LA TOPOLOGÍA
-o la Geometría de la distorsión-

José Luis Aguado

Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional de La Pampa
Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa - Argentina
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires - Argentina
jaguado@exa.unicen.edu.ar

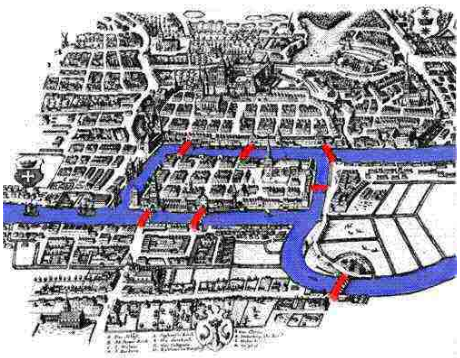
RESUMEN

La topología estudia propiedades geométricas fundamentales que quedan inalteradas cuando estiramos, retorcemos o cambiamos de cualquier manera el tamaño y forma de un objeto. Estudia figuras lineales, superficies o sólidos; desde toros y nudos a redes y mapas.
Otro nombre de la topología es *analysis situs.* A diferencia de la geometría de Euclides, Lobatchewsky, Riemann y otros, que mide longitudes y ángulos, y se llama por ello *métrica*, la topología es una geometría no métrica, o no cuantitativa. Sus proposiciones son ciertas, tanto para un objeto hecho de goma como para las figuras rígidas de la geometría métrica.
Los matemáticos usan la palabra *transformación* para describir cambios de posición, tamaño o forma, y la palabra *invariante* para describir las propiedades que no son afectadas por estos cambios. En la geometría métrica ordinaria, se dice que las propiedades son invariantes bajo la transformación de movimiento. Se supone que el movimiento no tiene un efecto de distorsión; mi lápiz conserva sus dimensiones al moverse sobre el papel; este libro, ni se encoge ni se expande al volver el lector sus páginas. En topología, el problema consiste en encontrar las propiedades geométricas que son invariantes bajo transformaciones de distorsión. Si se estira un triángulo hasta formar un círculo, ¿cuál de sus propiedades geométricas se conserva? El agujero: ¿está "dentro" o "fuera" de la Rosca de Reyes? ¿Cómo puede sacarse el agujero? ¿Qué es un nudo? ¿Puede comprimirse dentro de una esfera un cilindro con un agujero a su través? ¿Es posible hacer una botella sin cantos, ni dentro ni fuera? Éstos son ejemplos de cuestiones topológicas.
La topología nació como una rama relevante de la geometría en el siglo XIX. El primer tratado sistemático en este campo fue el *Vorstudien zur Topologie*, publicado en 1847 por el matemático alemán Listing. Sus orígenes, sin embargo, se remontan a descubrimientos fundamentales hechos por Descartes y Euler. Los dos habían observado (Descartes en 1640, Euler en 1752) una relación fundamental entre los vértices, aristas y caras de un poliedro simple. Euler expresó este importante hecho geométrico en la famosa fórmula:

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

donde $|V|$ representa el número de vértices, $|E|$ el de aristas, $|F|$ el de caras.
Si bien el uso y estudio riguroso de la topología está reservado para matemáticos profesionales, sus ideas y métodos han trascendido las fronteras del saber sabio y sus aplicaciones pueden hoy día hallarse en problemas de redes en informática y robótica, por citar un ejemplo. Precisamente, la Teoría de grafos, tema cuyos elementos pueden ser accesibles a todo el mundo, nació, según la historia, con una especie de divertimento popular, pero al ser tomado por un genial matemático como Leonhard Euler, devino modernamente en una seria teoría, la Topología Combinatoria, cuyas aplicaciones se incrementan año a año.
En esta charla queremos mostrar cómo un problema popular fue tomado por Euler, quien descubrió un importante principio científico escondido en él.

El problema - cruzar los siete puentes en un paseo continuo, sin volver a cruzar ninguno de ellos - se consideraba como una pequeña diversión de los ciudadanos de Königsberg.
Presentó su sencilla e ingeniosa solución a la Academia rusa de San Petersburgo en 1735.
La fuente citada es la revista anual de la Academia de S. Petersburgo, 1736, Leonh. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis.* Comentarii Academiae Petropolitane ad annum MDCCXXXVI, Tomus VIII, págs. 128-140.



