

## LA IMPORTANCIA DE LA ELABORACIÓN DE CONJETURAS EN EL TERCER CICLO DE LA E.G.B.: ANÁLISIS DE SIGNIFICADOS INSTITUCIONALES Y PERSONALES DEL RAZONAMIENTO CONJETURAL

**Silvia Catalina ETCHEGARAY, María Elena MARKIEWICZ**

*Universidad Nacional de Río Cuarto  
Ruta Nac. N° 36 Km, 601 (5800) Río Cuarto, Argentina  
mmarkiewicz@exa.unrc.edu.ar*

**Nivel Educativo:** Tercer Ciclo Educación General Básica.

**Palabras Clave:** didáctica, significado, razonamiento plausible, conjeturas.

### RESUMEN

A partir de una situación problemática que se propondrá resolver a los participantes del taller, pretendemos generar la reflexión acerca del papel fundamental que juega la elaboración de conjeturas en las etapas exploratorias del trabajo matemático, y, en contraposición con ello, la escasez de espacios que permiten al alumno de nivel medio desarrollar el razonamiento conjetural y, especialmente, la ausencia total de institucionalización al respecto. La intención es poner al descubierto la necesidad de generar dichos espacios, o, en términos de la teoría onto-semiótica, de construir sistemas de prácticas óptimos y viables que permitan solucionar esta carencia, es decir, que den al alumno la posibilidad de enfrentarse a situaciones que involucren la elaboración y contrastación de conjeturas, y de que los procedimientos y argumentaciones que se utilicen sean institucionalizados por el docente. Creemos que para ello es necesario contar con un primer significado de referencia institucional que permita delimitar el funcionamiento del razonamiento conjetural en las instituciones de producción de la matemática. Es por ello que trabajaremos sobre un significado de referencia construido, utilizando este marco para que los docentes puedan analizar cómo está presente el razonamiento conjetural en los libros de texto que habitualmente emplean y también en sus propias producciones.

### 1. FUNDAMENTACIÓN Y OBJETIVOS DEL TALLER

La elaboración de conjeturas constituye una instancia muy importante del trabajo matemático. En efecto, y tal como lo expresan Chevallard, Bosch y Gascon (1997) entre otros autores, cuando uno se enfrenta a un problema que debe resolver o a una cuestión que quiere estudiar, el estudio de dicha cuestión entra en una fase exploratoria, donde tiene una importancia fundamental la elaboración y contrastación de conjeturas, y por ende, el razonamiento que permite formular las mismas. A este tipo de razonamiento el matemático George Polya (1954) denominó razonamiento plausible o conjetural.

Sin embargo, tal como lo indica Gascon (2000), en el ámbito escolar muchas veces se ignoran estas instancias de elaboración de conjeturas, y el razonamiento que permite su formulación, quedando así las fases exploratorias de la actividad matemática muy debilitadas, bajo la exclusiva responsabilidad del alumno y sin ningún tipo de institucionalización.

Nosotros hemos podido constatar esta situación, a la que hace referencia Gascón, a través de nuestra experiencia como docentes de la escuela media y de trabajos realizados en el campo

experimental del proyecto de investigación en Didáctica de la Matemática del que formamos parte y que se desarrolla en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales de la Universidad Nacional de Río Cuarto. Más específicamente, hemos podido observar que, en el nivel medio (en particular, en el tercer ciclo de la Educación General Básica) son escasas las situaciones que permiten al alumno poner en funcionamiento el razonamiento conjetural, esto es, situaciones que generen en el alumno la necesidad de conjeturar, de observar, de relacionar, de buscar analogías, de generalizar, de contrastar sus conjeturas y reformularlas. Pero lo que más se pone en evidencia es el hecho de que estos procedimientos, así como las inferencias plausibles que los rigen, raramente se hacen explícitos o se reflexiona sobre ellos. En otras palabras, no se institucionalizan.

