P04

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL CONTEXTO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Nilda ETCHEVERRY, Marisa REID, Rosana BOTTA GIODA, Norma EVANGELISTA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam
Avda. Uruguay 151. (6300) Santa Rosa. La Pampa. Argentina
nildaetcheverry@yahoo.com.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Formación de profesores, resolución de problemas, estrategias, bloqueos.

RESUMEN

La manera de abordar la resolución de problemas es algo muy personal y en este sentido lo que proponemos es ayudar a cada estudiante a descubrir su propio estilo, sus capacidades y sus limitaciones. No se trata de transmitir a los estudiantes métodos, reglas heurísticas o trucos, sino las actitudes profundas que han conducido a ello, partiendo de su propia experiencia.
El objetivo de este trabajo es analizar la resolución de problemas desde el punto de vista didáctico y desde dos planos: el cognitivo y el contexto sociocultural.
Esta experiencia se desarrolló en el segundo cuatrimestre del año 2007 con alumnos que cursaban Geometría II[1], perteneciente al segundo año del Profesorado de Matemática de la UNLPam.
Es una investigación exploratoria basada en la resolución de un problema que permite reportar el análisis y la identificación de los límites y potencialidades pedagógicas de la implementación de tecnología en la sala de aula de Matemática.

INTRODUCCIÓN

El origen de este trabajo nace como expresión de una profunda inquietud compartida por quienes ejercemos la docencia en algún nivel educativo y nos hemos involucrado de manera especial con la enseñanza de la matemática.
Convencidas de que no todas las estrategias didácticas mediante las cuales se ha intentado enseñar a los estudiantes a resolver problemas matemáticos conducen certeramente al objetivo propuesto, pero conscientes de que se favorecer el aprendizaje de resolución de problemas, proponiendo problemas sugerentes, despertando el interés por esta actividad matemática, dando pautas, indicaciones, ayudando a los estudiantes a explicitar sus procesos de pensamiento y a reflexionar sobre ellos.

[1] Los contenidos del curso de Geometría II son: Trigonometría. Formas cuadráticas. Cónicas. Cuádricas. Movimientos y otras transformaciones en el espacio. Cuerpos geométricos. Cálculo de volúmenes de cuerpos. Teorema de Euler. Representación plana. Paralelismo y perpendicularidad en el espacio. Distancia en el espacio. Máximo y mínimo geométricos. Desigualdades geométricas.

La manera de abordar la resolución de problemas es algo muy personal y en este sentido lo que proponemos es ayudar a cada estudiante a descubrir su propio estilo, sus capacidades y sus limitaciones. No se trata de transmitir a los estudiantes métodos, reglas heurísticas o trucos, sino las actitudes profundas que han conducido a ello, partiendo de su propia experiencia.
El objetivo de este trabajo es analizar la resolución de problemas desde el punto de vista didáctico y desde dos planos: el cognitivo y el contexto sociocultural.

Diseño de la experiencia

Esta experiencia se desarrolló en el segundo cuatrimestre del año 2007 con alumnos que cursaban Geometría II[2], perteneciente al segundo año del Profesorado de Matemática de la UNLPam.
La metodología de trabajo propuesta consta de cuatro etapas:

- Familiarización del problema.
- Exploración inicial: búsqueda de varias estrategias de resolución.
- Registro escrito del proceso de resolución con la mayor cantidad posible de datos.
- Discusión en grupo acerca del proceso de resolución de cada problema para hacer explícitas las ideas, estrategias, razonamientos y bloqueos presentes en el proceso de resolución.

Es necesario combinar la práctica con una metodología de trabajo apropiada y el análisis, la discusión y la crítica de los procesos de resolución.
De una guía de ocho problemas, los alumnos elegían uno para intentar resolver y luego entregaban la solución posible aunque no la hubiesen terminado o aunque tuviesen la certeza que no habían llegado a una solución posible.
Cada estrategia muestra diferentes procesos y herramientas matemáticas que ayudaron a explorar y resolver el problema. La mayoría eligió el siguiente problema.