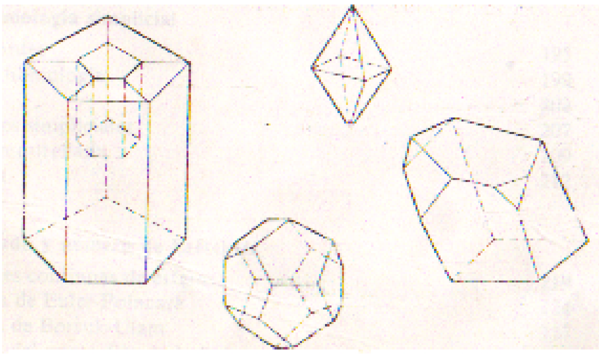
DESARROLLO

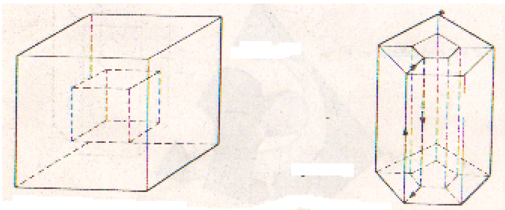
La Topología parece un tema extraño; se sumerge en formas extrañas e improbables, y sus proposiciones, o son infantilmente obvias (es decir, hasta que uno trata de demostrarlas) o tan difíciles y abstractas que incluso un topólogo no puede explicar su significado intuitivo. Pero la topología no es más extraña que el mundo físico tal como lo interpretamos. La geometría euclidiana, a pesar de su apariencia familiar, es demasiado fantástica para este mundo; trata con objetos totalmente ficticios –figuras perfectamente rígidas y cuerpos que no cambian al moverse –. La topología parte de la premisa segura de que no hay objetos rígidos, de que todo en el mundo es algo deformado, y se deforma cuando se altera su posición. El objetivo es encontrar los elementos de orden es este desorden, la permanencia en esta impermanencia.
Los matemáticos usan la palabra *transformación* para describir cambios de posición, tamaño o forma, y la palabra *invariante* para describir las propiedades que no son afectadas por estos cambios. En la geometría métrica ordinaria, se dice que las propiedades son invariantes bajo la transformación de movimiento. Se supone que el movimiento no tiene un efecto de distorsión; mi lápiz conserva sus dimensiones al moverse sobre el papel; este libro, ni se encoge ni se expande al volver el lector sus páginas. En topología, el problema consiste en encontrar las propiedades geométricas que son invariantes bajo transformaciones de distorsión. Si se estira un triángulo hasta formar un círculo, ¿cuál de sus propiedades geométricas se conserva? El agujero: ¿está "dentro" o "fuera" de la Rosca de Reyes? ¿Cómo puede sacarse el agujero? ¿Qué es un nudo? ¿Puede comprimirse dentro de una esfera un cilindro con un agujero a su través? ¿Es posible hacer una botella sin cantos, ni dentro ni fuera? Éstos son ejemplos de cuestiones topológicas.
El concepto de transformación tiene un parecido familiar con los conceptos de *relación* y *función*, y es de la mayor importancia en casi todas las ramas de la matemática y de la lógica.
Tiene su raíz en el poder que tiene el pensamiento de, dados dos objetos cualesquiera, de asociar uno de ellos con el otro, y su significado especial en cada una de las ramas del razonamiento formal donde se usa álgebra, geometría, teoría de grupos, lógica, etc.- deriva de esta idea básica.
Para una discusión completa de los términos *transformación, invariante* y otros relacionados, ver Cassius J. Keyser, *Mathematical Philosophy,* Nueva York, 1922.
La topología nació como una rama relevante de la geometría en el siglo XIX. El primer tratado sistemático en este campo fue el *Vorstudien zur Topologie*, publicado en 1847 por el matemático alemán Listing, Sus orígenes, sin embargo, se remontan a descubrimientos

fundamentales hechos por Descartes y Euler. Los dos habían observado (Descartes en 1640, Euler en 1752) una relación fundamental entre los vértices, aristas y caras de un poliedro simple. Euler expresó este importante hecho geométrico en la famosa fórmula:

$$|\boldsymbol{V}| - |\boldsymbol{E}| + |\boldsymbol{F}| = \mathbf{2}$$

donde $|\boldsymbol{V}|$ representa el número de vértices, $|\boldsymbol{E}|$ el de aristas, $|\boldsymbol{F}|$ el de caras.





LEONHARD EULER Y LOS COMIENZOS DE LA TOPOLOGÍA COMBINATORIA

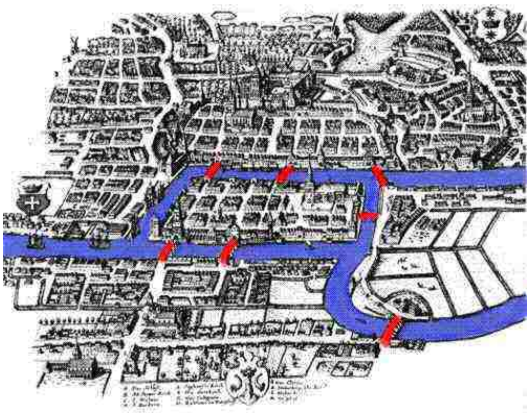
Si bien el uso y estudio riguroso de la topología está reservado para matemáticos profesionales, sus ideas y métodos han trascendido las fronteras del saber sabio y sus aplicaciones pueden hoy día hallarse en problemas de redes en informática y robótica, por citar un ejemplo. Precisamente, la Teoría de grafos, tema cuyos elementos pueden ser accesibles a todo el mundo, nació, según la historia, con una especie de divertimento popular, pero al ser tomado por un genial matemático como Leonhard Euler, devino modernamente en una seria teoría, la Topología Combinatoria, cuyas aplicaciones se incrementan año a año.

