no hagan un seguimiento exhaustivo de las clases por falta de tiempo.

El docente dio las clases de manera expositiva, ubicó históricamente el tema y presentó algunas situaciones que dieron origen al concepto, mostrando la utilidad del Análisis Matemático en problemas de optimización. Explicó las nociones partiendo de un análisis intuitivo de límite de sucesiones, para presentar su definición conceptual en una segunda instancia. Utilizó los sistemas de representación numérico y gráfico haciendo énfasis en el proceso exploratorio otorgando distintos valores a la variable independiente cercanos al punto de análisis para poder conjeturar el valor del límite. Luego de esto, presentó la definición formal de límite funcional. Los ejemplos que realizó el docente en el pizarrón tenían como finalidad hallar el delta para un épsilon numérico dado, no generalizando su construcción a un épsilon arbitrario en esta primera instancia. Esto fue acompañado por su interpretación gráfica. En clases sucesivas se trabajó el concepto de límites laterales, infinitos y clasificación de indeterminaciones. En las clases prácticas, las actividades realizadas en el pizarrón a modo de ejemplo tuvieron como finalidad hallar el delta en función del épsilon (arbitrario), calcular límites laterales de funciones partidas y resolver indeterminaciones con sus estrategias particulares clasificadas por tipos.

Instrumento

El instrumento utilizado para analizar las concepciones espontáneas de los alumnos y la forma en que operan con ellas es un test semi-estructurado de resolución individual. Fue aplicado a 23 de los 30 estudiantes del curso varios meses después de haber recibido la enseñanza del concepto de límite.

El test, que se puede ver en el anexo, está dividido en dos secciones, la primera comprende los puntos 1, 2 y 3 y tiene por objeto identificar y clasificar tipo/s de modelo/s espontáneos de la noción de límite que permanecen en los alumnos.

La presencia de uno o algunos de los modelos en la mente del alumno se puede manifestar en la resolución de situaciones problemáticas, por lo tanto la segunda parte de este test, que comprende los ítems 4 a 9, apunta a indagar: cómo operan con esos modelos, si aparecen contradicciones con el concepto formal, cuán cerca o lejos están del mismo y si se advierte diferencia al trabajar con la noción en los distintos sistemas de representación mencionados (verbal, gráfico, numérico y algebraico).

Los criterios para seleccionar las actividades del test fueron, por un lado tener en cuenta propuestas que permitieran trabajar el límite en y desde distintos contextos íntimamente relacionados con los sistemas de representación, y por otro que se puedan poner en juego los distintos modelos espontáneos.

A modo de ejemplo, incluimos el análisis de una de las actividades propuestas.

<u>Ejercicio 7 (similar a uno extraído de Williams (1991).</u>

Dada f: R - {0} $\rightarrow$ R, $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{100000x}$

a) Determinar el límite de f cuando x tiende a 0.
b) Completar la tabla. ¿Cómo se explica la respuesta dada en a) sobre el límite de f cuando x tiende a 0 a partir de los resultados de la tabla? Justificar.

x	$f(x)$
0.1	
0.01	
0.001	
-0.1	
-0.01	
-0.001	

En esta situación se enfrenta al alumno a trabajar los sistemas de representación numérico y algebraico. En el ítem a) el estudiante podría obtener la respuesta a partir del análisis de la expresión algebraica de la función, obteniendo por resultado que el límite es infinito. El ítem b) le brinda la posibilidad de analizar aproximaciones, en una situación centralmente dinámica. Los valores de las abscisas propuestos en la tabla darán por resultado valores que no evidencian la tendencia a infinito. El hecho de contraponer la exploración numérica del ítem b) con un análisis estático y abstracto del ítem a), podría acarrearle confusión. Es posible que aquí se pongan en juego los modelos dinámico y por aproximación, y al no tener un mismo resultado a la vista se genere un conflicto que ponga en tela de juicio los modelos con los que operan.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la Tabla presentada a continuación se muestran los resultados arrojados por el primer y segundo ítem del test, la cantidad de alumnos que consideraron como verdaderos o falsos cada uno de los modelos planteados, y a su criterio cuál de los considerados como verdaderos resulta el más adecuado a sus ideas (lo que notamos en la tabla como “mejor”).

