C33

CONSTRUCCIÓN EN EL AULA DE LA IDEA DE CURVA EN UN ENTORNO DE FUNCIONES CUADRÁTICAS[1]

Valeria BORSANI, Juan Pablo LUNA, Carmen SESSA

CEFIEC – Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA
Ciudad Universitaria Pabellón II - Buenos Aires - Argentina

Nivel Educativo: Educación Polimodal, Nivel Medio.

Palabras Clave: Interacciones en el aula, Idea de Curva, Representación gráfica.

RESUMEN

En esta comunicación analizaremos algunos episodios de una clase de tercer año, en la cual los alumnos discuten, durante la resolución del primer problema de una secuencia de aprendizaje de la temática de función cuadrática, en torno a la representación gráfica. Es nuestro propósito dar cuenta de la emergencia en el aula de un conjunto de conocimientos relativos a la construcción de la idea de curva. Mostraremos como las interacciones entre pares, sostenidas a veces por la gestión del docente, resultan fértiles para la formulación de preguntas potentes en la clase y la construcción de nuevos conocimientos.

1. INTRODUCCIÓN

- ¿Qué es una curva? ¿Cómo podemos "controlar" su forma?
- Cuando los alumnos se enfrentan a un problema referido a una variación continua ¿Qué restricciones impone una tabla de valores para la determinación de un gráfico cartesiano?
- Asumido un trabajo previo con la noción de función lineal y pendiente de una recta ¿Cómo operan estos aprendizajes cuando los estudiantes discuten por primera vez en torno a una situación de variación no uniforme?

Al enfrentar a los estudiantes tempranamente con la problemática de la forma que tendrá la curva que representa una variación no uniforme, y hacer de ello motivo de discusión en el aula, es necesario considerar el hecho de que no hay disponibles herramientas matemáticas (las que provee el cálculo infinitesimal) que permitan precisar, a partir de una fórmula, las características de un gráfico. El carácter de herramienta de las funciones, presentadas como modelo de una situación en un determinado contexto, será entonces un punto de apoyo importante para la construcción de la idea de curva. Se trata de una construcción necesariamente precaria y provisoria que se realiza apoyada en los conocimientos construidos sobre las funciones lineales y también contra ellos.
Como introducción al tema de función cuadrática los alumnos enfrentan un problema planteado en un contexto geométrico, elegido por el docente con la intención de permitir la emergencia de los asuntos que hemos mencionado. Específicamente, los alumnos están discutiendo en torno a la elección de un gráfico cartesiano para representar la dependencia entre dos variables definida en el problema.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS QUE DAN UN MARCO A NUESTRO TRABAJO

El marco teórico en el cual venimos desarrollando nuestro trabajo de investigación en didáctica de la matemática, se nutre fundamentalmente de las ideas de Brousseau plasmadas en la Teoría de Situaciones. Brousseau considera dos puntos de partida fundamentales: a) el alumno elabora conocimiento a partir de la interacción con una problemática (un medio o "milieu", pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica) que ofrece resistencias y retroacciones que operan sobre los conocimientos matemáticos puestos en juego, y, b) existe una distancia entre estas elaboraciones y la producción matemática en tanto conjunto organizado de saberes producidos por la cultura.[1]

Las producciones teóricas de muchos otros autores nutren nuestra formación y nuestros modos de interpretar los hechos de la clase. Identificamos a continuación algunos constructos teóricos que muy específicamente nos han servido de herramientas en el análisis que mostraremos más adelante.

Distintos autores que se ocupan de teorizar la producción de conocimientos (Piaget y García (1982), Sierpinska (1989) citando a Wilder, Robert y Robinet (1996), Yackel y Cobb (1997)), distinguen en su modelización el plano de los conceptos, teoremas, propiedades, leyes, problemas, de aquél de las normas que regulan el trabajo (qué es lo que está o no permitido hacer en matemática, qué se considera suficiente para dar por válido un enunciado o un procedimiento, cuáles son los criterios que permiten establecer que una estrategia es "matemáticamente pertinente", etc.).

Yackel y Cobb (1997), plantean que el aprendizaje en matemática es tanto un proceso de construcción individual como un proceso de enculturación colectiva hacia prácticas matemáticas de una sociedad más amplia. En el complejo proceso de la elaboración de normas intervienen: la experiencia de cada alumno como productor, la interpretación de la intención y la expectativa del docente, y los desequilibrios provocados por los otros cuando aparecen en el espacio colectivo diferentes puntos de vista. Para dar cuenta del origen social de estas normas en el aula y de su especificidad con respecto al conocimiento matemático, Yackel y Cobb (op.cit.) hablan de normas socio-matemáticas.

En nuestro estudio se trata del aprendizaje de nociones transversales - paramatemáticas diría Chevallard- como es el concepto de *lo curvo* y la caracterización de un crecimiento no uniforme. Son conceptos que requieren procesos largos y que no son tomados explícitamente como objeto de enseñanza en los programas. Su aprendizaje se despliega en la trama social de la clase.

3. CARACTERIZACIÓN DE LA EXPERIENCIA

Los hechos que serán analizados en esta comunicación fueron seleccionados dentro de un conjunto de observaciones más amplias que llevó adelante el grupo, en dos terceros años de la misma escuela[2] a cargo de dos profesores diferentes. Ambos son integrantes del equipo de

[1] "El concepto teórico de situación adidáctica modeliza la interacción del alumno con el medio en una producción de conocimiento independiente de la mediación docente. Las interacciones entre docente y alumno a propósito de la interacción del alumno con el milieu se modelizan a través de la noción de contrato didáctico. Esta noción es una herramienta teórica que da cuenta de las elaboraciones de los alumnos relativas a un determinado conocimiento matemático, como producto de sus interpretaciones de las intenciones y las expectativas –explícitas e implícitas- del docente. Estos dos tipos de interacciones que se separan en el análisis teórico, constituyen una trama en la cual se inscriben los procesos personales de aprendizaje". Sadovsky (2005)

[2] La experiencia se realizó en el Colegio Paideia a cuyas autoridades agradecemos muy especialmente toda la colaboración brindada.

