C36

HEURÍSTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS: ANÁLISIS DE UN CASO

Tamara MARINO, Mabel RODRÍGUEZ

Universidad Nacional de General Sarmiento
J. M. Gutiérrez 1159. Los Polvorines. Buenos Aires. Argentina
tmarino@ungs.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Resolución de problemas, heurísticas espontáneas, matemática pre-universitaria.

RESUMEN

En este trabajo mostramos criterios que hemos tenido en cuenta para definir los instrumentos para la exploración de heurísticas espontáneas, en el sentido de no enseñadas explícitamente, que ponen en juego en la resolución de problemas estudiantes de un curso de Matemática pre-universitaria. El curso se desarrolla en la Universidad Nacional de General Sarmiento que tiene, desde su diseño, dos ejes transversales: la resolución de problemas y la modelización y la argumentación. Incluimos, además, parte del análisis de la información obtenida a partir de la implementación de los instrumentos focalizando en identificar las heurísticas utilizadas por uno de los estudiantes del curso.

INTRODUCCIÓN

Hay consenso en la comunidad educativa, particularmente en cuanto a Matemática se refiere, de la importancia de centrar el aprendizaje de los estudiantes en la Resolución de Problemas. Los científicos que producen Matemática y los educadores coinciden en que la resolución de problemas tiene un rol central en la producción de conocimiento matemático y por ello debería tenerlo en los procesos de enseñanza-aprendizaje de esta ciencia (pueden verse, entre otros tantos, textos y producciones del NCTM, Santaló, Polya).
Este trabajo es parte de un estudio más amplio en el que nos propusimos caracterizar heurísticas espontáneas presentes en estudiantes de nivel pre-universitario en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) y explorar vínculos entre las heurísticas halladas y algún rasgo particular del proceso de enseñanza-aprendizaje que el estudiante pudiera identificar. En la UNGS se ofrece a los ingresantes un curso de Matemática previo al comienzo de los estudios de grado como parte del Curso de Aprestamiento Universitario, (CAU). Matemática del CAU está diseñada de modo que presenta, en su organización curricular, dos ejes transversales: uno de ellos en la resolución de problemas y la modelización, y el otro en la argumentación. Los contenidos son organizados modularmente y, desde el planteo de los objetivos, la ejercitación, modalidad de enseñanza, etc. se pretende desarrollar en los estudiantes habilidades propias de estos ejes para los distintos contenidos matemáticos incluidos en el curso. Los contenidos incluyen: álgebra básica, geometría y números reales y el tratamiento de funciones elementales. Todos ellos son propicios para

trabajar con problemas y argumentación. Se pretende, simultáneamente, no descuidar la enseñanza de técnicas específicas y procedimientos algorítmicos de resolución de ejercicios.
En esta comunicación nos centramos en:
a) mostrar los criterios que hemos tenido en cuenta para definir los instrumentos para la exploración de heurísticas, y
b) mostrar parte del análisis de la información obtenida a partir de la implementación de los instrumentos focalizando en identificar las heurísticas utilizadas por uno de los estudiantes del curso.