Problema

En el plano se consideran los puntos $P=(8,2)$ y $Q=(5,11)$ y un móvil se desplaza de P a Q según un camino que ha de cumplir las siguientes condiciones: el móvil parte de P y llega a un punto del eje x, a lo largo del cual recorre un trayecto de longitud 1; después se separa de este eje y se dirige a un punto del eje y a lo largo del cual recorre un trayecto de longitud 2, se separa del eje y finalmente se dirige al punto Q. Entre todos los caminos posibles, determinar el de longitud mínima.

Estrategias usadas que no los condujo a ninguna solución (que los paralizó):

- Dibujan la representación gráfica que ilustra el desplazamiento del móvil en el primer cuadrante del plano, según las condiciones impuestas en el enunciado, sin extender el marco de esta representación a todo el plano, ni pensar en un camino de longitud equivalente al pedido.
- Calculan la longitud mínima usando aplicaciones de la derivada pero ante la imposibilidad de continuar por la vía analítica debido a la complicación de los cálculos, puesto que no

[2] Los contenidos del curso de Geometría II son: Trigonometría. Formas cuadráticas. Cónicas. Cuádricas. Movimientos y otras transformaciones en el espacio. Cuerpos geométricos. Cálculo de volúmenes de cuerpos. Teorema de Euler. Representación plana. Paralelismo y perpendicularidad en el espacio. Distancia en el espacio. Máximo y mínimo geométricos. Desigualdades geométricas.

podían determinar las soluciones de ecuaciones obtenidas, tomaron una dirección distinta: redujeron el problema al caso más simple considerando P y Q a la misma distancia del eje x pero no pudieron generalizarlo.

Estos comportamientos ponen claramente de manifiesto dos tipos de bloqueos en la resolución de problemas: uno de tipo perceptivo, que consiste en delimitar el espacio físico en el que se va a trabajar en el primer cuadrante del plano porque en él se encuentra la trayectoria buscada; y otro de tipo cultural, en este caso originado por reducir cualquier problema geométrico a otro algebraico equivalente, mediante automatismos, gracias a la geometría analítica.

Procedimientos que condujeron a la solución esperada:

- Buscaron un camino equivalente utilizando simetrías axiales y traslaciones, reduciendo el camino a la distancia entre dos puntos $P´$ y $Q´$ que están sobre una misma recta para luego calcular su distancia y agregarle las tres unidades del camino recorrido paralelo a los ejes. Ver figura 1.

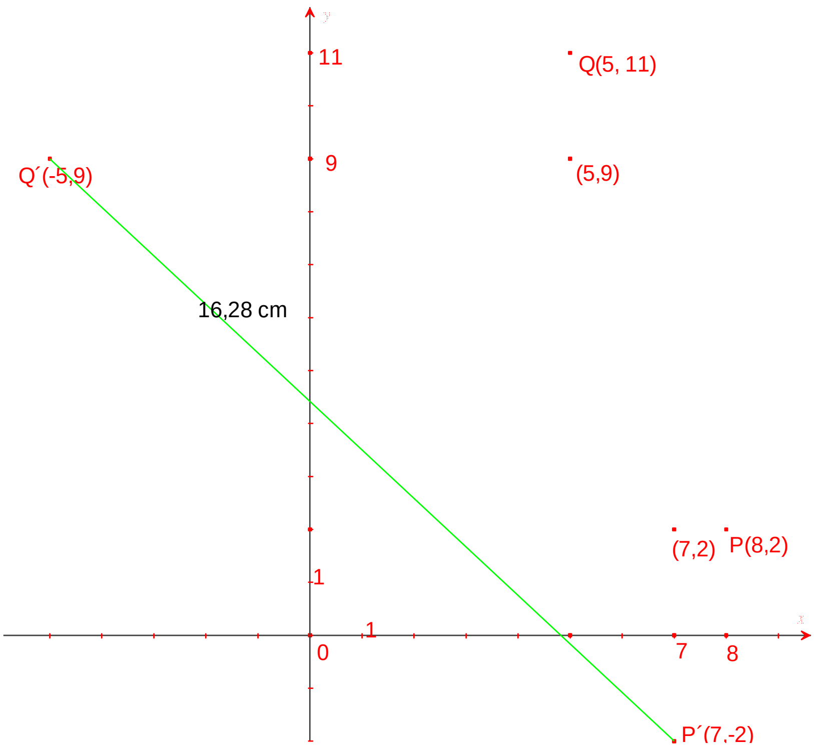

Figura 1

- Los que prefirieron formalizar el problema en el contexto de la geometría analítica designaron los puntos A, B, C y D mediante las coordenadas indicadas en el enunciado como muestra la figura 2 y luego han calculado la función F suma de distancias:

$$F = d(P, A) + d(A, B) + d(B, C) + d(C, D) + d(D, Q)$$

empleando la fórmula de la distancia entre dos puntos. Esta función es derivable y se puede calcular para qué valores de x e y alcanza sus valores mínimos.