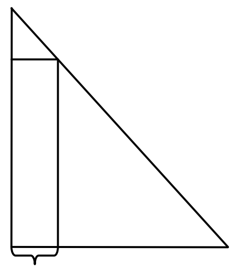
investigación y coautores de esta comunicación[1]. Ellos fueron formados como docentes[2] teniendo como referencia el marco teórico que hemos mencionado anteriormente y comparten con el resto del equipo el valor de la interacción de los alumnos con problemas y el debate colectivo en el aula.
La planificación de las clases fue realizada en conjunto por los dos docentes -con la marca que necesariamente impone la institución en la cual desarrollan su tarea- y discutida con posterioridad por la totalidad del equipo. No es el objeto de la investigación poner a prueba la propuesta didáctica de los docentes sino *aprovecharla* para estudiar la emergencia de ideas en el aula.
Los episodios que analizaremos son parte del trabajo de los alumnos con el primer problema de una secuencia de aprendizaje de la temática de función cuadrática.

4. ENUNCIADO DEL PROBLEMA Y BREVE ANÁLISIS *A PRIORI* [3] DE LA ACTIVIDAD QUE SE ANALIZARÁ

En el problema intervienen magnitudes variables; la relación entre dos de ellas permite establecer una dependencia cuadrática. En el aula se intentará que los alumnos caractericen algunos aspectos de esta dependencia y discutan en torno a la elección de un gráfico cartesiano para representarla.

<u>Problema 1</u>: *Se tiene el triángulo rectángulo isósceles, cuyos catetos miden 11 cm. Considerar los rectángulos que se pueden dibujar dentro de la figura de la siguiente manera:*

a) *¿Cuál es el área del rectángulo de base dos? (es el rectángulo que está dibujado)*
b) *¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área mayor que el que está dibujado? Si es posible encontrar alguno, dar la base.*
c) *¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área menor que el de base 2? Si es posible encontrar alguno, dar la base.*
d) *¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga un área igual que el de base 2? Si es posible encontrar alguno, dar la base.*



Al elegir este problema, los docentes tuvieron en cuenta el trabajo previo de los alumnos en torno a la interpretación de gráficos de funciones. A su vez este problema - y toda la secuencia que se planeó – fue concebida como una oportunidad para que los estudiantes pudieran avanzar en ese trabajo de interpretación. Particularmente, se tuvo la intención de aprovechar el trabajo del año anterior con el concepto de función lineal.
Para comenzar con el trabajo en el aula se pidió a los alumnos que, en pequeños grupos, resolvieran los cuatro primeros ítems del problema:
El trabajo con estos ítems se pensó como un primer momento en el cual los alumnos comienzan a familiarizarse con la situación. En cada aula se conversó explícitamente sobre

[1] El equipo de investigación está conformado por los tres autores de este artículo y Cecilia Lamela, Mara Cedrón y Mercedes Marchesin, quienes participaron de las discusiones previas y colaboraron en las observaciones de las clases que serán analizadas.
[2] Concluyeron recientemente la carrera del Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.
[3] " A través del análisis *a priori* de las interacciones potenciales de un alumno con un problema, la Teoría de Situaciones intenta dar cuenta de las posibilidades de acción del sujeto frente a esa tarea problemática, de las retroacciones del medio, y de los modos de validar que el sujeto podría elaborar en esas interacciones. Desde el punto de vista metodológico, el análisis a priori de la situación adidáctica que el investigador pretende estudiar, permite construir un conjunto de observables que constituirán un marco para interpretar los datos del trabajo experimental". Sadovsky (2003)

qué se quería decir con las expresiones “dentro de la figura de la siguiente manera” o “algún rectángulo de este tipo”, hasta precisar entre todos el significado del enunciado.

En ambos cursos, luego de trabajar con estos ítems se hizo una puesta en común de las diferentes respuestas y estrategias de resolución. Los docentes, a partir de las distintas intervenciones de los alumnos, organizaron la información numérica que se generó en una tabla de valores de tres columnas: Base – Altura – Área.

A diferencia de lo trabajado con función lineal en contextos, en este caso aparece un tipo de proceso que no es “siempre” creciente ni “siempre” decreciente. En particular existen pares de valores para la base que se corresponden con el mismo valor de área: dado un rectángulo de base *a* es posible encontrar otro rectángulo con base 11 – *a* que tiene igual área (en el aula, a los dos valores de la base que determinaban igual área, se los llamó “compañeros”). No se pensaba que todos los alumnos a partir de resolver los primeros cuatro ítems del problema llegarían solos a estas conclusiones sino que estaba previsto que las mismas se terminaran de precisar en el espacio colectivo con participación del docente.