ESTADO DEL ARTE Y MARCO TEÓRICO

Actualmente, existe una gran cantidad de investigaciones en Didáctica de la Matemática referidas a Resolución de Problemas. Este importante desarrollo se debe a que muchos investigadores consideran que, así como la Resolución de Problemas juega un rol vital en la producción del conocimiento matemático, también es de central importancia en la Educación Matemática.
El precursor de esta corriente didáctica fue George Polya, con su libro “How to solve it” (1945). Sus aportes consistieron principalmente en proponer un modelo del proceso de resolución de problemas, con el que intentó sistematizar las fases y las heurísticas útiles en dicho proceso. Las fases propuestas por este autor son: Comprender el problema, Concebir un plan, Ejecutar el plan y Examinar la respuesta obtenida. Muchos investigadores tales como Schoenfeld, Kilpatrick, Lester, Guzmán, Fridman, Jungk y otros, retomaron las ideas de Polya y siguieron trabajando en esta línea.
Entre los autores nombrados anteriormente se destaca Schoenfeld que, en su trabajo, incorpora otros aspectos, aparte del cognitivo, que considera centrales y propios de la tarea de resolución de problemas. Dichos aspectos son el afectivo, el práctico y el metacognitivo (Schoenfeld, 1992)
Revisando la literatura existente referida a la Resolución de Problemas es posible encontrar diversas definiciones de la noción de *problema*. Algunos autores definen el término “problema” como lo opuesto a los “ejercicios rutinarios”. Acordamos con ellos en colocar a la resolución de problemas y la resolución de ejercicios rutinarios en polos opuestos. Consideraremos un *ejercicio* como un planteo que demanda la aplicación directa de algún método o procedimiento algorítmico, conocido previamente, que permite arribar a la solución de manera inmediata. Todo lo contrario ocurre con los problemas. Su resolución implica un proceso creativo y de una complejidad cognitiva mayor, en tanto que el alumno debe elaborar su propio método de resolución, no sólo apelando a sus conocimientos previos sino también estableciendo nuevas relaciones entre ellos y, además, empleando diversos procedimientos, tanto algorítmicos como heurísticos.
Consideramos que para que una situación represente un problema para un sujeto, éste tiene que poder abordarlo y no quedar paralizado; debe disponer de las herramientas necesarias para entender la situación planteada y poder esbozar una resolución, aunque no arribe a la solución correcta. De esta manera, acordamos con Parra (1990) en que “*...un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea (o que se lo plantea él mismo) dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera casi inmediata”*. Destacamos de esta definición, así como de otras, que la noción de problema es relativa al sujeto. Esto significa que una situación puede representar un problema para un determinado sujeto pero no para otro. Como sostiene Charnay (1995) “*…una determinada situación que “hace problema” para un determinado alumno puede ser inmediatamente resuelta por otro (y entonces no será percibida por este último como un problema)*”.
Considerando todo lo expuesto anteriormente, proponemos, para este estudio, la siguiente

definición de problema: *Una situación en la que aparece una pregunta, implícita o explícita, será percibida por un sujeto como un problema en la medida en que, si bien el sujeto cuenta con los elementos cognitivos necesarios para comprenderla y abordarla, éstos no son suficientes para responder a dicha pregunta de manera inmediata.*
Se entiende por *heurística* (Polya, 1965) a las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas; conforman un conjunto de reglas, sugerencias y modos de proceder que ayudan a encarar la resolución de un problema. Verschaffel define heurísticas como *"estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis, la representación y la transformación del problema que ayudan a un individuo a entender mejor un problema o a hacer progreso hacia su solución"* (Koichu, Berman, More, 2003). Es importante destacar que, si bien las heurísticas ofrecen una guía y ayudan a establecer un camino de resolución, su uso no asegura la resolución exitosa del problema (Monereo, 1994).
Mostramos a continuación una lista no exhaustiva de estrategias heurísticas:

- Recurrir a teoría relacionada (que no está explícita en el enunciado del problema)
- Recordar y recurrir a problemas o situaciones análogas abordadas anteriormente (suele verse redactado esta estrategia como "razonar por analogía")
- Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos.
- Buscar datos adicionales que sean fáciles de obtener.
- Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico.
- Modificar el problema para reducirlo a un problema ya resuelto
- Modificar el problema para reducirlo a un problema más sencillo
- Descomponer el problema en subproblemas
- Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción)
- Considerar casos particulares
- Analizar casos especiales o casos límite
- Razonar por contradicción
- Empezar por el final :suponer que se tiene una solución y analizar sus características
- Trabajar hacia delante: partir desde las condiciones dadas en el problema
- Verificar usando casos particulares