Nro de pregunta	**Modelo**	**Verdadero**	**Falso**	**No contesta**
1 (a)	Dinámico-Teórico	19	4	0
2(b)	Cota	5	17	1
3(c)	Formal	12	10	1
4(d)	No alcanzable	16	6	1
5(e)	Aproximación	11	11	1
6(f)	Dinámico – Práctico	13	10	0

Nro de pregunta	**Modelo**	**Mejor**[1]
1 (a)	Dinámico-Teórico	7
2(b)	Cota	0
3(c)	Formal	2
4(d)	No alcanzable	8
5(e)	Aproximación	4
6(f)	Dinámico – Práctico	1

Tabla1: Cantidad de alumnos que indicaron cada opción como verdadera, falsa o mejor.

La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos de los ítems 1 y 2 pero únicamente en aquellos estudiantes que consideraron verdadero el enunciado al que le subyace el modelo formal.

Nro de pregunta	**Modelo**	**Verdadero**	**Falso**
1 (a)	Dinámico-Teórico	11	1
2(b)	Cota	0	12
3(c)	Formal	12	0
4(d)	No alcanzable	9	3
5(e)	Aproximación	5	7
6(f)	Dinámico – Práctico	6	6

Nro de pregunta	**Modelo**	**Mejor**
1 (a)	Dinámico-Teórico	4
2(b)	Cota	0
3(c)	Formal	2
4(d)	No alcanzable	4
5(e)	Aproximación	2
6(f)	Dinámico – Práctico	0

Tabla 2: Cantidad de alumnos que indicaron la opción 3 como verdadera en el test.

Del análisis preliminar de los tests de todos los estudiantes surge:

- Sobre un total de 23 alumnos, 19 consideraron apropiada y ajustada a sus pensamientos la idea de límite como un valor que describe cómo una función se mueve cuando x tiende a un cierto punto (modelo dinámico-teórico), y de ellos solo 7 la consideraron como la mejor opción.

[1] Sólo un estudiante no respondió

- La segunda opción elegida por 16 alumnos fue la que representa la idea del valor del límite como un número o punto al que la función consigue acercarse pero nunca alcanzar (modelo no alcanzable), donde solo 8 la consideraron como la mejor.
- Con respecto a la definición formal (opción c) 12 alumnos la consideraron como verdadera pero de ellos solo 2 la marcaron como la mejor.

Luego de las clases dadas por el docente quien los condujo a la definición topológica (formal) de límite, se observa la tendencia del grupo hacia dos modelos, el dinámico-teórico y el no alcanzable, coincidiendo con los resultados del estudio efectuado por Williams. Estas ideas subyacentes persisten en la resolución de las situaciones problemáticas del test, es prueba de ello el uso de expresiones tales como "acercarse a"; "no puede pasar" y "tiende a" para argumentar sus producciones. No logran ver el límite como número sino como valor al que la función se acerca infinitamente dependiendo de los valores que vaya tomando la variable x muy cercanos al punto en cuestión.

Se evidencia además que muchos alumnos no operan con sus modelos espontáneos en la resolución de las situaciones problemáticas, es decir adecuan o cambian la definición que propusieron de límite en un principio, en función de la situación que enfrentan. El tipo de sistema de representación utilizado condiciona el uso de un modelo u otro. A modo de ejemplo presentamos un caso particular:

Una alumna (BE) expresa en el punto 3 que *Por límite entiendo que una función se puede acercar a un punto sin tocarlo.* Mientras que en el punto 4, asegura que $\lim_{x \to 2} 3 = 3$ *por ser una función constante.*

En este caso el alumno presenta el modelo no alcanzable de la noción de límite, pero no operó con él en el ejercicio 4, donde asegura que el límite se alcanza. Notar que puede ocurrir que el estudiante esté evocando, en cada ejercicio, partes distintas de su imagen conceptual que resultan contradictorias, hecho que no advierte por manifestarse en actividades diferentes.

Haciendo un análisis más minucioso de las respuestas del test, encontramos ciertas dificultades que creemos, están íntimamente relacionadas con las creencias que forman los alumnos en torno al concepto de límite, los significados que le otorgan y los distintos sistemas de representación que utilizan. Consideramos en este punto incorporar al análisis las dificultades señaladas en el material de Hitt, Murillo (2005), como veremos en cada caso.

a) El alumno LP, en el punto 8a) del test, asegura que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ denota un claro ejemplo de dos tipos de dificultades: no conocer el significado de las diferentes notaciones y conflicto en la lectura de las gráficas con respecto al límite.

b) El alumno PV en el punto 5 del test expresa que: $Area = \frac{b.h}{2} = \frac{\to 0.h}{2} = \frac{0}{2} = 0$. En la respuesta no aparece el término "límite" lo que da cuenta de la presencia de dificultades respecto de las diferentes notaciones. También se manifiesta la creencia sobre el concepto de límite como una simple sustitución. En este caso, el recurso de "evaluar en el punto" es pertinente por tratarse de una función continua, aunque el estudiante probablemente no haya advertido este hecho.

