P07

ENFATIZANDO SIGNIFICADOS DE LOS CONCEPTOS DE ANÁLISIS VECTORIAL INVOLUCRADOS EN LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Marina GIRELLI, Ana María DE LA FUENTE

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam
Uruguay 151. (6300) Santa Rosa, La Pampa. Argentina
mgirelli@cpenet.com.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: análisis vectorial, electromagnetismo, conceptos, significación.

RESUMEN

Nuestra experiencia de aula como docentes de Física III (electromagnetismo básico) de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, nos señala que la mayoría de los alumnos, si bien definen los conceptos de análisis vectorial y operan con ellos, dan muestra de no comprender acabadamente sus significados.
En este trabajo se comunica de qué manera, cuando enseñamos las Ecuaciones de Maxwell hacemos hincapié en la interpretación y comprensión de conceptos de análisis vectorial involucrados en ellas.
Se pretende dar la oportunidad de debatir sobre la problemática planteada teniendo en cuenta a todos los actores implicados, docentes y alumnos de física y docentes de análisis matemático.

INTRODUCCIÓN

La matemática es el lenguaje de la física (Schenberg, 1988). En efecto, el hecho de que las ideas físicas puedan formularse de modo simbólico por ecuaciones permite una rápida comprensión y manejo de los conceptos físicos.
No obstante, existen relevamientos que muestran que amplios porcentajes de estudiantes de ciencias tienen serias dificultades para comprender adecuadamente la relación entre la Matemática y la Física (Salinas, 2001).
Por otro lado, la complejidad matemática de la física es uno de los factores que más inhibe a los alumnos. Al respecto, Monk (1994) identifica y señala la rapidez indebida con que los profesores de física enseñan las representaciones matemáticas del mundo físico, como una de las causas de sus dificultades de comprensión. A su vez, trabajos de investigación revelan que en las clases de matemática predomina una enseñanza que favorece la práctica algorítmica y algebraica, probablemente por el miedo a la pérdida de los contenidos matemáticos considerados como "matemáticas de verdad" y a la comodidad y sencillez que supone una enseñanza basada en la resolución mecánica (Moreno Moreno, 2001; Yusof et al., 1999; Artigue, 1995).
Con referencia al aprendizaje de los alumnos, diferentes autores señalan la existencia de grandes dificultades en los estudiantes universitarios para aprender significativamente los

conceptos físicos (Alurralde, 1995; Goldberg et al., 1995; Wainmaier et al., 1995, McDermott, 1987).
Los conceptos en la Física deben caracterizarse por tener un núcleo de significado claro y sin ambigüedad; además deben ser útiles para no constituirse en un conjunto de datos sin sentido. Ellos adquieren importancia en la medida en que aparecen en otras disciplinas y leyes alejadas de aquellas en las que fueron formulados inicialmente (Holton, 1979). El nivel o grado de significación que poseen los diferentes contenidos para el alumno no ha sido especialmente analizado a pesar de tener importancia a la hora de construir los diseños de enseñanza y materiales didácticos (Jiménez Gómez et al., 1996).
Todo lo expuesto, sumado a nuestra experiencia de aula como docentes de Física III (electromagnetismo básico) de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, nos moviliza a comunicar de qué manera, cuando enseñamos las Ecuaciones de Maxwel, l hacemos hincapié en la interpretación y comprensión de conceptos de análisis vectorial involucrados en ellas.
El objetivo de este trabajo es dar la oportunidad de debatir sobre la problemática planteada teniendo en cuenta a todos los actores implicados, docentes y alumnos de física y docentes de análisis matemático.

ECUACIONES DE MAXWELL

Se reconoce a Maxwell como el físico teórico más destacado del siglo XIX. James Clerk Maxwell (1831-1879) escocés, en 1865 a la edad de 24 años dio una firme base matemática, unificada y coherente a las leyes de la electricidad y el magnetismo, fenómenos estos, que hasta ese momento se veían aparentemente desconectados. Maxwell reformuló las leyes de la electricidad y el magnetismo en términos de cuatro ecuaciones diferenciales que, en suma, relacionan los campos eléctricos y magnéticos con sus fuentes, es decir cargas eléctricas, corrientes eléctricas y campos variables con el tiempo.
Estas ecuaciones son la base física de la teoría clásica del electromagnetismo en el vacío. Maxwell demostró que la combinación de estas ecuaciones origina una ecuación de onda que deben satisfacer los campos eléctricos y magnéticos, prediciendo así la posibilidad de ondas electromagnéticas.
Según el problema a resolver, son utilizadas en forma integral o diferencial. Las cuatro ecuaciones de Maxwell se resumen en el siguiente cuadro.