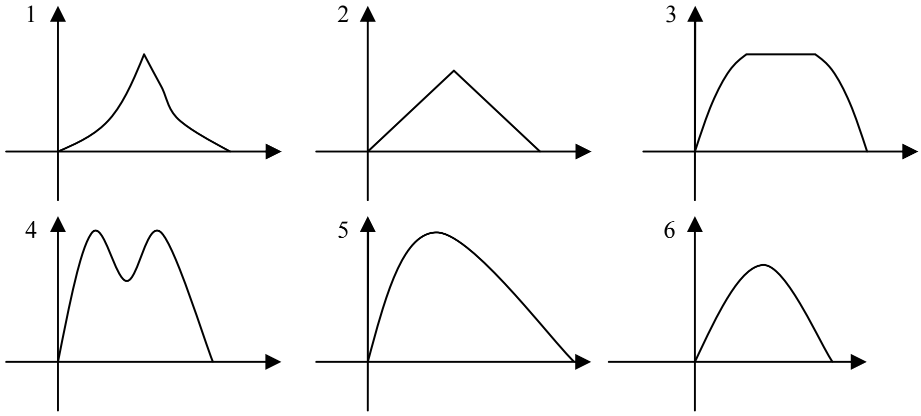
Al finalizar el trabajo con los cuatro primeros ítems, se construyó colectivamente la siguiente tabla de valores:

BASE	ALTURA	AREA
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30
6	5	30
7	4	28
8	3	24
9	2	18
10	1	10

Al construir la tabla los docentes *recortaron* del conjunto de relaciones que se estuvieron estudiando, aquellas que caracterizan una determinada función: la variación del área del rectángulo en función de la base. Anunciaron a sus alumnos que en las clases siguientes seguirían trabajando con esta función.

En esta comunicación nos proponemos analizar las interacciones de los alumnos en uno de los cursos a propósito del ítem e) del problema.

e) Para cada uno de los siguientes 6 gráficos, decidan si puede corresponder o no a la representación gráfica de la variación del área del rectángulo en función de la base del mismo. En cada caso, justifiquen su respuesta.



¿Cuál es la intención de enfrentar a los alumnos con esta actividad?
Estudiar cada uno de los seis gráficos, buscando razones para aceptarlo o descartarlo, es una tarea que comporta una complejidad diferente a la de confección de un gráfico, que clásicamente se resuelve en la escuela siguiendo el siguiente recorrido: fórmula de la función → confección de tabla de valores → marcado de puntos en un sistema de ejes cartesianos→ dibujo de un gráfico aproximado uniendo los puntos.
Con esta tarea se pretende que el análisis de cada gráfico se apoye en características del fenómeno. Para ello habrá que convertir al registro de los gráficos cartesianos los aspectos identificados en el trabajo previo con el problema y, al mismo tiempo, al estudiar los gráficos los alumnos podrán elaborar nuevas relaciones en torno a la función estudiada.
Los seis gráficos comparten con la función área algunas características identificadas a partir de los ítems anteriores; en ese sentido, decidir si un gráfico corresponde o no a esta función obligará a los alumnos a estudiar de manera más precisa la variación. Por ejemplo se espera que los alumnos al estudiar el gráfico 2, lineal a trozos, identifiquen un aspecto característico de la situación: el área "crece primero y decrece después a medida que la base aumenta". Sin embargo, la linealidad en la totalidad del intervalo donde el área crece (o decrece), es una característica de este gráfico que no se corresponde con la situación. Para analizar esto último es necesario recurrir a los datos numéricos recogidos en la tabla de valores.
La anticipación que hacían los docentes de las respuestas de sus alumnos tomaba en cuenta que muchos de ellos podían llegar a considerar como posibles varios de los gráficos presentados. Ellos tenían presente que identificar de a una diferentes relaciones no lleva necesariamente a ponerlas en juego en conjunto para descartar un gráfico. En particular los docentes esperaban que muchos alumnos incluyeran el gráfico 1 como posible, además del 6.
Hacer una tabla de valores no necesariamente lleva al alumno a establecer alguna relación sobre el tipo de variación del fenómeno que está estudiando. Es necesario pensar en un trabajo de análisis *sobre* la tabla construida para atrapar algunas características de la variación. En nuestro análisis mostraremos tanto los límites como la potencialidad que comporta el recurso de la tabla de valores para la tarea de identificación o construcción de un gráfico cartesiano.

5. EPISODIOS ANALIZADOS [1]

En el aula han comenzado a circular cuestiones relativas a la variación del área: que aumenta y disminuye, que hay dos valores donde da igual, que en 5,5 tiene un máximo. Si bien no apareció el valor 5,5 en la tabla que se hizo en el pizarrón, algunos alumnos sí lo incorporaron.
El ítem e) había quedado como tarea de la clase anterior y la docente relanza la actividad proponiendo un trabajo en grupos en la clase y haciendo explícito que debe estudiarse cada gráfico:

PROFE: ... había que terminarlo. La idea es esta, en grupos discutan entre ustedes lo que pensaron. No es solamente decir qué gráfico les parece que es, sino por qué los demás no sirven, ¿se entiende? Ojo que puede haber 2 ó 3 que representan la situación, no se queden con uno, por ahí hay varios que pueden representar la situación. Entonces la idea es que anoten las características que ustedes creen que debe tener el gráfico y por qué cada uno de estos 6 gráficos sirve o no sirve para modelizar la situación.

Episodios del trabajo en un grupo

<u>Episodio 1. Entre producir un gráfico a partir de algunos valores o elegir entre gráficos dados.</u>

[1] Algunos episodios refieren a discusiones en pequeños grupos, sin participación docente, mientras que otros corresponden al espacio colectivo regulado por él.

La actividad de buscar razones por las cuales se puede descartar un gráfico y razones por las cuales se lo podría elegir, es nueva para los alumnos. Para encararla, lo primero que asumen los chicos es elegir "el" gráfico correcto. En la clase anterior, Joaquín había comenzado a producir un gráfico aparentemente ubicando en ejes cartesianos los valores que iba obteniendo.

Este gráfico, junto con la tabla, es usado como soporte para la elección de uno de los 6 gráficos dados.