Leonhard Euler (1707-1783) fue un eminente científico nacido en Suiza. Enriqueció a las matemáticas en casi todas sus partes, y su energía fue, por lo menos, tan notable como su genio.

- "Euler calculaba sin esfuerzo aparente, de la misma manera que los hombres respiran o las águilas se sostienen por sí mismas en el viento". Trabajaba con tanta facilidad que "se decía que escribía memorias durante la media hora entre la primera y la segunda llamada para la comida" [Bell, E.T. *Men of Mathematics.* New York: Simon and Schuster, Inc., 1937].

- Se ha calculado que se necesitarían, de sesenta a ochenta grandes volúmenes para contener sus obras completas.

UN PROBLEMA FAMOSO



El problema - cruzar los siete puentes en un paseo continuo, sin volver a cruzar ninguno de ellos - se consideraba como una pequeña diversión de los ciudadanos de Königsberg.
Euler descubrió un importante principio científico escondido en este acertijo.
Presentó su sencilla e ingeniosa solución a la Academia rusa de San Petersburgo en 1735.
En esta charla queremos desarrollar las ideas de Euler, tal y como (traducciones mediante) enfocó y resolvió este problema.
La fuente citada es a revista anual de la Academia de S. Petersburgo, 1736, Leonh. Euler. *Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis.* Comentarii Academiae Petropolitane ad annum MDCCXXXVI, Tomus VIII, págs. 128-140.

LOS SIETE PUENTES DE KÖNIGSBERG

Leonhard Euler

1. Además de aquella parte de la Geometría que trata sobre cantidades, y que se ha estudiado en todo tiempo con gran dedicación, el primero que mencionó la otra parte, hasta entonces totalmente desconocida fue Leibniz, quién la llamó geometría de la posición. Leibniz determinó que esta parte se tenía que ocupar de la sola determinación de la posición, y de las propiedades provenientes de la posición, en todo lo cual no se han de tener en cuenta las cantidades, ni su cálculo. No está suficientemente definido de qué manera conciernen los problemas a esta geometría de la posición, y qué método conviene emplear en su resolución. Por ello, cuando recientemente se mencionó cierto problema, que parecía realmente pertenecer a la geometría, pero estaba dispuesto de tal manera que ni precisaba la determinación de cantidades ni admitía solución mediante el cálculo de ellas, no dudé en referirlo a la geometría de la posición. Sobre todo, porque para resolverlo sólo había que considerar la posición, y no se hacía ningún uso del cálculo. He decidido pues, exponer aquí el método que he hallado para la solución de este tipo de problema, a modo de ejemplo para la geometría de la posición.
2. El Problema, bastante conocido, según me dijeron, era el siguiente: Hay una isla A en Königsberg (Regiomons), Prusia, llamada *der Kneiphof*, y el río que la rodea está dividido en

dos brazos, tal como puede verse en la Figura 1; los brazos de este río están cruzados por siete puentes; ***a, b, c, d, e, f*** y ***g***.

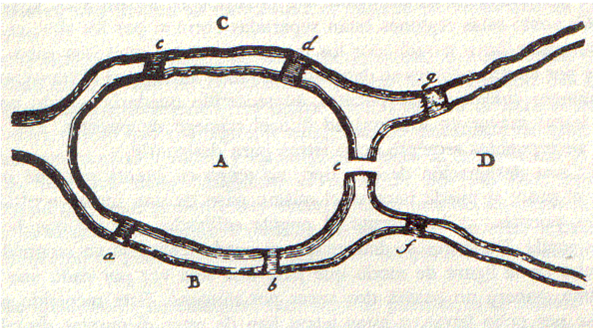


FIGURA 1

		8
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
		9

Se propuso, acerca de estos puentes, la siguiente cuestión: quien podía trazar un recorrido tal que pasara por cada puente una sola vez y no más. Me dijeron que unos negaban que esto fuera posible y otros lo dudaban; ninguno, sin embargo, lo afirmaba. Yo, a partir de esto, formulé según mi idea, el problema muy general de averiguar, sea cual fuere la forma del río y su distribución en brazos, y sea cual fuere el número de puentes, si se podía pasar o no por cada puente una sola vez.

3. En lo referente al problema de los siete puentes de Königsberg, podía resolverse haciendo una relación total de todos los recorridos posibles. A partir de esto, se vería qué recorrido satisfacía la condición, o si no lo cumplía ninguno. Esta manera de proceder, sin embargo, a causa del número de combinaciones, sería demasiado difícil y trabajosa, y no podría aplicarse a otras cuestiones con muchos más puentes. Además si se lleva a término la operación de este modo, se encontrarán muchas cosas que no entraban en el problema; de lo cual procede, sin duda, la causa de tanta dificultad. Por este motivo, dejé aparte este método, y busqué otro que no diera más de lo que ofreciera: es decir, si es posible o no trazar un recorrido de este tipo. Comprendí, pues, que este método sería mucho más simple.