Desde nuestro proyecto estamos convencidos de que es fundamental generar espacios para que el alumno pueda formular y contrastar conjeturas, y crear las condiciones propicias para que este tipo de trabajo se pueda desarrollar. En este sentido, creemos que es muy importante que el razonamiento que el alumno lleva a cabo en estas etapas exploratorias de la actividad matemática (o, para ser más precisos, los procedimientos, las argumentaciones, los patrones de inferencia utilizados cuando se elaboran conjeturas) sean retomados, comparados, analizados, para reflexionar sobre su uso, su importancia y el papel que cumplen dentro de la matemática.

Para llevar adelante nuestro proyecto y dar respuesta al problema planteado anteriormente, comenzamos por generar una agenda de investigación en torno al razonamiento conjetural (Markiewicz, 2006). El enfoque semiótico- antropológico, desarrollado por el Dr. Juan Díaz Godino (2003), nos proporcionó el marco teórico y las herramientas metodológicas adecuadas para poder comenzar a dar respuestas a las cuestiones planteadas en dicha agenda. Los principales resultados están expuestos en la tesis de maestría en Didáctica de la Matemática: “El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la Matemática” (Markiewicz, 2005) y algunos de ellos fueron presentados en un artículo de la I REPEM. (Markiewicz / Etchegaray, 2006)

Este taller girará en torno al razonamiento conjetural, teniendo como marco de referencia la investigación antes mencionada.

El objetivo general del taller es reflexionar, junto a los profesores, acerca de la importancia de la elaboración y contrastación de conjeturas en el Tercer Ciclo de la E.G.B, aportando algunas pautas que apunten al desarrollo del razonamiento conjetural en el alumno de este nivel educativo.

En particular, nos proponemos acercar a los profesores a situaciones que involucren la elaboración de conjeturas para comenzar a reflexionar sobre los procedimientos y argumentaciones que ellos mismos ponen en funcionamiento en dichas situaciones; institucionalizar estos y otros procedimientos y argumentaciones, utilizando para ello los resultados de nuestra investigación respecto de los elementos de significado que conforman el razonamiento conjetural; y proponer, sobre la base de este marco teórico, un análisis de textos de nivel medio, a fin de reflexionar sobre la presencia del razonamiento plausible en ellos, así como en las propias producciones personales de los docentes.

Esto se llevará a cabo en tres instancias de reflexión y actividades que coincidirán de manera aproximada con los tres encuentros de dos horas cada uno en los que está programado el taller. En los apartados siguientes describiremos en detalle en qué consisten estas tres instancias.

## **2. DESARROLLO DEL TALLER**

### **2.1 Primera instancia**

De acuerdo con el enfoque semiótico antropológico, el significado de un objeto está vinculado a los sistemas de prácticas (tanto personales como institucionales) de los cuales dicho objeto

emerge. Tales sistemas de prácticas están conformados por las situaciones o problemas en los que ese objeto se pone en funcionamiento, los procedimientos o acciones que se realizan para resolver esas tareas, y las definiciones, propiedades y argumentaciones que giran en torno a dicho objeto. Todos estos componentes constituyen elementos de significado del objeto en cuestión.

El objeto de estudio de este taller son “las conjeturas”, o más bien, el “razonamiento conjetural”, y como tal, para estudiarlo, necesitamos comprender su significado, es decir, tomar contacto con los sistemas de prácticas en donde se lo pone en funcionamiento: resolver situaciones en donde tengamos que elaborar conjeturas, analizar los procedimientos que se ponen en juego, y reflexionar sobre las definiciones, propiedades y argumentaciones que están involucradas. Por ende, creemos que la forma de comenzar a estudiar nuestro objeto es enfrentándonos a una situación particular que involucre la elaboración de conjeturas. Para ello, hemos seleccionado un problema en particular: “Un torneo de ping-pong”, planteado por Chevallard, Bosch y Gascon (1997), para que los participantes de taller resuelvan.