LEKI: Vos cuál elegiste Juaco?
JOAQUÍN: yo el 6.
JOACO: uno por unoooo
LEKI: el primero, ¿por qué es o no es?
JOAQUÍN: yo puse que no, porque nuestro gráfico muestra la subida y la bajada de la curva que es igual, sube con la misma… con la misma inclinación.
JOACO: bueno, la idea es que en este caso si este tuviese un 30…
JOAQUÍN (interrumpiendo): *pero nuestro gráfico… bah, yo por lo menos el que hice, en vez de ir así va así.* (Se estaría refiriendo al tipo de curvatura del gráfico que él produjo)
JOACO: no hay que hacer según el gráfico que hicimos. Según vimos hay 2 valores que tienen 30, o sea que en un momento va a tener que… o sea, tiene que volver a pasar.
JOAQUÍN: pero este pará… este sí. (Refiriéndose al primer gráfico)
JOACO: pero si este es 30… no, este es 30
JOAQUÍN: si, ponele que este es 30, este es 5…este es 6…
JOACO: acá es 30 y acá… este también puede ser… (Refiriéndose al gráfico 1, como asombrándose)
JOAQUÍN: si este puede ser… (Refiriéndose al primero) *pasa que nosotros cada vez que vamos aumentando… de golpe esto va haciendo más así y no así.* (Vuelve a comparar el tipo de curvatura del primer gráfico con el gráfico producido por él)
JOACO: che, este puede ser (refiriéndose al 1º gráfico)

Joaquín está pensando en su gráfico y contraponiéndolo al gráfico 1 (mira la forma del dibujo). Esto lo lleva en un primer momento a descartarlo, porque visualmente no coincide con la imagen de su dibujo. Parece estar convencido de que el gráfico 1 no sirve, pero no encuentra argumentos para justificarlo salvo la comparación con el suyo. Es posible que el comentario de la profesora que advierte que puede haber más de un gráfico que sirva, junto con el freno que impone Joaco, hagan que Joaquín más adelante pida ayuda a otros, para justificar.

Joaco está tratando de interpretar el gráfico 1, cuál es el máximo, en dónde está el 30, el 5 y su compañero. No usa el gráfico de Joaquín para compararlo con el primero, esto lo posiciona en un lugar distinto al de Joaquín. ¿Qué mirar del gráfico? Esto es en lo que está trabajando Joaco.

En la interacción entre ambos, Joaquín es llevado a tener en cuenta características ya estudiadas de la situación que sí se cumplen en el primer gráfico (el hecho de que existen “compañeros” fue discutido colectivamente en el aula y es visible para algunos valores de la tabla). Sin embargo, para descartar este gráfico, no se apoya en características de la situación, ni en la tabla. Su único argumento por ahora es contraponerlo con el gráfico construido por él.

Los argumentos no terminan de convencer a Joaco acerca de la no-pertinencia del gráfico 1 y Joaquín pide ayuda a otro grupo -como se observa en el próximo episodio- en la búsqueda de argumentos para descartar el primer gráfico.

<u>Episodio 2. Estudiar los cambios en la velocidad de crecimiento para caracterizar el tipo de curvatura</u>

JOAQUÍN: chicos, ¿qué pusieron en el uno, el primer gráfico? ¿Cómo justificaron? (le pregunta a otro grupo)
SEBAS (pertenece a un grupo cercano al de Joaquín que es quién pregunta): *porque **y** aumenta cada vez más, si te fijás **y** aumenta cada vez más; el área siempre va aumentando* (se refiere al gráfico 1)
JOAQUÍN: no, el área no, la base…
JOACO: el 1 puede ser, che, está bien.
SEBAS: no, no puede ser.
JOACO: pero por ahí está mal la escala chabón.
JOAQUÍN (sin prestar atención a lo anterior): *no entiendo Sebas ¿cómo justificás?*
SEBAS: fijate la tabla, x = 2 el área es de 18; x = 3 el área es 24; el x = 4 el área es 28; si te fijás del 18 al 24 aumenta 6 y de 24 a 28, aumenta 4… tiene que seguir aumentando 2...
JOAQUÍN: hasta que no aumenta.
JOACO (insistiendo con su tema): *por ahí está mal la escala, por ahí está mal la escala chabón.*
SEBAS: no, Juaco pará
JOAQUÍN: aaaa, (con mucho énfasis) *sí ya entendí….*
SEBAS: si vos lo seguís esto se va más para arriba. (se refiere al gráfico 1)
JOAQUÍN: acá, el área va aumentando cada vez menos, 8, 6, 4 (se estaría refiriendo a la tabla o al gráfico que él había producido)*... y acá va aumentando cada vez más* (señalando al gráfico 1).

Sebastián ha aportado una nueva estrategia para analizar los gráficos: fijarse en la tabla, considerando de a pares filas consecutivas, para estudiar y comparar el crecimiento de **y** para intervalos iguales de **x**. En el marco del estudio de las funciones lineales el año anterior, los alumnos hacían este tipo de maniobra para identificar -a partir de la tabla- funciones no lineales, o para calcular la pendiente de funciones ya identificadas como lineales a partir de un contexto. Ahora Sebastián repite la maniobra para contestar una pregunta nueva: *¿cómo decidir si una curva, en un cierto intervalo, será cóncava o convexa?* (aunque por supuesto, él no se plantea la pregunta en estos términos).
Este es un uso de la tabla diferente al que hizo Joaquín: para Sebastián es un soporte para estudiar la velocidad de crecimiento, mientras que para Joaquín la conversión de los datos numéricos al dibujo de puntos en un plano cartesiano (y el posterior dibujo de un trazo curvo que los une) no porta necesariamente relaciones relativas a la variación del área. Sin embargo, la explicación de Sebastián encuentra un lugar en los pensamientos de Joaquín que hace suyos los argumentos de su compañero de por qué no sirve el gráfico 1.