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Contexto

Para realizar el trabajo de campo de nuestra investigación se seleccionó un curso preuniversitario de Matemática correspondiente al Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) de la Universidad de General Sarmiento (UNGS).
El CAU es de carácter masivo pues constituye la primera instancia curricular para la formación universitaria de todos los aspirantes a ingresar a la UNGS, cualquiera sea la carrera elegida. El propósito del CAU es preparar al estudiante para su vida universitaria; en él se dictan tres asignaturas: Matemática y Lecto-Escritura (ambas con 104 horas reloj[1]) y un Taller de Ciencia (32 horas reloj). Tanto el CAU, como otras instancias curriculares, son objeto de seguimiento y evaluación continua por la Universidad, que mantiene una política inclusiva respecto de sus estudiantes. El estudiantado proviene de la zona de influencia de la Universidad, la que corresponde, en gran parte, a zonas de clase media, media-baja. Es muy

[1] Actualmente se han introducido cambios en la estructura del CAU, de manera que las materias han reducido su carga horaria. Tanto Matemática como Lecto-Escritura tienen 90 horas reloj.

heterogéneo en cuanto a edad y experiencia formativa, está conformado en una buena parte por alumnos adultos quienes vieron en la propuesta de esta Universidad la oportunidad de realizar una preparación profesional sin descuidar sus obligaciones laborales (la mayoría trabaja muchas horas por día). Los estudiantes más jóvenes provienen de escuelas de la zona, tanto privadas como estatales. La mayoría de los estudiantes muestra deficiencias importantes en su formación secundaria, en lo que refiere a disponibilidad tanto de contenidos disciplinares básicos como de competencias y habilidades necesarias para afrontar estudios universitarios en general. Particularmente en lo referido a Matemática, la mayoría de los estudiantes de CAU, además de no contar con herramientas cognitivas necesarias para afrontar con éxito su estudio, manifiesta una visión algoritmizada de la Matemática y una sensación de imposibilidad, inhibición e insatisfacción frente a la materia.

Los cursos de Matemática se desarrollan en dos encuentros semanales, de dos horas cada uno. Los estudiantes cuentan con una guía de actividades y ejercicios elaborados según una concepción activa de aprendizaje, donde se da lugar a que el estudiante se formule cuestionamientos, y posibles respuestas a los mismos, antes de presentar un cuerpo de conocimientos cerrado, prolijo e impenetrable. Las clases son de tipo teórico-prácticas a cargo de un único profesor. La modalidad de las clases propuesta para el alumno es trabajar en pequeños grupos de pares, con la guía y supervisión del profesor, sobre las actividades planteadas en los cuadernillos. En la modalidad planteada, el grupo funciona como "catalizador", es decir, se pretende que los compañeros contribuyan a acelerar procesos de aprendizaje ayudando a disipar dudas, discutiendo interpretaciones, presentando diversos planteos, explicando en forma personalizada, observando modos de resolución de los compañeros, etc. Luego de este tipo de trabajo, cuando la mayoría arribó a alguna conclusión confrontada con sus pares, el docente realiza la presentación formal o integración de los temas y presenta a debate los distintos modos de resolución de cada grupo. Es importante destacar que, en cuanto a la resolución de problemas, interesa que el estudiante comprenda que la Matemática es una disciplina que ofrece herramientas para resolver ciertos problemas de la realidad. Se fomenta que el alumno piense, encare y resuelva problemas aunque no haya una enseñanza explícita de técnicas o métodos para resolver problemas. De esta manera, la resolución de problemas está considerada como una metodología de enseñanza y no como un contenido a enseñar.

Diseño del estudio

La metodología utilizada para realizar este trabajo es de tipo cualitativa, enmarcada dentro del enfoque socio-crítico (Carr, Kemmis, 1988).

Para el trabajo de campo hemos considerado un único curso de Matemática del CAU. Lo hemos elegido por la posibilidad de observar el desempeño de los estudiantes en la totalidad de las clases y contar con una gran cantidad de sus producciones escritas.

Este curso presenta las características descriptas en el contexto, y la modalidad de enseñanza que utilizó la profesora responde a los lineamientos sugeridos. Por esta razón, tenemos que estos estudiantes no han recibido una enseñanza explícita de técnicas de resolución de problemas ni de estrategias heurísticas.