4. Todo mi método se basa en designar de un modo idóneo los pasos únicos de los puentes, para lo cual uso letras mayúsculas ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, adscritas a las regiones que están separadas por el río. De este modo, si alguien va de la región ***A*** a la región ***B*** a través del puente ***a*** ó ***b***, denoto este paso con las letras ***AB***, la primera de las cuales da la región de la cual sale el transeúnte, la otra la región a la cual llega pasando por el puente. Si después el transeúnte va de la región ***B*** a la región ***D*** por el puente ***f***, este paso está representado por las letras ***BD***; caso de realizarse sucesivamente estos dos pasos ***AB*** y ***BD***, los denoto solamente con las tres letras ***ABD***, porque la letra media ***B*** designa tanto la región a la cual llegó en el primer paso, como la región de que salió con el segundo paso.

5. De manera parecida, si el transeúnte va de la región ***D*** a la ***C*** a través del puente ***g***, estos tres pasos sucesivos los denotaré con las cuatro letras ***ABDC***. A partir de estas cuatro letras ***ABDC***, se ha de entender, pues, que el transeúnte ha pasado primeramente de la región ***A*** a la región ***B***, de allí a ***D***, y, por último, de allí a ***C***: como estas regiones están separadas entre sí por los ríos, es necesario que el transeúnte haya pasado por los tres puentes. Así pues, los pasos sucesivos realizados por cuatro puentes se denotan con cinco letras; y si el transeúnte pasara por un número cualquiera de puentes, su recorrido quedaría notado por un número de letras mayor en una unidad que el número de puentes. Por lo que el paso por siete puentes requiere ocho letras para designarlo.

6. En una designación de este tipo, no tengo en cuenta por qué puentes se ha hecho el paso; si puede hacerse el mismo paso de una región a otra a través de muchos puentes, es indiferente el puente utilizado, con tal que llegue a la región designada. De lo que se deduce que si puede realizarse un recorrido por los siete puentes de la figura de modo que pase una sola vez por

cada uno de ellos, de la misma manera no pasará dos veces por ninguno. Este recorrido puede representarse por ocho letras, y estas letras han de estar dispuestas de tal manera que aparezca dos veces la sucesión inmediata de las letras ***A*** y ***B*** ya que son dos puentes ***a*** y ***b*** los que unen estas regiones ***A*** y ***B***; de igual modo, también debe aparecer dos veces la sucesión de letras ***A*** y ***C*** en la serie de ocho letras. Además, la sucesión de las letras ***A*** y ***D*** aparecerá una sola vez, e, igualmente la sucesión de las letras ***B*** y ***D*** y ***C*** y ***D*** es necesario que aparezca una sola vez.

7. La cuestión queda reducida, pues a formar con las cuatro letras ***A***, ***B***, ***C*** y ***D*** una serie de ocho letras, en la cual aparezcan todas aquellas sucesiones las veces establecidas. Antes de empezar a trabajar en una disposición de este tipo, conviene ver si estas letras pueden disponerse o no de tal modo. En efecto, si pudiera demostrarse que es totalmente imposible hacer una tal disposición, sería inútil todo el trabajo destinado a lograrlo. Por este motivo, busqué una regla mediante la cual, tanto en ésta como en todas las cuestiones similares, pueda discernirse fácilmente si puede tener lugar una tal disposición de las letras.

8. Para encontrar esta regla, considero únicamente la región ***A***, a la cual conduzcan cualquier número de puentes ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, etc. De estos puentes, tengo en cuenta primero solamente el ***a***, que conduce a la región ***A***. Si el transeúnte pasara por este puente, o tenía que estar antes del paso en la región ***A***, o después del paso ha de llegar a ***A***, con lo que en el método establecido anteriormente para designar los pasos conviene que aparezca una sola vez la letra ***A***. Si a la región ***A*** conducen tres puentes, por ejemplo ***a***, ***b***, ***c***, y el transeúnte pasa por los tres, entonces en la designación de su recorrido aparece dos veces la letra ***A***, ya sea que empezó el recorrido en ***A*** o en otra región. De igual manera, si conducen a ***A*** cinco puentes, al designar el recorrido por todos ellos la letra ***A*** ha de aparecer tres veces. Y si el número de los puentes fuera en número cualquiera impar, al aumentarlo en una unidad su mitad dará el número de veces que ha de aparecer la letra ***A***.