El problema es el siguiente:

### Cuestión inicial

Un instituto organiza un torneo de ping-pong en forma de liga. La comisión organizadora debe decidir cuántos días durará el torneo, los horarios de los partidos, el número de mesas que necesitarán, el tipo de premios, etc. Dado que se dispone de un presupuesto limitado, hay que realizar un estudio previo de lo que costará la organización del evento.

Las decisiones que hay que tomar dependen del número de partidos que jugarán en la liga, en la que cada jugador juega una vez contra todos los demás. Los organizadores dudan entre poner o no un límite al número de inscripciones, por miedo a que una avalancha de jugadores haga totalmente inviable la realización del torneo. Para ello necesitan prever cuál será el número total de partidos que se jugarán a partir del número de jugadores inscriptos.

### Problema

Si en un torneo de ping-pong se inscribieron  $n$  jugadores, ¿cuál será el número total  $T$  de partidos que se realizarán si cada jugador juega una vez con cada uno de los jugadores inscriptos?

La consigna será resolver el problema, en forma individual primero, insistiendo especialmente en explicitar todo lo que se pensó para resolverlo. A continuación se les pedirá a los participantes del taller que, reunidos en grupos, comenten cada uno su resolución y seleccionen una de ellas para exponer al resto de los integrantes del taller. Un representante de cada grupo expondrá la resolución elegida.

Este problema involucra la elaboración de una conjetura: para resolverlo se deberá formular una afirmación que de cuenta del número total de partidos en función del número de jugadores. Un análisis a priori de este problema nos muestra que admite diferentes formas de abordaje, algunas de las cuales son presentadas por Chevallard, Bosch y Gascon (1997), y otras que no están consideradas allí. Cuando hablamos de diferentes modos de abordar el problema nos referimos tanto al contenido matemático que se pone en juego, como a la forma de razonar utilizada. Y esto último es lo que nos interesa que se ponga de manifiesto: ¿qué tipo de razonamiento utilizaron para elaborar esa conjetura?, ¿qué procedimientos llevaron a cabo para poder dar con esa afirmación que ellos consideran verdadera y que les permitió dar respuesta al problema? ¿Qué argumentaciones utilizaron para contrastar estas afirmaciones?

De este modo entraremos en contacto con nuestro objeto de estudio, el pensamiento conjetural, a partir de una situación que obligue a ponerlo en funcionamiento, promoviendo un primer acercamiento al análisis de significados personales acerca de nuestro objeto.

## 2.2 Segunda instancia

Una vez que los participantes del taller han entrado en contacto con algunos aspectos referidos al razonamiento conjetural, la idea es formalizar, institucionalizar estos y otros aspectos que hacen al mismo. Esta es una instancia más bien teórica, en donde, partiendo del trabajo realizado en el problema del ping-pong, y rescatando los procedimientos y argumentaciones que se hayan puesto en funcionamiento, se dará un panorama general de todos los elementos que conforman el razonamiento conjetural.

Somos concientes de que este es un tipo de razonamiento que concierne más bien al plano personal, pero nos enfrentamos a la importancia de que los docentes cuenten con un marco referencial para analizarlo. En esto, justamente, es en lo que más se ha avanzado en nuestro proyecto de investigación: es decir, en la construcción de un significado de referencia institucional acerca del razonamiento conjetural. Creemos que socializar este tipo de resultados de investigación puede ayudar a los docentes a tomar conciencia de qué elementos deben rescatar e institucionalizar, por ejemplo, en un problema como el del ping-pong, a fin de promover el desarrollo de este tipo de razonamiento en sus alumnos.