Episodios durante la discusión colectiva

<u>Episodio 3. Las ideas sobre variación constante en la discusión en torno al tercer gráfico.</u>
En el pequeño grupo que hemos estado analizando, después de haber discutido con detalle en torno al gráfico 1, los siguientes se van descartando rápidamente. No se detienen a estudiar por qué podrían servir, simplemente los descartan. En particular en el grupo se pasa muy rápido por el descarte del gráfico 3, ya que saben que en 5,5 debería estar el valor máximo. Por contraposición, en la discusión colectiva, el gráfico 3 no es descartado de inmediato. Se discute un buen rato sobre ello. En la discusión se ponen en juego las ideas construidas por los estudiantes el año anterior sobre las funciones constantes:

- Al estudiar funciones en general definidas en contextos específicos, éste resultaba un soporte muy fuerte para analizar si un fenómeno es o no constante. Por ejemplo, a pesar de que en una tabla de temperaturas se indicaban dos momentos del día con 21°, no se infería de allí que la temperatura fuera constante entre esos dos instantes.

- Con posterioridad se habían estudiado fenómenos de variación uniforme y en particular las “funciones constantes” (el gráfico que se obtiene, el significado de “pendiente cero”, la fórmula que las caracteriza). En el contexto de las funciones lineales, que fueron objeto de un trabajo prolongado, se había identificado en el aula que si dos valores del dominio tienen la misma imagen, se puede asegurar que la función es constante.

En el problema que estamos analizando, y en este episodio en particular, los alumnos se están basando fuertemente en los valores de la tabla, en la cual aparecen consecutivamente dos valores del dominio con la misma imagen. Las dos ideas mencionadas anteriormente son sostenidas por diferentes alumnos y entran en conflicto en el debate colectivo.

TERE: es como que primero uno tiene que hacer como una mirada general y encontrar lo que más o menos se cumple lo que está pidiendo, hay 2 valores que tienen 30.

ANA: entonces ahí se forma como una constante. (Ana y Tere trabajaron en el mismo grupo)

PROFE: ¿ustedes se están basando en la tabla?

ANA: Sí, ¿te la dicto? Poné base, altura y área: 1, 10, 10; 2, 9, 18; 3, 8, 24; 4, 7, 28; 5, 6, 30; 6, 5, 30; 7, 4, 28; 8, 3, 24; 9, 2, 18; 10, 1, 10. (va dictando de a tres valores naturales y hace una pausa entre terna y terna que dicta)

TERE: sí, lo que yo estaba diciendo es que, a grandes rasgos como se ve en ese (señala el gráfico 3), *ahí el área …hay 2 valores que comparten la misma área.*

PROFE: ¿cuáles son Tere?

TERE: el 5 y el 6, bah, lo digo por la base. Yo decía que a grandes rasgos uno primero se tiene que fijar cuáles de los gráficos tienen 2 valores que van a medir igual.

PROFE: Y con ese criterio, por ejemplo ¿cuáles podrías descartar?

TERE: Podría descartar el primero, el segundo…

NACHO: no, el primero no lo podés descartar.

TERE: sí lo podés descartar

SEBAS: el 4 también.

PROFE: Tere lo que está diciendo es que…, en el gráfico 3 Tere claramente ve que hay 2 bases que tienen la misma área, ¿estamos?, lo que Tere dice es que con ese criterio ya uno puede empezar a descartar gráficos, ¿por ejemplo?

LEKI: se puede descartar un gráfico sólo, eso creo.

PROFE: Por ejemplo este primero, ¿se podría descartar usando tu criterio, Tere?

TERE: Sí, porque digamos, porque yo ahí no veo ningún, digamos, no veo ninguna constante, yo no veo.

ANA: el gráfico 1 no marca ninguna constante ahí

MARIANA: pero no es una constante eso. (Hablan todos juntos)

Tere y Ana proponen mirar “a grandes rasgos” los gráficos, a partir de una propiedad que “leen” en la tabla y enuncian de este modo: *hay dos valores que tienen la misma área.*

La docente le confiere a esta propiedad un estatuto de criterio y propone una nueva tarea a toda la clase que es utilizarlo para analizar los gráficos.

Las respuestas tan discordantes entre Tere y Ana por un lado y el resto de la clase por el otro, hacen visible que las autoras están pensando en algo más que lo que enuncian. La visión de la tabla, en la cual entre 5 y 6 no hay ningún otro valor de x consignado, y el hecho de que para ambos el valor de *y* es 30, induce probablemente a que ellas consideren que no hay variación del área para x *entre* 5 y 6; pareciera que el criterio que en realidad ponen en juego ambas es "*mirar si hay dos valores de la base entre los cuales no hay variación del área"*.

Los conocimientos construidos sobre las funciones lineales estarían operando aquí: es posible que ambas calcularan la pendiente de una recta como "lo que varía *y* cuando *x* crece 1". En ese sentido, los pares ordenados (5; 30) y (6; 30) estarían mostrando una pendiente nula, y por lo tanto un tramo constante. Desde esta interpretación el único gráfico que aceptarían es el tercero.

Sin embargo, la mayoría de los chicos toma el criterio tal cual fue enunciado y señalan su inutilidad para descartar gráficos:

LEKI: viste que Tere dijo que se podían descartar...., no sé, en todos los gráficos va a haber 2 puntos que tienen el mismo valor.

PROFE: ¿Están de acuerdo con eso: que en todos los gráficos hay 2 valores de x que tienen el mismo valor de y?

(Hablan todos juntos)

LOLA: que en estos… en todos, porque todos son… y es más, en uno hay 4.

Finalmente, otra alumna, Elena, refuta la idea central de Tere y Ana, en el sentido de que se puede ver que el tramo entre 5 y 6 no es constante si uno calcula otros valores más.

ELENA: a nosotras lo que nos sirvió lo de buscar la constante, en el sentido de que el tercero que es una línea así, o sea, sube, hay una constante y baja… y lo que mucho después nos dimos cuenta fue que, o sea, no estamos hablando de puntos solos sino que, o sea, si vos aumentás la base entre 5 y 6, si vos ponés 5,1 va a aumentar también, no se va a mantener el 30.