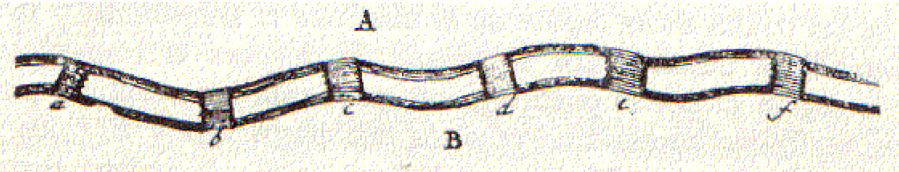


FIGURA 2

9. En el caso de los puentes de Königsberg, puesto que son cinco los puentes que conducen a la isla ***A***, es necesario que en la designación del recorrido por estos puentes aparezca tres veces dicha letra. También la letra ***B*** debe aparecer dos veces, puesto que a la región ***B*** conducen tres puentes, y de igual modo la letra ***D*** debe aparecer dos veces, y también dos veces la letra ***C***. En la serie de ocho letras, con lo que debe designarse el recorrido por los siete puentes, la letra ***A*** tendría que estar presente tres veces, y cada una de las letras ***B***, ***C***, y ***D***, dos veces; lo cual es totalmente imposible en una serie de ocho letras. Con lo cual vemos que no se puede realizar un tal recorrido por los siete puentes de Königsberg.

10. De igual modo, en cualquier otro caso de puentes, si el número de puentes que conducen a cada región es impar, puede calcularse si es posible pasar una sola vez por cada puente. En efecto, si sucede que la suma de todas las veces que ha de aparecer cada letra es igual al número de todos los puentes aumentado en una unidad, entonces este recorrido es posible; pero si, como sucede en nuestro ejemplo, la suma es mayor que el número de puentes aumentado en una unidad entonces no puede realizarse un recorrido de este tipo. La regla que he dado para encontrar el número de veces ***A*** a partir del número de puentes que conducen a la región ***A***, vale igualmente, tanto si todos los puentes salen de una región ***B***, tal como está representado en la figura, como si salen de regiones diversas. Considero, pues, solamente la región ***A***, y busco el número de veces que ha de aparecer la letra ***A***.

11. Pero si el número de puentes que conducen a la región ***A*** es par, entonces se ha de tener en cuenta, acerca del paso por cada puente, si el transeúnte parte o no en el inicio de su recorrido, de la región *A*. En efecto, si hay dos puentes que conducen a la región ***A***, y el transeúnte empieza su recorrido en ***A***, entonces dicha letra ha de aparecer dos veces, puesto que debe figurar una vez en la designación de la salida de ***A*** por un puente, y otra vez en la llegada a ***A*** por el otro puente. Pero si el transeúnte empieza su recorrido desde la otra región, entonces solamente aparece una vez la letra ***A***, puesto que, escrita una vez, denotará tanto la llegada a ***A*** como su salida, puesto que he hecho designar el recorrido de esta manera.

12. Sean cuatro los puentes que conducen a la región ***A***, y el transeúnte empiece su recorrido desde ella: entonces, al designar todo el recorrido, la letra, ***A*** debe aparecer tres veces, si se ha pasado una sola vez por cada puente. Pero si empezó a andar en otra región, entonces la letra ***A*** aparecerá solamente dos veces. Si son seis los puentes que conducen a la región ***A***, entonces dicha letra, si suponemos que el principio del recorrido está en ***A***, aparecerá cuatro veces, pero si el transeúnte no empieza desde ***A***, deberá aparecer solamente tres veces. O sea que, en general, si el número de los puentes es par, su mitad da el número de veces que debe presentarse la letra ***A***, si se supone que el inicio no está en la región ***A***; y la mitad aumentada en una unidad dará el número de veces que debe aparecer la letra ***A***, suponiendo el inicio del recorrido en la misma región ***A***.

13. Como en un recorrido así sólo se puede empezar desde una región, a partir del número de puentes que llevan a una región cualquiera determino el número de veces que debe aparecer una letra que denote una región cualquiera, como la mitad de la suma del número de puentes aumentada en una unidad, si el número de puentes es impar; si es par, la mitad del número de puentes. Por lo tanto, si el número de veces es igual al número de puentes aumentado en una unidad, entonces el camino deseado se logrará, pero deberá tomarse el inicio en la región a la que conduce un número impar de puentes. Pero si el número de todas las veces es igual al de puentes, entonces se logra el camino empezando en la región a la que conduce un número par de puentes, porque de este modo se ha de aumentar en una unidad el número de veces.