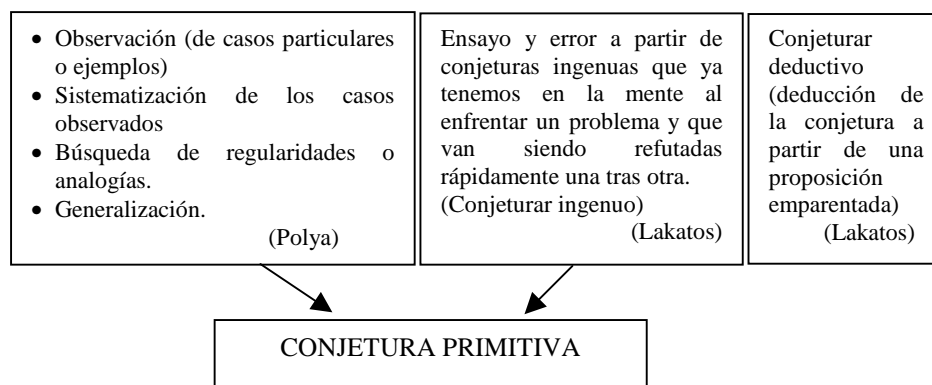
Es así que trabajaremos con los docentes sobre este significado de referencia construido en el marco del proyecto, delimitando los tipos de situaciones en los que se pone en juego la elaboración de conjeturas y los procedimientos involucrados (componentes praxémicos) y también las definiciones, propiedades y argumentaciones que tienen que ver con este tipo de razonamiento (componentes discursivos). Si bien el análisis de estos elementos está expuesto en detalle en el trabajo de tesis y en el artículo mencionado en la sección 1, a continuación presentaremos una síntesis de estos elementos, que serán analizados exhaustivamente en el taller.

Elementos de significado vinculados al razonamiento plausible o conjetural

### ➤ Situaciones

- Situaciones que involucran la elaboración de una conjetura, en particular, aquellas en las que es necesario formular una relación general.
- Problemas (ya sea de encontrar o de demostrar) en los que, para su resolución sea útil o necesario recurrir a un caso más general, a un caso particular, o a un caso análogo.
- Situaciones o tareas que involucran aisladamente alguno o algunos de los procedimientos que mencionaremos a continuación.

### ➤ Procedimientos



- Contrastación de la conjetura primitiva, a través de:
  - Examen de consecuencias (es decir, de una afirmación que se deduce de nuestra conjetura). Esto puede consistir en:
    - la comprobación de la validez de la conjetura en un nuevo caso particular aislado (especialización)
    - la comprobación de la validez de la conjetura en un conjunto de casos,

- un “experimento mental contrastador” o argumento aproximado del tipo del que presenta Lakatos (1978). Estos experimentos mentales descomponen la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas que abren nuevas instancias de contrastación. Están basados en el método de Pappus: en ellos se parte de la conjetura y se van sacando consecuencias de ella. Si finalmente se llega a una consecuencia verdadera, esto hará a nuestra conjetura más creíble.
- Examen de un posible motivo (es decir, de una afirmación de la que se desprenda nuestra conjetura primitiva)
- Examen de una conjetura rival incompatible (es decir, de una afirmación que no pueda ser verdadera simultáneamente con nuestra conjetura primitiva)
- Examen de una conjetura análoga.
- Reformulación de la conjetura a partir del hallazgo de contraejemplos globales (que refutan la conjetura) o locales (que refutan alguno de los lemas)
  - mediante redefiniciones de los términos que en ella intervienen
  - mediante la reinterpretación del contraejemplo.
  - mediante una restricción del dominio de validez de la conjetura
  - mediante la identificación del lema (explícito o implícito en la prueba) que es refutado por el contraejemplo y su incorporación a la conjetura como condición (método de incorporación de lemas de Lakatos).

#### ➤ **Definiciones**

- **razonamiento plausible**
- **conjetura**
- **inducción**
- **analogía**
- **generalización**
- **especialización**
- **contraejemplo** (considerado este en su aspecto de disparador para la reformulación de una conjetura)

#### ➤ **Argumentaciones**

- La verificación de una consecuencia hace a una conjetura más creíble.
- La verificación de una nueva consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a como la nueva consecuencia difiere más o menos de las consecuencias anteriormente verificadas.
- La verificación de una consecuencia cuenta más o menos de acuerdo a si la consecuencia es más o menos improbable en sí misma.
- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede disminuir cuando un posible fundamento de la misma es refutado.
- Nuestra confianza en una conjetura sólo puede aumentar cuando una conjetura rival incompatible es refutada.
- Una conjetura es más creíble cuando una conjetura análoga es verdadera.