Con el fin de relevar las heurísticas presentes en las resoluciones de los estudiantes, se utilizaron como instrumentos, un test y una entrevista. La información se recabó hacia el final de la cursada. El test fue aplicado a todos los estudiantes del curso seleccionado y la entrevista a un grupo reducido de ellos. Este grupo fue elegido con el criterio de que hayan manifestado un desempeño bueno o medianamente bueno a lo largo del curso y una actitud positiva hacia la resolución de problemas.

Para esta comunicación, incluimos el análisis referido a un único estudiante. Éste, a su vez, fue seleccionado entre el grupo de estudiante entrevistados, por demostrar buen rendimiento, actitud positiva hacia las tareas y parecía contar con variedad de herramientas disponibles para encarar y resolver problemas. La entrevista a este estudiante nos permite complementar la información, obtenida con el test, respecto a las heurísticas espontáneas disponibles.

Respecto de los criterios para definir los instrumentos

Respecto del test

En el test se incluyeron actividades que, de acuerdo a la definición adoptada, resultaran ser problemas para los estudiantes considerados. Además, se buscó que dichas actividades admitieran una variedad de heurísticas que resultaran útiles para abordar su resolución de modo de tener más riqueza en las respuestas de los estudiantes.

Entendemos que las situaciones propuestas representan problemas para los estudiantes considerados, por dos razones: en primer lugar, los alumnos cuentan con las herramientas cognitivas necesarias para abordar y encarar la resolución de las actividades, tanto en lo que refiere a contenidos como a habilidades, algoritmos, procedimientos, etc., dado que se han trabajado durante el curso. En segundo lugar, contemplamos con mucho cuidado que los planteos de las actividades se diferencien de los planteos presentados habitualmente en el curso. Las resoluciones de las actividades propuestas no se pueden obtener de manera inmediata, en cambio se requiere la elaboración de un método de resolución propio.

Incluimos aquí el análisis de una de las actividades del test, destacando a) por qué resulta un problema para los estudiantes y b) la variedad de heurísticas posibles de ser usadas. El enunciado es el siguiente:

> *Uniendo segmentos que miden 1/a cm - donde a es algún valor natural- se quiere armar un segmento que mida 5 cm. ¿Cuántos de estos segmentos que miden 1/a se necesitarían? (Aclaración: en esta unión, los segmentos no se enciman)*

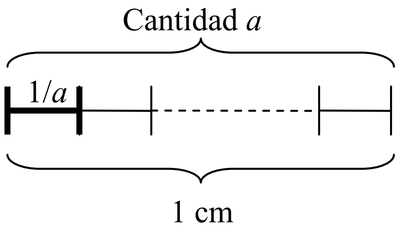
a) Respecto de por qué resulta problema para los estudiantes del curso al momento de este trabajo, invitamos al lector a confrontar este enunciado con los del texto usado en la materia (Carnelli [et.al.], 2007). Encontrará que existe una diferencia, respecto de los planteos realizados en dicho libro, pero que los contenidos trabajados permiten resolverlo.

b) Respecto de las heurísticas posibles de ser utilizadas, encontramos que existen varias maneras de encarar la resolución del problema planteado, mostramos a continuación algunas de ellas:

Para resolver esta actividad se puede recurrir a *“Modificar el problema para reducirlo a un problema más sencillo”*, encarando la resolución de la misma situación pero analizando cuántas veces entra el segmento A en un segmento que mide 1 cm, en lugar de 5 cm. Esta modificación hace el problema más sencillo, dado que el estudiante podría notar fácilmente que se requiere una cantidad a de segmentos A. Luego, se puede realizar un razonamiento, por ejemplo por regla de tres, para arribar a la respuesta del problema original.