14. Propuesta, pues, una disposición cualquiera del río y de los puentes, formulo una operación del siguiente tipo, para investigar si se puede pasar una sola vez por cada puente. Primero designo cada región separada de las otras por el agua con las letras ***A***, ***B***, ***C***, etc. Después sumo el número de todos los puentes, lo aumento en una unidad, y lo pongo en cabeza de la operación. En tercer lugar, escribo debajo de las letras ***A***, ***B***, ***C***, etc. a cada una de las cuales adscribo el número de puentes que conducen a esta región. En cuarto lugar, marco con un asterisco las letras que tienen números pares adscritos. En quinto lugar escribo la mitad de estos números pares, y la mitad de los impares aumentados en una unidad. En sexto lugar, sumo estos números escritos última-mente, y si la suma es menor en una unidad, o es un número igual al que encabeza la operación, que es el número de los puentes aumentados en una unidad, entonces decido que el recorrido deseado puede realizarse. Se ha de tener en cuenta, sin embargo, esto: si la suma encontrada es menor en una unidad que el número que encabeza la operación, entonces el inicio del recorrido debe hacerse en una región señalada con asterisco; por el contrario si la suma es igual al número primer, se ha de partir de una región no señalada. Para el caso de Königsberg, establezco la siguiente operación:

Número de puentes 7; se tiene por lo tanto, 8 (Figura 1).

Puesto que la suma es mayor que 8, no puede lograrse un recorrido de este tipo.

15. Sean dos islas A y B rodeadas de agua, con la cual comunican cuatro ríos, tal como representa la figura. Sean además, quince puentes ***a, b, c, d***, etc., sobre el agua que rodea las islas y sobre los ríos; se pregunta si puede trazarse un recorrido tal que pase por todos los puentes, pero por ninguno más de una vez. Designo, pues, primero todas las regiones que están separadas entre sí por el agua con las letras **A, B, C, D, E, F,** con lo que se tienen, por lo tanto, seis regiones.

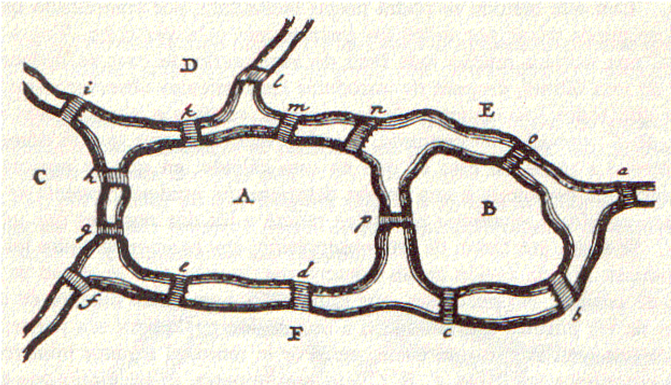


FIGURA 3

		16
A*	8	4
B*	4	2
C*	4	2
D	3	2
E	5	3
F*	6	3
		16

Luego aumento el número 15 de puentes en una unidad, y con la suma 16 encabezo la siguiente operación:
Escribo luego debajo, sucesivamente, las letras ***A***, ***B***, ***C***, etc., y a cada una le adscribo el número de puentes que conducen a la región, es decir a ***A*** ocho puentes, a ***B*** cuatro, etc. Las letras que tienen números pares las señalo con un asterisco. En la tercera columna, escribo luego la mitad de los números pares, aumento por otro lado los impares en una unidad, y escribo también su mitad. Sumo, finalmente, uno tras otro los números de la columna, y obtengo la suma 16, la cual, puesto que es igual al número que encabeza la operación, indica que el recorrido puede hacerse del modo deseado, con tal que se empiece desde las regiones ***D*** o ***E***, que son las que no están señaladas con asterisco.
El recorrido podría hacerse del siguiente modo

EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD

donde he puesto, junto con las letras mayúsculas, los puentes por los cuales se pasa.

16. Con este método se podrá juzgar fácilmente, por complicado que sea el caso, si se puede pasar por todos los puentes una sola vez o no. Voy a dar, sin embargo, una manera mucho más fácil de averiguarlo, la cual se deduce sin dificultad de esta última, después de introducir las siguientes observaciones. Primero observo que todos los números de los puentes escritos a continuación de cada letra ***A***, ***B***, ***C***, tomados en conjunto, son dos veces mayores que el número total de puentes que conducen a una región determinada, cualquier puente se numera dos veces; en efecto, cualquier puente se refiere a las dos regiones que une.

17. Se sigue, por tanto, de esta observación, que la suma de todos los puentes que conducen a cada región es un número par, puesto que su mitad es igual al número de puentes. No puede ser, por lo tanto, que un único número de entre los números de los puentes que conducen a una región cualquiera sea impar; ni tampoco que tres sean impares, ni cinco, etc. Por lo tanto, si algunos números de los puentes adscritos a las letras ***A***, ***B***, ***C***, etc. son impares, es necesario que el número sea par; así en el ejemplo de Königsberg, eran cuatro los números impares de los puentes adscritos a las letras de las regiones ***A***, **B**, ***C***, ***D***, tal como puede verse en el número 14; y en el ejemplo precedente, número 15, hay solamente dos números impares adscriptos a las letras ***D*** y ***E***.