PROFE: ¿está bien lo que dice?

JERO: sí.

ELENA: lo que probamos fue hacer 5,5 como base y nos daba como altura 5,5. Da 30,25

PROFE: o sea que sube.

ELENA: sí.

PROFE: poquitito pero sube.

ELENA: sí. Entonces pusimos, marcamos lo que sería 30 y le sumamos 25 centésimos.

PROFE: en este gráfico? (Señalando el tercero)

ELENA: claro… suponete que a la línea que está es constante

PROFE: sí.

*ELENA: eso marcalo en la **y**, eso es 30, 30,25 sería un cuartito más, tendría que subir, el gráfico lo subís un poquitito, un cuarto.*

Durante el trabajo en grupos, Elena y sus compañeras habían comenzado eligiendo el gráfico 3 desde un posicionamiento cercano al que sostienen Tere y Ana. Según ella misma afirma fue *mucho después* que se dieron cuenta que podían agregar nuevos valores a la tabla. Introduce, con esto, un nuevo asunto que se discutirá en el aula. De eso trata el próximo episodio.

Episodio 4. La compleja relación tabla – gráfico

¿Qué información puedo considerar de una tabla de valores como para estudiar posibles gráficos de una situación? En la tabla se representan sólo algunos valores numéricos de las variables en juego. ¿Qué límites impone esto?

La tarea de producir un modelo gráfico -o estudiar posibles modelos ya producidos- de una situación caracterizada sin ambigüedad por un texto escrito, muchas veces es realizada en la escuela a partir de la confección de una tabla (necesariamente finita). Ahora bien, si en el proceso se abandona la situación inicial y se considera al gráfico como modelo de la tabla, los datos resultan insuficientes para identificar el modelo adecuado de la situación. En eso están Tere y Ana que como hemos visto leen en la tabla más de lo que ella informa, sin recurrir a la situación inicial del problema. Los tres registros -tabla, gráfico, problema escrito- deben ser puestos en juego en simultáneo, como hace por ejemplo Elena, para poder realizar la tarea de modelización.

Antes de enfrentar este problema, estos alumnos han trabajado básicamente con dos tipos de situaciones en relación con la información que provee el texto escrito.

Por un lado los problemas en los cuales el texto escrito presenta un contexto de dependencia entre variables (la temperatura en una ciudad en distintos momentos del día, la altura o el peso de un individuo en diferentes edades, etc.) y la información de cómo es esa relación se provee tanto con una tabla (datos discretos) como con un gráfico.

Por otro lado enfrentaron problemas en los cuales el texto escrito caracteriza completamente la dependencia funcional (problemas en contexto de variación uniforme que por lo tanto se modelizan con una función lineal). Los conocimientos construidos en torno al objeto "variación uniforme" les han permitido hacer una anticipación de las características globales del gráfico asociado a una cierta situación. Unos pocos cálculos realizados a partir del texto escrito, permiten la realización efectiva de un modelo gráfico.

La situación que se les presenta ahora no pertenece estrictamente a ninguno de los dos tipos anteriores, y los alumnos la enfrentan desde distintas posiciones. Estas diferencias crean tensiones en el aula que permiten la emergencia de ideas potentes acerca de la relación tabla – gráfico, como veremos en los dos siguientes extractos de la clase.

(La clase sigue discutiendo en torno del gráfico 3)

PROFE: constante es que no aumenta, lo que Lola dice es que si uno mira la tabla que ella y Viole tenían, ellas no tenían el 5,5 ¿no lo tienen, no? Ellas lo que tienen es que para el 5 da 30 y para base 6, también da 30. Entonces dicen, bueno, este tramo va. (Refiriéndose al tramo horizontal que figura en el dibujo)

MARTÍN: ***pero vos no podés hacer la línea con una tabla.***

PROFE: ¿por qué no podés?

MARTÍN: *son puntos nada más.*

PROFE: ajá.

DIEGO: ***porque en la tabla son puntos solitarios.***

MARTÍN: no se puede hacer el gráfico con una tabla. Se hacen nada más puntos y no se unen, porque no sabés. (En el momento de trabajo grupal Martín había marcado muchos puntos en un sistema de ejes coordenados que correspondían a pares (x; área del rectángulo de base x) pero no los había unido).

Diego y Martín enuncian una norma para invalidar el tramo horizontal que Lola había considerado posible. Es una vieja norma discutida el año anterior durante los primeros aprendizajes de funciones: *si tenés valores sueltos en una tabla no se puede saber como será el gráfico entre los valores*. (El tratamiento de funciones lineales que los alumnos habían realizado posteriormente de algún modo había *sacado de circulación* esta norma: si la función es lineal, ellos sí hacían líneas a partir de tablas). Esta norma le permite a Martín poner en duda la elección de sus compañeras del gráfico 3: no se puede saber si será recto el tramo solamente con dos valores. Particularmente, él lo había descartado porque calculó el área para valores de x entre 5 y 6, al igual que Elena.

Para Martín, la misma norma lo lleva a la imposibilidad de producir un gráfico (continuo) a partir de una tabla, por más valores que se tomen.

El haber planteado a los alumnos la tarea de elegir entre gráficos ya producidos y no la de

producir ellos mismos un gráfico, toma en cuenta justamente esta imposibilidad de producir un trazo "continuo" a partir de datos discretos.
Explicitada la norma, Lola la pone en juego de manera provocativa.

ANA (a Lola): *decile…*

LOLA: entonces ninguno de estos gráficos está bien.

PROFE: ¿por qué?

LOLA: porque con respecto a la tabla...ningún gráfico se puede usar.

PROFE: está bueno lo que está diciendo Lola, y está bueno porque está complementando lo que dice Martín, con la tabla uno no puede sacar toda la información de la función, sacás apenas alguna que otra información, ¿sí?