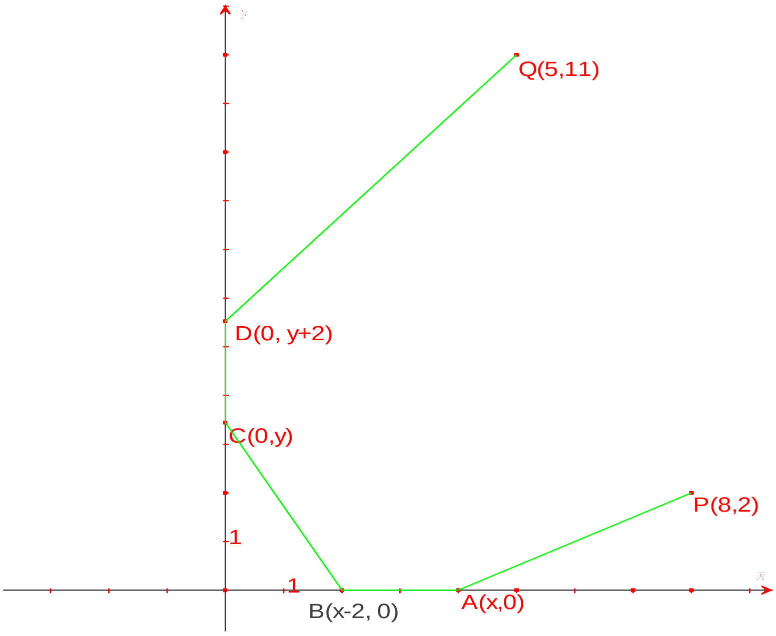

Figura 2

Los que intentaron este camino se encontraron con que tenían que resolver un sistema de ecuaciones y sus conocimientos matemáticos no les permitieron resolver este sistema. En este punto se han atascado muchos estudiantes, y no han sabido continuar. Dos alumnos pidieron por resolverlo con la computadora, uno hizo uso del software Mathematica:

$$\text{f[x\_, y\_]} = \sqrt{(8-x)\,\hat{}\,2 + 2\,\hat{}\,2} + 1 + \sqrt{(x-1)\,\hat{}\,2 + y\,\hat{}\,2} + 2 + \sqrt{25 + (y-9)\,\hat{}\,2}$$

$$3 + \sqrt{4 + (8-x)^2} + \sqrt{25 + (-9+y)^2} + \sqrt{(-1+x)^2 + y^2}$$

$$\text{D[f[x, y], x]}$$

$$-\frac{8-x}{\sqrt{4+(8-x)^2}} + \frac{-1+x}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}}$$

$$\text{D[f[x, y], y]}$$

$$\frac{-9+y}{\sqrt{25+(-9+y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}}$$

$$\text{NSolve}\left[\left\{-\frac{8-x}{\sqrt{4+(8-x)^2}} + \frac{-1+x}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} == 0,\ \frac{-9+y}{\sqrt{25+(-9+y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}} == 0\right\},\ \{x, y\}\right]$$

$$\{\{y \to 4.41667,\ x \to 5.81818\}\}$$

$$\text{f[x, y] /. }\{\{y \to 4.416666666663882`,\ x \to 5.818181818181818565`\}\}$$

$$\{19.2788\}$$

Otro alumno utilizó el software Derive

introducimos la función

$$\#1:\quad \sqrt{(8-x)^2+2^2}+\sqrt{(x-x+1)^2+0^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{0^2+(y-y-2)^2}+\sqrt{5^2+(y+2-11)^2}$$

$$\#2:\quad \sqrt{x^2-16\cdot x+68}+\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}+\sqrt{y^2-18\cdot y+106}+3$$