18. Puesto que la suma de todos los números adscritos a las letras ***A***, ***B***, ***C***, etc., es igual al doble del número de puentes, es evidente que aquella suma, aumentada en dos y dividida por dos, da el número que encabeza la operación. Si, pues, todos los números adscritos a las letras ***A***, ***B***, ***C***, ***D***, etc., son pares, y se toma la mitad de cada uno de ellos para obtener los números de la tercera columna, la suma de estos números será menor en una unidad que el número encabezador. Por lo tanto, en este caso siempre podrá hacerse el recorrido por todos los

puentes. Cualquier región desde la que se empiece tendrá un número par de puentes que conduzcan a ella, tal como se precisa. Así, en el ejemplo de Königsberg puede lograr-se pasar dos veces por todos los puentes, puesto que cualquier puente quedará dividido en dos y el número de puentes que conduzcan a cualquier región será par.

19. Además, si solamente dos de los números adscritos a las letras ***A***, ***B***, ***C***, etc. son impares, y todos los demás pares, entonces se logra siempre el recorrido deseado con tal que empiece en la región a la cual lleva un número impar de puentes. En efecto, si dividimos en dos los números pares, e igualmente los impares aumentados en una unidad, tal como está establecido, la suma de estas mitades será superior en una unidad al número de los puentes, y por lo tanto igual al número encabezador. De esto se deduce, además, que si los números impares en la segunda columna fueran cuatro, o seis u ocho, etc. entonces la suma de los números de la tercera columna sería mayor que el número encabezador, y le excederían en una unidad, o en dos, o en tres, etc., siendo, por lo tanto, imposible el recorrido.

20. En cualquier caso propuesto, puede deducirse inmediatamente si puede establecerse un recorrido de una sola vez por todos los puentes o no, gracias a esta regla:
Si son más de dos las regiones a las cuales el número de puentes que conducen es impar, entonces puede afirmarse con certeza que este recorrido no se da.
Si solamente hay dos regiones con un número impar de puentes que conducen a ellas, entonces el recorrido es posible, con tal que empiece en una región distinta de estas dos.
Si, por último no hay ninguna región a la cual conduzca un número impar de puentes, entonces puede establecerse el recorrido deseado, con su inicio en cualquiera de las regiones.

21. No se ha demostrado, en realidad, que existe un camino. Tan solo se ha hecho ver que la existencia de tal camino no contradice las condiciones puestas por él. Que este camino cabe dentro de las condiciones dadas en el texto, trae como consecuencia que todo el sistema de territorios y puentes tiene una comunicación interna con lo que se puede ir de un territorio a otro pasando por los puentes. Que esto sea necesario para que el paseo sobre todos los puentes pueda realizarse es evidente en el sistema de puentes. Que las condiciones dadas en el texto se puedan realizar sin que se cumpla esta condición de comunicación interna, lo demuestra el ejemplo de la figura.

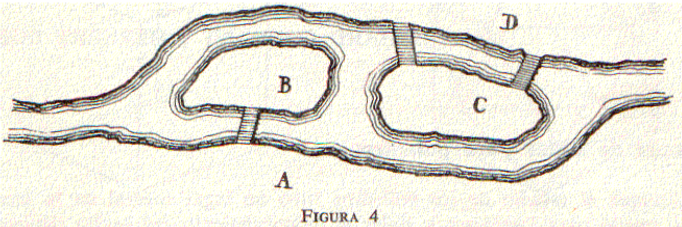
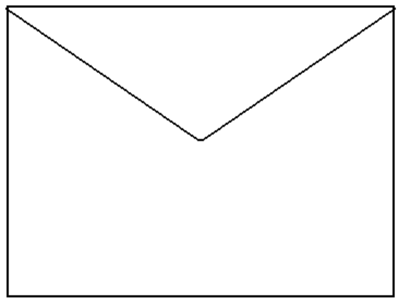


FIGURA 4

La figura 4 muestra un río con dos islas. Un puente va desde una isla hasta una de las orillas, y dos puentes van desde la otra isla hasta la otra orilla. (No se encuentra más puentes)
Con esta regla queda satisfecho totalmente el problema propuesto.

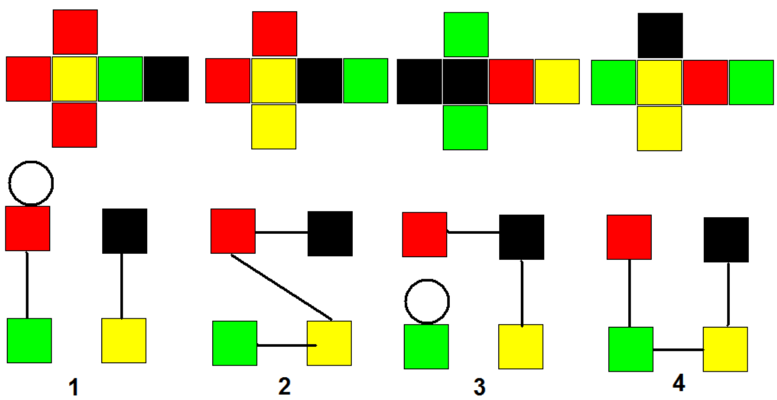
22. Una vez visto que es posible establecer este recorrido queda en pie la cuestión del modo de dirigirlo. Para esto uso la siguiente regla:
Eliminemos mentalmente, en cuanto sea posible, los puentes dobles que llevan de una región a otra, con lo cual el número de los puentes, la mayor parte de las veces, disminuye considerablemente. Entonces seguimos el recorrido deseado, lo cual es fácil, por los puentes restantes. Una vez encontrado el recorrido, no lo perturbarán mucho los puentes eliminados mentalmente, cosa clara para el que preste un poco de atención; por lo tanto, no creo necesario dar más indicaciones para establecer el recorrido en sí mismo.
El método al que Euler se refería podía haber sido examinar cada territorio para ver si el número de los puentes en el mismo es impar o par. Si cada territorio tiene un número par de