Otra forma de resolverlo es apelando a *“Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y luego generalizar (inducción)”* y recurriendo a *“Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico”*, para producir una fórmula general que permita calcular, en función del valor a, la cantidad de segmentos A necesarios para formar un segmento de 5 cm. En esta estrategia la idea es analizar valores particulares de a, para encontrar una regularidad que permita generalizar de la siguiente manera: para $a = 1$, la cantidad de segmentos A es 5; para $a = 2$, la cantidad de segmentos es 10; para $a = 3$, la cantidad de segmentos es 15, y así sucesivamente. Con el análisis de estos casos es posible percibir que la regularidad es que la cantidad de segmentos A, que miden $1/a$, necesarios para formar un segmento de 5 cm es $5. a$.

Otro posible camino de resolución consistiría en “*Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos”*, en el que uniendo gráficamente y contando los segmentos que miden $1/a$ cm se llega a la respuesta de cuántos de estos segmentos se necesitan para formar uno de 5 cm. En esta resolución es importante darse cuenta de que se necesitan a segmentos para formar un segmento que mida 1 cm.



Respecto de la entrevista

La entrevista se diseñó con el fin de complementar la información, respecto del uso de heurísticas en el proceso de resolución de problemas, teniendo en cuenta que los estudiantes podrían no haber dejado registrado por escrito todas las heurísticas que pusieron en juego a la hora de resolver los problemas del test. Las preguntas de la entrevista se dividieron en generales y específicas. Con las preguntas generales la intención era obtener información sobre la manera en que el estudiante encara la resolución de los problemas matemáticos en general: a qué apela, si utiliza estrategias heurísticas o no, cuáles, etc. Con las preguntas específicas intentamos recuperar lo que el estudiante hizo o pensó, para resolver los problemas del test, pero que no dejó por escrito: cómo lo pensó, que razonamiento siguió y que estrategia utilizó para arribar a la respuesta escrita en la entrega, qué intentos realizó, si incluyó ejemplos en sus respuestas ¿con qué intención?, etc.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Analizamos conjuntamente las resoluciones del test del alumno y su entrevista. También incluimos una breve descripción de la resolución de las partes más relevantes del test. En el anexo se encuentran los enunciados de las actividades analizadas a continuación.

En la resolución del primer ejercicio encontramos que recurrió a modelizar el problema con funciones, realizó un diagrama del comportamiento global de dichas funciones y planteó sus fórmulas. A partir del análisis de lo escrito, entendemos que la respuesta al problema la elaboró a partir examinar los resultados que arrojaron dichas fórmulas al evaluarlas en valores particulares. No se evidencia la utilización de los gráficos en la toma de decisiones para llegar a las respuestas dadas. Consideramos que, aunque la resolución planteada no es correcta (modelizó mal la compañía 1 y no responde con claridad la última pregunta), la estrategia global utilizada para abordar el problema es acertada. Percibimos que recurrió a la heurística *"Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico"*, al recurrir al lenguaje algebraico para describir, a través de fórmulas, las funciones con las que modelizó el problema.

El ítem a) del tercer ejercicio lo resuelve correctamente apelando a razonar a partir del gráfico de la función $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, $f(x) = x^3$, estableciendo una analogía con lo estudiado en las funciones cuadráticas. En la materia, se trabajó la forma canónica de la cuadrática g: $\mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, $g(x) = a(x - h)^2 + k$ explicitando los desplazamientos que se producen en el gráfico de $f : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, $f(x) = x^2$ al cambiar los parámetros h y k. De esta manera, entendemos que, en su resolución, que fue puramente gráfica, recurrió a las heurísticas *"Razonar por analogía"* y *"Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos"*. Este hecho fue confirmado en la entrevista, como lo indica el siguiente fragmento de ella:

> *Alumno: para el ejercicio 3)a) miré la fórmula de la función, me di cuenta que el gráfico era así (hace con la mano el gesto del gráfico de la cúbica), no me acordaba del nombre de la función por eso hice el gráfico…Tiene como imagen todos los reales. Al ser una función que tiene como imagen a todo el conjunto de los reales, por más*

que yo ponga cualquier valor en la fórmula, la imagen contiene todos los reales. No importa qué valores ponga, ni tampoco qué movimiento… mientras sea siempre la cúbica. Sigue siempre creciendo…Me basé en el gráfico.

Entrevistador: ¿qué hacen los parámetros a y b cuando se le dan valores particulares?