calculamos las derivadas parciales con respecto a x e y

$$\#3:\quad \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2-16\cdot x+68}+\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}+\sqrt{y^2-18\cdot y+106}+3\right)$$

$$\#4:\quad \frac{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-16\cdot x+68}+(x-8)\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}}{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot\sqrt{x^2-16\cdot x+68}}$$

$$\#5:\quad \frac{d}{dy}\left(\sqrt{x^2-16\cdot x+68}+\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}+\sqrt{y^2-18\cdot y+106}+3\right)$$

$$\#6:\quad \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot(y-9)+y\cdot\sqrt{y^2-18\cdot y+106}}{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot\sqrt{y^2-18\cdot y+106}}$$

resolver el sistema

$$\#7:\quad \frac{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-16\cdot x+68}+(x-8)\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}}{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot\sqrt{x^2-16\cdot x+68}}=0$$

$$\#8:\quad \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot(y-9)+y\cdot\sqrt{y^2-18\cdot y+106}}{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot\sqrt{y^2-18\cdot y+106}}=0$$

$$\#9:\quad \mathrm{NEWTONS}\left(\left[\frac{(x-1)\cdot\sqrt{x^2-16\cdot x+68}+(x-8)\cdot\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}}{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot\sqrt{x^2-16\cdot x+68}},\ \frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot(y-9)+y\cdot\sqrt{y^2-18\cdot y+106}}{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}\cdot\sqrt{y^2-18\cdot y+106}}\right],\ [x,\ y],\ [3,\ 3]\right)$$

Con este software para que resuelva el sistema hay que darle valores iniciales, en este caso 3 y 3, y como se ve da lo mismo que la solución proporcionada por el Matemática para *x* e *y*.

3	3
6.185523969	5.495727129
5.890016338	4.491304887
5.819927648	4.417810245
5.818182752	4.416667266
5.818181818	4.416666666
5.818181818	4.416666666

Se puede constatar que los bloqueos de origen cognitivo se presentaron al concebir la estrategia de resolución en la dirección y el punto de vista encerrados en el enunciado es decir en este caso la geometría analítica y en considerar la misma relación entre los datos que la dada en el enunciado de un problema, por ejemplo las relaciones entre las longitudes de los segmentos y trabajar en el espacio físico delimitado por la representación dibujada como traducción del enunciado.
También estuvieron presentes los bloqueos originados por la pragmática escolar al aplicar automatismos o algoritmos operando mediante reflejos condicionados por la práctica escolar con la influencia de la experiencia reciente, es decir, retomar la misma estrategia que en problemas anteriores, aunque esta no sea la más adecuada.

CONCLUSIONES

Se pone de relieve que se puede favorecer el aprendizaje de la resolución de problemas bajo ciertas condiciones, pero que el camino que hay que recorrer es arduo y difícil aunque merece la pena explorarlo y adentrarse en él.
Está claro que reflexionar sobre los procesos de resolución de problemas, sobre los mecanismos que intervienen, sobre las dificultades que aparecen, sobre los diferentes tipos de obstáculos que surgen, es un modo de mejorar la forma de abordar los problemas, pero favorecer en la práctica esta actitud reflexiva es una tarea lenta que exige invertir mucho tiempo y tratar de persuadir poco a poco a los estudiantes de su utilidad, mostrándoles que sólo la ejercitación y la práctica en resolución de problemas no bastan para mejorar la forma de enfrentarse a éstos.
Trabajar en un análisis de los pro y los contra del uso de determinadas estrategias didácticas orientadas a la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos, pretende aportar a los profesionales de la enseñanza de la matemática y a quienes tienen a su cargo la iniciación al aprendizaje de la misma un elemento de reflexión que enriquezca su acción docente en beneficio de la formación matemática de los estudiantes que tienen a su cargo.

BIBLIOGRAFÍA

Adams, J. L. 1986. Guía y juegos para superar bloqueos mentales. Gedisa. Barcelona.

Monereo, C.; Castelló, M.; Clariana, M.; Palma, M.; Pérez, M. L., 1998. *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en el aula*, Grao, Barcelona.

Polya, G. 1965 (reimp. 1997). Cómo plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical Problem Solving*. Londres: Academic Press, Inc.