#### ➤ **Propiedades**

- El razonamiento plausible es azaroso, provisional y controversial.
- Tiene normas fluidas y no hay una teoría clara y consensuada del mismo.
- Sus patrones de inferencia, considerados en uno de sus aspectos (la dirección) pueden ser considerados impersonales (ya que no dependen de la persona que realiza la inferencia), universales (ya que tampoco depende del contenido) y hasta autosuficientes en cierta forma (porque no necesitan de nada fuera de las premisas para llegar a esa conclusión), pero de ningún modo definitivos. Al considerar el otro aspecto (la magnitud) dejan de ser también impersonales, universales y autosuficientes.

Los componentes mencionados serán ejemplificados en una situación particular, correspondiente a la elaboración y contrastación de la conjetura de Euler referida a poliedros

(Para todo poliedro..., el número de caras más el número de vértices menos el número de aristas es 2). Este es un ejemplo de gran relevancia en donde los elementos antes mencionados se ponen de manifiesto, tal como lo muestran Polya (1954) y Lakatos (1978), dos de los referentes principales de nuestra investigación.

El listado presentado anteriormente, a pesar de no ser absolutamente exhaustivo, nos aporta (tal como ya lo hemos mencionado) un primer significado de referencia institucional para nuestro objeto de estudio, el razonamiento conjetural, y permite, por una parte, dar cuenta de la complejidad de dicho objeto, y por otra parte, hacer más operativo cualquier análisis de sistemas de prácticas personales o institucionales que tenga que ver con la elaboración de conjeturas. A su vez, aporta algunas pautas para la construcción de un significado del razonamiento conjetural en el nivel medio, así como para la elaboración de praxeologías adecuadas para dicho nivel de enseñanza tendientes a superar el problema planteado en la sección 1.

### 2.3 Tercera instancia

El objetivo de esta tercera instancia es que los profesores puedan analizar hasta qué punto está presente la elaboración de conjeturas en los libros de texto que habitualmente utilizan. Más específicamente, que puedan realizar un análisis de la presencia del razonamiento conjetural en los textos, utilizando como marco el significado de referencia que se ha aportado en la segunda instancia.

Creemos que es importante realizar este análisis del significado institucional del razonamiento conjetural en esta institución particular que es el libro de texto, ya que el mismo constituye un referente primordial para los docentes en la preparación de sus clases.

En nuestra investigación, el análisis de libros de texto muestra sustanciales restricciones entre los elementos de significado presentes en los textos en relación a los explicitados en nuestro significado de referencia.

Entre otras cosas, se hallaron pocas referencias explícitas a la elaboración de conjeturas y al razonamiento conjetural, o a sus elementos de significado. Sólo encontramos algunas referencias muy aisladas a procedimientos tales como la observación de casos particulares y la búsqueda de regularidades, además de algunas pocas referencias a las definiciones de “conjetura” y “razonamiento inductivo”.

También se observó que, en general, no se aprovechan situaciones que tienen un gran potencial para el desarrollo de este tipo de razonamiento. Más precisamente, analizamos la manera en que los textos abordan un tema que forma parte de los contenidos básicos comunes de la E.G.B., tal como el Teorema de Euler, tema en el cual, como ya lo hemos mencionado, sería esperable o deseable que se ponga en funcionamiento el razonamiento conjetural.

Se observó que en la mayoría de los textos está completamente ausente la fase de elaboración y contrastación de conjeturas, ya que se presenta a los alumnos el enunciado del Teorema de Euler, y, a continuación, una tarea para verificar su cumplimiento en algún caso particular aislado, que el mismo texto propone y en el cual, generalmente la propiedad vale. Es decir, no hay una instancia de elaboración de la conjetura, sólo hay una tarea que involucra la verificación de la propiedad en casos particulares aislados. Es más, ni siquiera hay referencias que apunte a poner de manifiesto que tal verificación contribuye a fortalecer nuestra confianza en la propiedad enunciada.