Alumno: corren al gráfico de la cúbica. Pero la cúbica es siempre creciente…

Entrevistador: ¿Cómo supiste hacer los corrimientos?

Alumno: me basé teniendo en cuenta la cuadrática, identifiqué qué valores hacía que se moviera para arriba o para abajo y para la izquierda o derecha. Comparé con la función cuadrática.

Entrevistador: ¿en algún momento le pusiste valores, como para probar?

Alumno: no, estaba muy seguro del gráfico

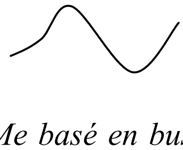
Entrevistador: ¿a qué apelaste que te hizo estar tan seguro?

Alumno: a la forma del gráfico. Yo sabía que el gráfico de la cúbica siempre es así, por más que la moviera.

Para el ítem b), interpretamos que recurrió al gráfico de las funciones polinómicas para entender el problema y llegar a la conclusión de que en este caso, a diferencia del ítem anterior, podría encontrar valores de *a* y *b* que hicieran que la función dada no tuviera raíces. Para proponer los valores concretos no apeló a lo gráfico (parámetros y corrimientos) sino que recurrió a ir probando hasta encontrar un par de valores que cumplieran lo pedido. Podemos decir que las heurísticas a las cuales apeló son *"Recurrir a dibujos, esquemas, diagramas o gráficos" y "Considerar casos particulares"*. Vale aclarar que no consideró los casos particulares para explorar y decidir si encontraría o no valores que cumplieran lo pedido. Por el contrario, convencido de la existencia de valores que harían que la función no tenga raíces, información que obtuvo de lo gráfico, buscó dichos valores probando. Finalmente, su respuesta escrita incluye el planteo y resolución del cálculo de las raíces de la función. Entendemos que realizó dicho planteo algebraico para verificar que la respuesta, dada desde lo numérico, era correcta. Notamos que en esta resolución el alumno utiliza una estrategia para verificar, que no se halla en la lista de heurísticas que conforman el marco teórico con el que realizamos este análisis. Dicha estrategia la caracterizamos con el siguiente enunciado: "*Verificar la respuesta dada usando un registro de representación distinto de aquel en el que produjo dicha respuesta".*

A continuación mostramos el fragmento de la entrevista, a partir del cual, complementamos el análisis anterior:

Alumno: me basé en que elevar a la cuarta me da una función polinómica y sabía gráficamente que es una función que puede dar raíces reales o no. Después probé con valores reemplazando para ver si me daba raíces o no. Va a ser



(hace el gesto con la mano que describe el dibujo)

Lo asocié con el grupo de las polinómicas. Después dí valores.

Entrevistador: ¿probaste con valores que no te sirvieron?

Alumno: tiré los primeros números que se me vinieron y me dio. Me basé en buscar valores que no me den raíz.

Entrevistador: ¿propusiste los números que se te vinieron a la mente o lo asociaste con lo gráfico?

Alumno: lo asocié con lo gráfico.

Entrevistador: ¿cómo usaste lo gráfico para determinar qué valor elegir?, ¿te acordabas exactamente el gráfico de x^4?

Alumno: Me acordaba que tiene la forma de función polinómica pero traté de buscar valores que no me dieran raíces.

En el ejercicio 4 la resolución escrita muestra un planteo algebraico, al que arribó luego de realizar un análisis sistemático de casos particulares con la intención de extraer una regularidad y generalizar con una fórmula. Luego, para verificar que la respuesta dada es correcta, recurrió a considerar nuevamente casos particulares.

Podemos apreciar que las heurísticas a las que recurrió son *"Utilizar un método de expresión o representación adecuado: verbal, gráfico, algebraico, numérico"*, *"Analizar casos particulares para buscar regularidades o patrones y generalizar (inducción)"*, *"Verificar usando casos particulares"*.