LEY	INTEGRAL	DIFERENCIAL
Ley de Gauss para **E**	$\int_{SC} \mathbf{E} \,.\, d\mathbf{S} = Q/\varepsilon_0$	$div\ \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$
Ley de Gauss para **B**	$\int_{SC} \mathbf{B} \,.\, d\mathbf{S} = 0$	$div\ \mathbf{B} = 0$
Ley de Faraday-Henry	$\oint \mathbf{E} \,.d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\ d\mathbf{S}$	$rot\ \mathbf{E} = -\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t}$
Ley de Ampere-Maxwell	$\oint \mathbf{B}\ d\mathbf{l} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \int_S \mathbf{E}\ d\mathbf{S}$	$rot\ \mathbf{B} = \mu_0\ \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\delta \mathbf{E}}{\delta t}$

La primera y la segunda ecuación de Maxwell no son otras que las correspondientes a la ley de Gauss para el campo eléctrico y para el campo magnético y expresan propiedades importantes de estos campos.
La tercera ecuación corresponde a la ley de Faraday de la inducción, para la cual logró una formulación matemática correcta, y la cuarta, la obtuvo de la generalización de la ley de Ampere, donde incluyó la corriente de desplazamiento para asegurar la continuidad de la

corriente total en el sistema. Ella expresa que el campo magnético puede producirse además, por un campo eléctrico variable con el tiempo. En efecto, fue Maxwell quien predijo matemáticamente ese fenómeno. Son estas leyes de Faraday-Henry y de Ampere-Maxwell las que muestran la conexión entre los campos eléctricos y magnéticos.
La síntesis expresada por estas ecuaciones es uno de los mayores logros de la física. De todas las interacciones físicas, son las electromagnéticas las mejor comprendidas y las únicas que hasta el momento se pueden expresar en una forma matemática cerrada y compatible. Gracias a su comprensión fue posible gran parte de nuestra civilización, ya que estas interacciones rigen, en nuestras vidas, la mayoría de los procesos naturales y debidos a la mano del hombre. No obstante debe aclararse que tienen sus limitaciones, puesto que a nivel de partículas elementales, especialmente a altas energías, debe recurrirse a la electrodinámica cuántica.

ENFATIZANDO SIGNIFICADOS

En fenomenologías físicas como la electromagnética, con alto nivel de abstracción (Guisasola et al. 2004; Guisasola et al., 2003; Cabral da Costa et al., 2002; Tiberghien et al., 1998) pero bajo nivel de significación para el alumno, por lo general éste no desarrolla concepciones espontáneas sino analógicas o sociales (Pozo et al., 1991). En este caso, el único modo que el alumno tiene de conocer o dar significado a cualquier dato externo es la utilización de algún esquema de asimilación (Piaget, 1977), que si no existiese en su estructura cognitiva o fuera inadecuado haría que el dato no sea asimilado (dato significativo), o si se captara sería distorsionado.
El estudio del cálculo vectorial da la oportunidad al alumno de generar esquemas relativos a conceptos tales como campo vectorial, flujo de un campo vectorial, gradiente, divergencia y rotor de esos campos y formalizar teoremas con esos conceptos. Del análisis de algunos textos utilizados en los cursos básicos de Análisis Matemático (Stewart, 1999; Thomas et al., 1999; Pita Ruiz, 1995) se observa, por un lado, que se resalta la significación de los mismos y por otro, que muchos temas de la Física están presentes no sólo en la ejercitación, sino también en situaciones introductorias motivadoras y en ejemplos de aplicación. Sin embargo en las clases de Física se observa que la mayoría de los alumnos, si bien definen estos elementos y operan con ellos, dan muestra de no comprender acabadamente sus significados.
El tema que nos preocupa reside en buscar la manera de dar significado a esos contenidos objeto de la enseñanza. En el convencimiento de que una de las variables que más influye en el aprendizaje de conceptos es la forma de enseñarlos, en nuestras clases de electromagnetismo básico se desarrolla una secuencia de contenidos que incluye conceptos de análisis vectorial, que aplicados a campos eléctricos y magnéticos formalizan importantes propiedades de los mismos.
A continuación se detallan los aspectos que se resaltan en oportunidad de tratar cada una de las Ecuaciones de Maxwell.
Así, en la primera de las ecuaciones, que es la Ley de Gauss para el campo eléctrico, se repasa el concepto de flujo de un campo vectorial. Hablar de la existencia de un campo vectorial significa pensar en que hay una región del espacio donde a cada punto del mismo se le puede asignar un único vector. Si en ese campo vectorial se considera una superficie S, cerrada (si encierra un volumen v) o no (tal el caso de una hoja plana) interesa evaluar el flujo total del campo vectorial a través de esa superficie, a partir de considerar todos los elementos infinitesimales de superficie en que se ha dividido S. Ese flujo puede ser: positivo, nulo o negativo.
La primera ecuación de Maxwell vincula el concepto de flujo con las cargas eléctricas, es decir con las fuentes de campo eléctrico. Esta relación indica una importante propiedad de los campos eléctricos. En su forma integral, el flujo del campo eléctrico total **E** está relacionado