Otra presentación típica de los textos es proponer a los alumnos una tarea en la que deben completar un cuadro en cuya primer columna aparecen una serie de poliedros, y las demás aparecen encabezadas por los ítems: N° de caras, N° de vértices, N° de aristas y en la última columna la expresión  $C-A+V$ . Este tipo de tarea involucra la observación de casos particulares (previos al enunciado de la propiedad) pero ningún otro procedimiento ya que no necesitan hallar una manera de sistematizar los datos, ni buscar regularidades (ya que la misma es obvia en el cuadro) ni realizar ninguna generalización, ya que a continuación del cuadro aparece el enunciado del Teorema y nuevamente se pierde la oportunidad de que los

alumnos lleguen por sí solos a la conjetura y busquen diferentes modos de contrastarla, o hallen contraejemplos que los induzcan a reformularla.

Creemos que es importante entonces que los docentes tomen conciencia de este tipo de restricciones, para poder realizar los cambios necesarios que permitan acercar el razonamiento conjetural al aula. Es por ello que, en esta instancia, se presentará a los participantes algunas secciones de diferentes textos de tercer ciclo de E.G.B. para que analicen en ellas la existencia de elementos de significado vinculados al razonamiento conjetural. Algunas de estas secciones fueron extraídas a partir de referencias explícitas a la elaboración de conjeturas en el índice del texto, y otras muestran la forma de abordaje que realizan algunos textos del Teorema de Euler. Esta tarea se realizará en grupos, realizándose posteriormente una puesta en común.

Un análisis detallado de los elementos de significados personales puestos en juego en el problema del ping-pong, pero ahora realizado utilizando el marco de referencia de la sección 2, podría constituir una buena instancia de evaluación del taller.

Por último, se extraerán las conclusiones fundamentales del taller, que girarán en torno a la importancia de desarrollar el razonamiento conjetural en el alumno de nivel medio y los cambios que podríamos estar pensando como docentes para darles la oportunidad a nuestros alumnos de acercarse al verdadero quehacer matemático, en particular, de poder formular y contrastar sus propias conjeturas, y ayudarles a reconocer y reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento.

Creemos que este taller puede poner de manifiesto cómo la investigación puede aportar a la formación de los profesores de matemática y constituir, verdaderamente, un motor de cambios en el ámbito del aula.

## REFERENCIAS

- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. Y GASCÓN, J. 1997. *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. (Horsori, Barcelona).
- GASCÓN, J. 2000 *El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la didáctica de las Matemáticas*. Trabajo realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT.
- GODINO, J.D. 2003. *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet. URL: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf>
- LAKATOS, I. 1978. *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. (Alianza Editorial, Madrid).
- MARKIEWICZ, M. E. 2005. *El rol del razonamiento plausible en la enseñanza de la matemática*. Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Río Cuarto, Argentina.
- MARKIEWICZ, M.E. 2006. Algunas preguntas de investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural En *Actas del Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas*. Jaén. España. Disponible en Internet. URL: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/MEMarkiewics\\_Razonamiento\\_plausible.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/MEMarkiewics_Razonamiento_plausible.pdf)
- MARKIEWICZ, M.E./ETCHEGARAY, S. 2006. *Algunos resultados de una investigación acerca del razonamiento plausible o conjetural*. En actas de la “Primer Reunión Pampeana de Educación Matemática” Santa Rosa de la Pampa. Argentina
- MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACIÓN DE LA NACIÓN – Consejo Federal de Cultura y Educación. República Argentina. 1995. *Contenidos Básicos Comunes para la Educación General Básica*.
- POLYA, G. 1954. *Mathematics and Plausible Reasoning*. (Princeton University Press, New Jersey)