puentes, el paseo en cuestión se puede hacer de tal manera que conduzca al punto de partida. Si el territorio tiene un número impar de puentes, el paseo puede realizarse, pero no se puede regresar al punto de partida. Si más de dos territorios tienen un número impar de puentes, el paseo no se puede hacer.
Su método consistía en reemplazar las áreas de tierra por puntos, y los puentes por líneas que los conectaran. Los puntos se llaman *vértices*; y las líneas se llaman *aristas*.
El *grado* o *valencia* de un vértice es el número de aristas que *inciden* él.
Toda la configuración es un *grafo.*
El problema de cruzar los puentes se reduce al de atravesar el grafo con un trazo continuo de lápiz, sin levantarlo del papel, pasando por todas las aristas y una sola vez por cada una.
Euler descubrió que el camino puede hacerse si el grafo contiene a lo sumo dos vértices de grado impar.
Si el grafo no tiene vértices de grado impar, puede hacerse el viaje de manera que se retorne al punto de partida.
Si el grafo contiene dos vértices de grado impar puede atravesarse en un viaje, pero no es posible volver al punto de partida.

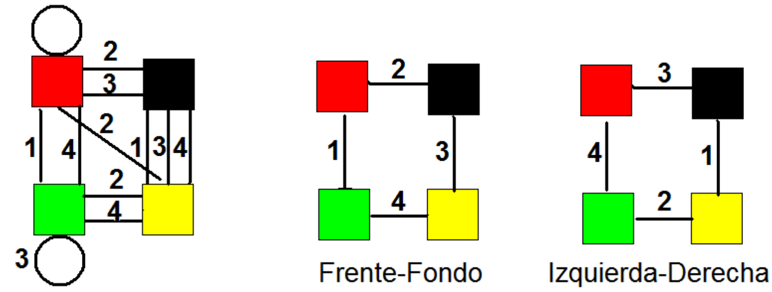


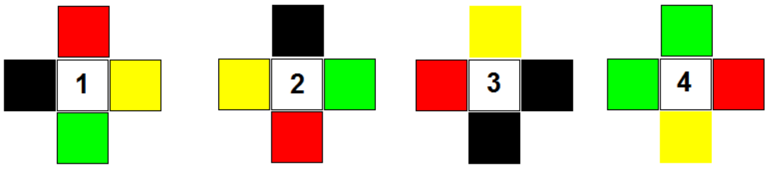
La conclusión de Euler es que si el grafo contiene $2n$ vértices impares, siendo n un natural, se necesitarán exactamente n viajes distintos para atravesarlo.
Una observación incidental que realiza Euler en sus argumentos, ahora puede expresarse así.
En un grafo finito (es decir con un número finito de vértices y un número finito de aristas), el número de vértices de grado impar es un número par.
La definición matemática de grafo es:
V un conjunto no vacío (de vértices), E un conjunto de aristas y f: $E \rightarrow S_1(V) \cap S_2(V)$ una función llamada *función de incidencia*.

EL JUEGO DE "LA LOCURA INSTANTÁNEA"



Se dibuja un grafo para cada cubo con vértices en los colores y aristas uniendo caras opuestas. Se construye el grafo unión. Se extraen dos sub-grafos 2-regulares de cuatro vértices, sin aristas en común y cada uno con aristas 1, 2, 3, 4.





Un sub-grafo se usa para formar el frente-fondo de la pila y el otro izquierda-derecha.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Alton, Eric J. "Euler." *Encyclopedia of World Biography.* New York: McGraw-Hill, Inc., 1973. vol. 4, pp. 30-31.

Problemas típicos de la topología combinatoria
1) Coloración de mapas (o de grafos)
2) Problemas de redes en informática y robótica

Objetos que generalizan la noción de grafo en topología: Los complejos simpliciales.
Una definición de complejo simplicial que se usa en topología combinatoria es la siguiente:
Un *complejo simplicial* es una familia finita de conjuntos tales que cualquier subconjunto de un miembro de la familia es también un miembro de la familia.