NACHO: pero la podés pensar, Vale…

PROFE: este gráfico 3 está puesto… de algún modo para hacer pensar en eso, que si uno se basa en la tabla nada más, ¿sí? podemos cometer el error de pensar que del 5 al 6 es constante. Pero ya Elena calculó que para una base de 5,5, el área le da un poquitito más grande.

ELENA: y ahí ya te cambia todo… el gráfico.

PROFE: ahí va. Tenemos la tabla pero tenemos el problema también, conocemos que era de rectángulos, que puedo ir agrandado la base y achicándola. O sea, no tengo sólo la tabla, tengo la tabla más un problema que conocemos. Apoyados en el problema podemos saber que el gráfico 3 no puede ser.

ANA: Pero… vos podés ahora elegir un gráfico y… lo que vos ahora estás afirmando que después vuelve a bajar y después… no, que el 5,5 primero sube y después vuelve a bajar pero… como que si vos elegís un gráfico puede… no sé como decir, puede volver… puede hacer así y vos estás aplicando un gráfico que capaz tampoco sirve. Como que hay números que vos no estás tomando…

ALUMNA: Y en el gráfico siempre vas a saber cuánto es el área para cualquier base y si aumenta o disminuye.

SEBAS: ***el gráfico tiene todos los puntos.***

ANA: o sea, te estoy diciendo que, cuando vos tenés la tabla, cuando tenés el 5,5 también te están faltando datos que te pueden decir si el área sube o baja. Tenés números, 5,0005 que por ejemplo vos no lo tomás en cuenta pero puede que eso aumente o disminuya.

PROFE: Es verdad lo que ustedes dicen. La tabla junto con el problema nos va a poder permitir solamente afirmar que algunos gráficos podrían servir y otros no.

Lola, muy centrada en la tabla de valores, destaca la imposibilidad de decidir que un gráfico *sea* el que represente esa tabla.
En un primer momento la profesora enfatiza el hecho de que la tabla se puede ir agrandando con todos los valores que se quiera, ya que hay una situación descripta verbalmente que lo posibilita. Efectivamente, varios estudiantes han ido ampliando la tabla para estudiar los gráficos.
A partir de la primera versión de tabla como conjunto de 10 valores discretos, los alumnos han ido construyendo una idea de tabla que se puede completar con números "tan cercanos a los dados como se quiera". Podríamos decir que están pensando en una tabla *densa como proceso* (proceso en el sentido al que se refiere A. Sfard (1991)). En cada instante de ese proceso, la tabla permanece finita y discreta y por lo tanto sustancialmente diferente del objeto "representación gráfica de la función". Las expresiones de los alumnos en torno a este último estarían revelando que lo conciben con una cierta propiedad de completitud: "el gráfico tiene todos los puntos". ¿Estarán concibiendo la curva de una manera global, intuitivamente continua, sobre la cual los puntos *se ubican*? ¿O más bien se estarán refiriendo al resultado de haber calculado la función en "todos los números" y haberlos marcados en

el plano cartesiano?[1] No tenemos elementos suficientes como para poder decidir a cuál de estas dos concepciones se ajustan más las ideas de los alumnos.
En la situación que estamos estudiando -independientemente de las ideas en torno a la relación punto/curva que los alumnos estén poniendo en juego- se conciben los puntos de la curva en relación directa con un par de números: valor de la base y valor del área del rectángulo correspondiente. ¿Cuál es el conjunto numérico en el que estarán pensando los alumnos? Si bien ellos conocen algunos números irracionales no han tenido ninguna experiencia de trabajo con $\Re$ y probablemente el conjunto numérico que están invocando implícitamente sea **Q** (con su propiedad de densidad). Es muy probable que la compleja noción de completitud y su diferencia con la noción de densidad permanezca opaca para los alumnos, y que ciertas expresiones de ellos escondan la idea de que, si uno pudiera calcular la función *en todos los números* (racionales), con esa tabla infinita lograría todos los puntos que aparecen en el gráfico.
En el aula, todas estas ideas muestran que no hay modo de validar que el gráfico 6 efectivamente *es*. Las discusiones de los alumnos se ubican justamente en esta cuestión, cambiando la naturaleza de la tarea que tenían. Ana y Lola dan una caracterización precisa del problema que enfrentan: para producir/ identificar el gráfico de esta situación no alcanza con tener finitos valores de las variables en una tabla y por más que se puedan ir agregando tantos valores como se quiera, siempre serán finitos y no se podría asegurar qué comportamiento tiene el fenómeno entre dos de los valores calculados, y por ende no se puede asegurar cuál es el gráfico. En su última intervención la profesora contesta al problema que plantean Ana y Lola, restituyendo la tarea: decidir si un gráfico puede o no representar la variación del área en función de la base y por qué. No se buscaba poder asegurar que un gráfico *es*, sino que *puede ser.* Los episodios analizados han mostrado la fertilidad de la tarea propuesta.