con la carga eléctrica encerrada en la superficie gaussiana (Q), que no es necesariamente la carga generadora de ese campo eléctrico **E**.

Los teoremas de la divergencia y de Stokes representan la generalización en el espacio del Teorema de Green y permiten transformar la ecuación dada en su forma integral a la forma diferencial.

Así es que el Teorema de la divergencia permite relacionar una integral de superficie con una de volumen. Su aplicación al campo eléctrico, $\int_{SC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int div\, \mathbf{E}\ dv$ evalúa el flujo total del campo eléctrico a través de una superficie cerrada S como la integral de la divergencia de **E** sobre el volumen que encierra esa superficie y permite expresar la ley de Gauss en su forma diferencial. Esta expresión significa que existe una relación local entre el campo eléctrostático **E** en un punto y la distribución de carga en dicho punto. La divergencia además indica la variación por unidad de longitud de cada componente de **E** en su propia dirección.

La segunda ecuación de Maxwell en su forma integral señala que el flujo del vector inducción magnética **B** a través de una superficie cerrada cualquiera resulta nulo. Físicamente esto es coherente con el hecho de que las líneas de fuerza del campo magnético **B** son siempre cerradas. La expresión diferencial señala que la divergencia del campo **B** es siempre cero, lo que significa que las líneas ni divergen ni convergen, son cerradas. No existe un monopolo magnético.

La tercera ecuación en su forma integral tiene relación con el concepto de circulación de un campo vectorial. En campos reales como el eléctrico o el magnético se obtienen resultados interesantes. Esta ecuación da cuenta que las líneas de campo eléctrico **E** rodean el borde de la superficie atravesada por un flujo variable de campo magnético. Que el flujo del campo magnético varíe, significa que varía el campo magnético, el área, el ángulo que forman entre ellos o más de uno de ellos a la vez. La ley de Faraday-Henry expresada por esta ecuación, indica que un campo magnético variable con el tiempo genera un campo eléctrico. La integral de línea se transforma en una integral de superficie a través del Teorema de Stokes, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot}\ \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$. Este teorema que relaciona la circulación del campo eléctrico con la integral de superficie del rotor, sobre la superficie que encierra esa línea, permite obtener la expresión diferencial de la tercera ecuación $rot\ \mathbf{E} = -\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t}$.

La cuarta ecuación, en su forma integral describe que las líneas de campo magnético **B** bordean la superficie atravesada por corrientes eléctricas o campos eléctricos variables con el tiempo. Esto significa que un campo magnético puede producirse tanto por corrientes eléctricas como por un campo eléctrico variable con el tiempo. La ley de Ampere-Maxwell en forma diferencial establece una relación local entre el campo magnético **B** en un punto y la densidad de corriente total (corrientes de conducción y de desplazamiento) en el mismo punto. En esta ecuación, el Teorema de Stokes relaciona la circulación del campo magnético con la integral de superficie del rotor, sobre la superficie que encierra esa línea. En ella, el rotacional de **B** es una derivada lateral que indica la variación por unidad de longitud de una componente del campo en las otras direcciones.

Como última actividad en el desarrollo de la asignatura Física III y a modo de cierre integrador, se retoman en forma conjunta las cuatro ecuaciones de Maxwell como síntesis del electromagnetismo y se interpretan matemática y físicamente, lo que permite establecer similitudes y diferencias de las propiedades de los campos eléctricos y magnéticos.

CONSIDERACIONES FINALES

Si bien en este trabajo centramos la atención en un tema específico del electromagnetismo tal como las Ecuaciones de Maxwell, las consideraciones realizadas pueden extenderse a otros

temas de matemática que se utilizan en este campo de la Física. Así, por ejemplo, en un campo electroestático se puede hablar del gradiente de una función escalar (potencial eléctrico) que indica la existencia de un campo conservativo.
Estas consideraciones son válidas para otros temas tales como gravitación, fluidos, ondas, etc., para los cuales también es importante hacer hincapié en el significado que los conceptos de análisis matemático tienen en Física.
En ese cometido convocamos a los docentes de Análisis a desarrollar, conjuntamente con los de Física, estrategias didácticas que tiendan a establecer un puente entre ambas disciplinas, a fin de fortalecer desde cada una de ellas la significación de los conceptos

BIBLIOGRAFÍA

ALURRALDE DE REVOL, E., JAVI, V., MARTÍNEZ. C., MONTERO, M. T., BÁRCENA, H., GALARZA DE MARTÍNEZ, R. y BIXQUERT DE RIVELLI, O. 1995. Aprendizaje de física básica. *Memorias REF IX*, 102-112.