Consideramos que los estudiantes podrían haber tenido dificultades en la comprensión de los enunciados del test por no ser todos ellos del tipo de resolución con la que trabajaron. Asimismo tenemos en cuenta que el trabajo es de tipo exploratorio, de modo que las conclusiones por supuesto son relativas. A partir de estas consideraciones, podemos apreciar, en primera instancia que:

- Hay una alta persistencia de los modelos espontáneos por sobre la definición formal luego de la enseñanza del tema.
- No tienen claro el significado de la simbología utilizada en la definición, por ende no la usan.
- Adecuan el modelo espontáneo al sistema de representación.

- Buscan el límite por simple sustitución del valor de x.
- Se manifiesta mayoritariamente una de las dificultades mencionadas por Hitt Murillo (2005): *conflicto para otorgarle un significado a la definición* (ε, δ) *en el caso de límite de funciones en un punto*. Esta dificultad es constitutiva del obstáculo epistemológico, como consecuencia de ello, el estudiante se encuentra limitado temporalmente para comprender la definición formal de la noción.
- Probablemente el énfasis puesto en las clases en la exploración numérica vía tabla de valores refuerza el modelo espontáneo dinámico-práctico.

Teniendo en cuenta los trabajos que fundamentan esta investigación, podemos establecer que ante la complejidad del concepto de límite los alumnos utilizan partes de la imagen conceptual sin entrar en conflicto alguno con la definición formal. En función de ello y de otros datos arrojados en el test, estamos en proceso de elaboración de entrevistas personalizadas a un grupo de alumnos con el objeto de complementar la información obtenida en el test y para conducirlos a un acercamiento a la formalización del concepto por medio del planteo de situaciones que generen un conflicto cognitivo que les permita alterar sus modelos.

BIBLIOGRAFÍA

1. ARTIGUE, M.; 1998. Enseñanza y Aprendizaje del Análisis Elemental: ¿Qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *Nro. 1*, *pp. 40 - 55*.
2. BLAZQUEZ, S.; ORTEGA, T., 2002. Nueva definición de límite funcional. *Uno*. Vol. 30, pp 67- 82. Editorial Graó. Barcelona.
3. CORNU, B. 1981. *Apprentissage de la notion de limite. Modèles spontanés et modèles propres*. Fifth International Conference of International Group of Psychology of Mathematics Education
4. CORNU, B.; 1983. *Apprentissage de la notion de límite. Conceptions el obstacles*. Tesis doctoral. Grenoble, Francia.
5. CORNU, B; 1991. Limits. En Tall, D. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
6. HITT, F; PAEZ MURILLO, R. 2005. Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. p 133. En Cortés, J y Hitt, F (eds): *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Université du Québec â Montreál y Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, (México).
7. JUTER, K; 2007. Students´ Conceptions of Limits: High Achievers versus Low Achievers. *The Montana Mathematics Enthusiast*. ISSN 1551-3440. *Vol 4, No 1, pp 53-65*. The Montana Council of teachers of Mathematics.
8. ROBERT, A.; 1983. L´acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l´enseignement superieur. Recherches en Didactique des Mathematiques*,* **3** *(3), pp. 307-341*.
9. TALL, D.; SCHWARZENBERGER, R.; 1978. Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. Mathematics Teaching. *No 82, pp 44-49.*
10. TALL, D.; 1980. Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. Proceedings of the fourth international Conference for the Psychology of Mathematics Education. Berkley, *pp. 170-176.*
11. TALL, D.; VINNER, S.; 1981, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, *12 (2). pp. 151-169*.
12. TALL, D; 1992; Students´ Difficulties in Calculus. Publicado en *Proceedings of Working Group 3 on Students´ Difficulties in Calculus*, ICME-7, Québec, Canada, *pp*

13-28.

13. WILLIAMS, S.; 1991; Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 22, No. 3, pp. 219-236.

ANEXO 1

Apellido y nombre:………………………………

Por favor, te agradecería que respondas este test lo más cuidadosamente posible.

En todos los casos es muy importante que incluyas justificaciones y explicaciones en palabras.

¡Muchas gracias!