Lo dicho anteriormente se complementa con el análisis y la interpretación del siguiente pasaje de la entrevista:

> *Alumno: traté de buscar una fórmula, que dependiera del número a, para saber cuántos segmentos iba a necesitar para formar 5 cm.*
>
> *Entrevistador: y propusiste esta fórmula* $x.\frac{1}{a}=5$
>
> *Alumno: sí, de ahí despejé x.*
>
> *Entrevistador: en la resolución que entregaste ponés un ejemplo, ¿Por qué o para qué lo pusiste?*
>
> *Alumno: para comprobar que la fórmula funciona para los casos*
>
> *Entrevistador: antes de proponer la fórmula* $x.\frac{1}{a}=5$, *¿diste ejemplos?*
>
> *Alumno: al principio tomé a = 2 y calculé; a = 3 y a = 4 y después traté de sacar la percepción de la fórmula*
>
> *...*
>
> *Alumno: en principio fue toda suma 1/2+ 1/2+ ....hasta que me dé 5. Cambiaba el valor de a, después con a = 3, 1/3 + 1/3 + ... hasta que me dé 5. Después salió el cálculo, comprimí la suma a multiplicación y salió la fórmula.*

Realizando un análisis global sobre las resoluciones elaboradas por el estudiante, es posible afirmar que, en general, es un buen resolutor de problemas. Podemos decir que demostró disponer, con facilidad, de los conocimientos, tanto conceptuales como procedimentales, adecuados y necesarios para abordar y resolver los problemas. Destacamos la variedad de recursos heurísticos que cuenta y que incluso utiliza como medio para verificar su solución propuesta.

En cuanto a las estrategias generales de resolución de problemas, podemos mencionar que el estudiante dispone de un esquema de trabajo que responde, en alguna medida, a las etapas en la resolución de problemas que menciona Polya. Además, podemos observar que en las distintas fases de la resolución es capaz de moverse con fluidez entre los distintos marcos: algebraico, numérico, gráfico. Transcribimos un párrafo de la entrevista que da cuenta de esto:

> *Entrevistador: Cuando tenés que resolver un problema, ¿cómo lo abordás?, ¿qué pensás?, ¿a qué recurrís?, ¿qué hacés en borrador que luego no escribís en la hoja que entregás?*
>
> *Alumno: Lo primero que hago es tratar de hallar una fórmula, dependiendo del problema. Según el caso, una fórmula.*
>
> *Entrevistador: ¿y si no te sale?*
>
> *Alumno: recurro a los ejemplos, como hice en el problema 4…o también puedo hacer en simultáneo la fórmula y el ejemplo.*
>
> *Entrevistador: ¿cómo sabés si las fórmulas son correctas o no?*
>
> *Alumno: probando con ejemplos*
>
> *Entrevistador: ¿chequeas siempre las fórmulas?*
>
> *Alumno: si!!*
>
> *Entrevistador: ¿Cómo te organizás para resolver los problemas? ¿Tenés algún*

método que creés que te funciona o identificaste pasos que te plantees para encarar los problemas?
Alumno: primer paso: entenderlo.
Entrevistador: ¿qué haces para entenderlo?
Alumno: leerlo, probar, chequear, dependiendo de la consigna tratar de saber que es lo que tengo que saber.
Entrevistador: ¿determinas datos e incógnitas?
Alumno: sí
Entrevistador: ¿soles verificar?
Alumno: todo el tiempo.
Entrevistador: ¿a qué apelas para verificar?, ¿ejemplos?, ¿alguna otra cosa?
Alumno: después que está la fórmula, probarla, y no doy más vueltas…si me dio bien ya está.
Entrevistador: ¿usas lo gráfico para verificar?
Alumno: primero escrito y luego el gráfico para ver si da acorde. Si el gráfico da una cosa y la cuenta otra, la cuenta estará mal entonces…

Resaltamos de este trabajo que el estudiante utilizó como recurso para la verificación, *Verificar la respuesta dada usando un registro de representación distinto de aquel en el que produjo dicha respuesta*. No hemos encontrado, en la lectura bibliográfica realizada, que esta estrategia se considere una de las heurísticas que se suele exhibir. En el estudio más amplio en el que se inscribe esta presentación, estaremos analizando la presencia de esta estrategia, el uso de ella por los estudiantes, la posibilidad de que una tarea la incluya como estrategia, etc. como para avanzar en la determinación de si podría ser considerada una heurística.