ARTIGUE, M. 1995. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en Gómez, P. (ed.). Ingeniería didáctica en educación matemática, (Grupo Editorial Iberoamericano. México).
CABRAL da COSTA, S. S. e MOREIRA, M. A. 2002. O papel da Modelagem Mental dos Enunciados na Resolução de Problemas em Física, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24(1), 61-75.

GOLBERG, D. y BENDALL, S. 1995. Making the invisible visible: a teaching/learning environment that builds on a new view of the physics learner, *Am. J. Phys*., 63(11), 978-991.

GUISASOLA, J., ALMUDÍ, J. M. y ZUBIMENDI, J. L. 2003. Dificultades de aprendizaje de los estudiantes universitarios en la teoría del campo magnético y elección de los objetivos de enseñanza*, Enseñanza de las Ciencias,* 21 (1), 79-94.

GUISASOLA, J., GRÃS-MART, A., MARTÍNEZ TORREGROSA, J. M., ALMUDÍ, J. M. y BECERRA LABRA, C. 2004. Puede ayudar la investigación en enseñanza de la Física a mejorar su docencia en la Universidad? *Revista Brasileira de Ensino de Física, 26(5)*, 197-202

HOLTON, G y BRUSH, S. 1979. Introducción a los Conceptos y Teorías de las Ciencias Físicas. (Reverté, España).

JIMÉNEZ GÓMEZ, E. y MARTÍNEZ, N. 1996. ¿Cuándo un contenido académico tiene significado para el alumno? Implicaciones didácticas, E*nseñanza de las Ciencias*, 14(3), 323-330.

McDERMOTT, L.C., ROSENQUIST, M.L. y VANZEE. E. H. 1987. Student difficulties in connecting graphs and physics. Examples from kinematics, *Am. J. of Phys*., 58(5), 452-462.

MONK, M. 1994. Mathematics in physics education: a case of more haste less speed. *Phys. Educ.* 29(4), 209-211.

MORENO MORENO, M. 2001. El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos, (Tesis didáctica), *Enseñanza de las Ciencias*, *19(3), 479-480.*

PIAGET, J. 1977. Epistemología genética (Solpín: Argentina), Traducido de L´epistemologie genitique. (1974). (Presses Universitaires de France. París).

PITA RUIZ, C. 1995. Cálculo vectorial. (Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México).

POZO, J. I., SANZ, A., GÓMEZ, M. A. y LIMÓM, M. 1991. Las ideas de los alumnos sobre ciencia: una interpretación desde la psicología cognitiva, *Enseñanza de las Ciencias*, 9(1), 83-94.

SALINAS, J. 2001. La Física en el aula: ¿Matemática aplicada, o ciencia de la naturaleza? *Memorias del Encuentro Nacional de Profesores de Física: la problemática de la enseñanza de la física en carreras de Ingeniería y del área de las Ciencias Naturales*, 261-268.

SCHENBERG, M. 1988. Pensando a física. (Nova Stella Ed. São Paulo).

STEWART, J. 1999. Cálculo Multivariable. (Internacional Thomson Editores. México).

THOMAS, G., FINNEY, R. 1999. Cálculo varias variables. (Pearson Education. México).

TIBERGHIEN, A., LEONARD, J. E., & BAROJAS, J. (Eds.) 1998. Connecting Research in Physics Education with Teacher Education, edited by International Commission on Physics Education (ICPE). Retrieved November, 27, 2007, from: http://www.physics.ohio-state.edu/~jossem/ICPE/BOOKS.html

WAINMAIER, C. O. y PLASTINO, A. 1995. En búsqueda de una enseñanza que propicie aprendizajes significativos, *Memorias REF IX*, 93-101.

WELLS, M., HESTENES, D., SWACKHAMER, G. 1995. A modeling method for high school physics instruction, *Am. J. Phys*., 63(7), 606-619.

YUSOF, Y. & TALL, D. O. 1999. Changing Attitudes to University Mathematics through Problem-Solving, *Educational Studies in Mathematics*, 37, 67-82.