---

1. Indicar con una cruz si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa.

V	…	F	…	a) El valor de un límite describe cómo una función se mueve cuando x tiende a un cierto punto
V	…	F	…	b) El valor de un limite es un número o un punto más allá del cual una función no puede pasar
V	…	F	…	c) El valor de un limite es un número tal que las imágenes de una función pueden hacerse arbitrariamente cercanas a él, restringiendo suficientemente los valores de x
V	…	F	…	d) El valor de un limite es un número o punto al que una función consigue acercarse pero nunca alcanzar
V	…	F	…	e) El valor de un límite es una aproximación que puede ser hecha tan exacta como se desee
V	…	F	…	f) El valor de un límite se decide insertando en x números cada vez más cercanos a un número dado hasta alcanzar el límite.

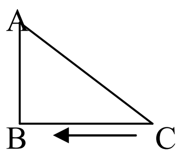
2. ¿Cuál de los ítems anteriores describe de mejor manera lo que entendés por *"límite de una función cuando x tiende a un punto"*?
   Encerrá con un círculo la opción que creas correcta o más adecuada.

a	b	c	d	E	f	Ninguno

3. Por favor describí en algunos renglones lo que entendés por límite, es decir, describí lo que significa decir que *"el límite de una función f cuando x → a es un número L"*.

4. Dada la función f: R → R, f(x) = 3, analizar el límite cuando x tiende a 2. Justificar la respuesta.

5. ¿Cuál es el límite del área del triángulo cuando el punto C se aproxima a B? Justificar la respuesta.



6. Dada *f*: R - {0} → R, $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{100000x}$
   a) Determinar el límite de *f* cuando *x* tiende a 0.
   b) Completar la tabla. ¿Cómo se explica la respuesta dada en a) sobre el límite de *f* cuando *x* tiende a 0 a partir de los resultados de la tabla? Justificar.

x	*f(x)*
0.1	
0.01	
0.001	
-0.1	
-0.01	
-0.001	

7. A un estudiante se le presentó una función f y se le pidió calcular el límite de f (x) cuando x se acerca a cero. Él propuso números cercanos a cero por izquierda y por derecha y

construyó la siguiente tabla:

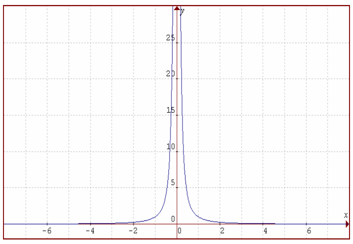
x	f(x)
- 0.1	0.9
- 0.01	0.99
- 0.001	0.999
- 0.0001	0.9999
- 0.00001	0.99999
- 0.000001	0.999999
- 0. 0000001	0.9999999
- 0.00000001	0.99999999
0.1	1.1
0.01	1.01
0.001	1.001
0.0001	1.0001
0.00001	1.00001
0.000001	1.000001
0. 0000001	1.0000001
0.00000001	1.00000001
0.000000001	1.000000001

¿Qué podrías afirmar, y por qué razón, sobre el límite de la función *f* cuando *x* se aproxima a cero en cada uno de los siguientes casos?

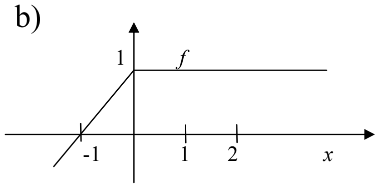
a) Si la tabla se puede seguir generando indefinidamente manteniendo la misma tendencia y forma de completarse.
b) Si únicamente se dispone de la información suministrada por la tabla anterior.

8. Dadas las siguientes representaciones gráficas de funciones, determinar en cada caso, ¿a cuánto tiende f cuando x tiende a 0? En el caso b), además, calcular a cuánto tiende f cuando x tiende a 2. En ambos casos justificar las respuestas.

a)



b)



9. Se instala una planta exótica en un invernadero.
Al cabo de 10 días, la planta mide 1,9 metros
Al cabo de 11 días, la planta mide 1,99 metros
Al cabo de 12 días, la planta mide 1,999 metros
Al cabo de 13 días, la planta mide 1,9999 metros
Al cabo de 14 días, la planta mide 1,99999 metros
Al cabo de 15 días, la planta mide 1,999999 metros
etc….(considerar que sigue creciendo con la misma tendencia de lo exhibido)
a) ¿Te parece que la altura de la planta tiene un límite?, si es así, ¿cuál es?
b) Supongamos que el techo del invernadero está a dos metros del suelo, ¿algún día la planta lo va a tocar?
c) Si tuviéramos la posibilidad de bajar el techo, ¿podríamos hacerlo sin que la planta llegue a tocarlo?