REFLEXIONES FINALES

El estudio que hemos realizado se ubica, como ya dijimos en un momento de introducción al estudio de fenómenos cuadráticos, momento que coincide para los alumnos con el inicio de un estudio un poco más sistemático de fenómenos de variación un uniforme.
Las distancias/ tensiones/ puntos de apoyo entre los nuevos asuntos y los viejos conocimientos ubican a los alumnos de una clase en diferentes posiciones. El espacio social de la clase, como espacio de interacción de los alumnos sostenido por el docente, juega un papel importante en la formulación de nuevas preguntas y la producción de conocimientos.
El análisis que hemos realizado nos permite precisar esta idea en distintas direcciones:

- En **relación con la tarea** que enfrentan los alumnos, la actividad de buscar razones por las cuales descartar un gráfico y razones por las cuales se lo podría elegir, parece generar condiciones para que los alumnos se involucren en el estudio de la relación entre las magnitudes en juego y el tipo de variación. En el episodio 1, se hace visible la diferencia entre esta tarea y la clásica tarea de producir un gráfico cartesiano a partir de una tabla de valores construida previamente. Esta última, puede resolverse con éxito sin necesidad de estudiar los cambios en la variación de las variables en juego.
- En la **interacción entre pares**, el aporte de un compañero a propósito de los conocimientos en juego en una tarea, desencadena un proceso personal de construcción de nuevas relaciones. En el episodio 2 de nuestro estudio señalamos cómo un estudiante, ante la

[1] "Rafael Nuñez, Laurie Edwards y João F. Matos (1999) dentro de la perspectiva de la *emboided cognition* y en el marco del análisis cognitivo que realizan de la noción de función continua, distinguen dos concepciones de la noción de recta. Una de tipo cinemática, espontánea y naturalmente continua, sobre la cual los puntos *se ubican*. La otra concepción considera la recta formada por (la unión necesariamente no numerable de) puntos que la constituyen." Analía Bergé (2004)

necesidad de justificar una respuesta que él tiene por segura -que el gráfico 1 no sirve- recurre a un compañero y entiende algo nuevo, a partir de sus explicaciones.

- Los **conocimientos** sobre función lineal **como punto de apoyo** para estudiar variaciones no uniformes:
  - Una estrategia que los alumnos ponían en juego al estudiar los fenómenos lineales -comparar el crecimiento de **y** para intervalos iguales de x- es adaptada exitosamente para decidir sobre el tipo de concavidad de un gráfico cartesiano (episodio2).
  - Frente a una tabla de valores en la cual aparecen consecutivamente dos valores del dominio con la misma imagen varios alumnos sostienen que se trata de una función constante entre ambos valores. Mientras que algunos estudiantes pueden salir de esta posición interactuando con el problema, otros necesitan de la interacción con sus pares para modificar su punto de vista.
- Podemos identificar algunas características de la **gestión del docente** en el episodio 3:

-- en interacción con un par de alumnas ayuda a que ellas precisen una afirmación que en principio enunciaron vagamente
-- no toma partido por la veracidad de lo que se está afirmando
-- invita implícitamente a todos los estudiantes a poner a prueba como herramienta lo afirmado.

Son características de la intervención docente que generan buenas condiciones para la interacción entre los alumnos y potencian la producción de nuevos conocimientos en el espacio colectivo.

- Las alumnas que más *ingenuamente* consideraron sólo la tabla de valores original para graficar, después logran precisar mucho los límites de la tarea. Se produce en la clase un cambio de contrato para ellas que las hace avanzar de golpe en la comprensión del estatuto de la actividad que tienen entre manos (episodio 4).
- Las **diferencias** entre las posiciones de los alumnos crean **tensiones** en el aula que permiten la **emergencia** de ideas potentes acerca de la relación tabla – gráfico. En la clase que estuvimos analizando estas diferentes posiciones eran esperadas por los docentes y provocadas a partir de varias decisiones que tomaron: por un lado, la elección de un primer problema que porta una relación entre el texto y el gráfico totalmente nueva para los alumnos (ver el análisis del episodio 4); por otro lado la inclusión de ciertos gráficos, en particular el tercero, estuvo comandada por la idea de hacer surgir diferentes puntos de vista. Nuevamente en este episodio 4 podemos identificar gestos del docente que resultan vitales para sostener la voz de las distintas posiciones.

En esta comunicación hemos considerado algunos de los episodios de uno de los dos cursos que estudiamos. Nuestro análisis se verá seguramente enriquecido con la inclusión del trabajo de los alumnos en el otro curso, donde los hechos fueron en parte diferentes. Valgan entonces nuestras reflexiones finales como la muestra de un estado intermedio de nuestro trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

--Bergé, A. (2004): Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria" Tesis doctoral FCEN UBA-

--Brousseau, G. (1986) : Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des mathématiques*, Vol 7/2, 33-115, . La Pensée Sauvage, Grenoble.

--Brousseau, G. (1988) : Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques*, vol 9/3, 309-336. La Pensée Sauvage, Grenoble.

--Brousseau, G. (1997): Theory of Didactival Situations in Mathematics:Didactique des mathématiques 1970 1990, (Balachef, N., Cooper, M., Sutherland, R. and Warfield, V., trans. and eds.) Dordrecht Klwuwer.

--Fregona, D. (1995) : Les figures planes comme “milieu” dans l’enseignement de la géométrie : interactions, contrats et transposition didactiques. Doctoral thesis, Bordeaux I University.

--Mercier, A. (1998): La participation des élèves à l'enseignement. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 18/3 pp 279-310. La Pensée Sauvage, Grenoble.

--Piaget, J.; García, R (1982): Psicogénesis e historia de la ciencia, Siglo Veintiuno eds, Buenos Aires.

--Robert, A.; Robinet, J. (1996) : Prise en compte du méta en Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 16.2, pp 145-176. La Pensée Sauvage, Grenoble.

--Sadovsky (2003): Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas. Tesis Doctoral – F FyL , UBA

--Sadovsky, P. (2005): La teoría de Situaciones Didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática, en Alagia, H., Bressan, A., Sadovsky, P. *Reflexiones teóricas para la Educación Matemática*, Libros del Zorzal, pp. 13 – 65.

--Sierpinska, A. (1989) : Sur un programme de recherche lié à la notion d’obstacle épistémologique, en Bednarz, N. y Garnier C. (eds.) Construction des savoirs, obstacles et conflits, CIRADE- Agence d’Arc inc.

-- Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

--Yackel, E; Cobb, P. (1996): Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. JRME, Vol 27.4, pp 458-477.