BIBLIOGRAFIA

- CARR, W. Y KEMMIS, S. 1988. *Teoría crítica de la enseñanza*. (Martínez Roca, Madrid).
- CHARNAY, R. 1988. *Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. (Paidos, Argentina).
- GARCÍA CRUZ, J. A. La Didáctica de las Matemáticas: una visión general. Red telemática educativa europea (http://nti.educa.rcanaria.es/rtee/rtee.htm)
- GARCÍA JIMÉNEZ, J. 2002. Resolución de problemas y desarrollo de capacidades. Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas, *29, 20-37*.
- CARNELLI, G., FALSETTI, M., FORMICA, A., RODRÍGUEZ, M. 2007. *Matemática para el Aprestamiento Universitario*. Impreso en la Universidad Nacional de General Sarmiento.
- KOICHU, B., BERMAN, A., MOORE, M. 2003. Changing teachers´ beliefs about students´ heuristics in problem solving, Artículo presentado en la 3rd. Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Italia.
- MONEREO, C., CASTELLÓ, M., CLARIANA, M., PALMA, M. 1998. *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*. (Graó, Barcelona).
- MORENO BAYARDO, M. 2000. La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. El blanco y negro de algunas estrategias didácticas. Revista Electrónica Educar, 15. (http://educacion.jalisco.gob.mx/consulta/educar/15/15indice.html)
- POLYA, G. 1965. *Cómo plantear y resolver problemas*. (Trillas, México). [Versión en español de la obra *How to solve it* publicada por Princeton University Press en1945]
- SCHOENFELD, A. 1992. *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics*, in D. Grouws (De.) Handbook for research on mathematics teaching and learning, (MacMillan, New York)

ANEXO

Test

1.Supongamos que vivimos en una ciudad en la que existen tres compañías ahorristas distintas y que estamos interesados en incrementar nuestros ahorros. Las tres compañías generan intereses continuamente, tomando el mes como unidad, pero con modalidades distintas en cuanto al incremento del dinero depositado.
La Compañía 1 mensualmente le incrementa al monto inicial depositado una suma constante de cinco veces dicho valor. La compañía 2 incrementa el capital de manera tal que para calcular el dinero acumulado hasta un cierto momento se agrega al monto inicial tres veces ese monto multiplicado por el cuadrado de la cantidad de meses transcurridos. La compañía 3 incrementa el capital de manera tal que el dinero acumulado se duplica cada mes.
Supongamos que sos un agente de inversiones y un cliente te contrata para que lo informes y le aconsejes acerca de las tres compañías. El cliente tiene $1.000 y los quiere depositar durante un mes, ¿en cuál de las 3 compañías le conviene depositar para obtener más intereses? ¿y si los deposita durante 4 meses? ¿Cómo calcula el dinero que obtiene en cada compañía según los meses de depósito? Se te pide hacer un informe en el que describas la situación y compares las 3 empresas. Aclaración: se espera que el informe sirva para decidir qué conviene según los meses de depósito.

2. a) Dada la función $f: R \rightarrow R$, $f(x) = (x-a)^3 + b$, ¿Es posible determinar valores para a y b de manera que f no tenga raíces reales?
b) Dada la función $f: R \rightarrow R$, $f(x) = (x-a)^4 + b$, ¿es posible encontrar valores para a y b de manera que f no tenga raíces reales?

3. Uniendo segmentos que miden 1/a cm. –donde a es algún valor natural (a ε N) – se quiere armar un segmento que mida 5 cm. ¿Cuántos de estos segmentos que miden 1/a cm se necesitarían? (Aclaración: en esta unión, los segmentos no se enciman)

4. Dada la recta L y un punto de ella P = (2, 3). Hallar la ecuación de la recta L, sabiendo que el ángulo α mide 45º.