**T08**

# LA TRASTIENDA DE LA MATEMÁTICA

Liliana **SIÑERIZ,** Cristina **FERRARIS,** Martha **FERRERO**

*Centro Regional Universitario Bariloche - UNComahue - Argentina*
*Calle Quintral 1250. Barrio Jardín Botánico. Bariloche (8400)*
*lsineriz@crub.uncoma.edu.ar cferrari@crub.uncoma.edu.ar*
*mferrero@crub.uncoma.edu.ar*

**Nivel Educativo:** Nivel Medio y Superior.

**Palabras Clave:** heurística, conjetura, patrones plausibles, pruebas, refutaciones.

## RESUMEN

El taller está dirigido a dar protagonismo a los contenidos procedimentales en el aprendizaje de la Matemática, mediante la explicitación de formas de razonamiento que no se encuadran en la lógica formal y que, sin embargo, representan un fuerte aporte en la construcción del conocimiento de la disciplina, particularmente en el proceso de demostración.
Con ese objetivo, se realizará una revisión de las elaboraciones teóricas de George Polya e Imre Lakatos que hacen referencia al trabajo heurístico en Matemática en instancias de elaboración, contrastación y validación de conjeturas.
Se presentarán los patrones de razonamiento plausible que llevan a la elaboración y contrastación de conjeturas, identificados por el primero de los autores. En lo referente a validación de conjeturas, se tratarán los métodos de la lógica del descubrimiento propuestos por el segundo autor.
Se examinarán ejemplos que ilustren las nociones teóricas, para facilitar su comprensión y discusión. Como cierre, se utilizará el teorema de Jordan para polígonos, a fin de afianzar los métodos anteriormente trabajados.
Para desarrollar la parte práctica correspondiente, permitir la exploración de conjeturas y ejemplificar los elementos teóricos, se contará con una extensa gama de cuerpos poliédricos.

## FUNDAMENTACIÓN

Con el objetivo de trabajar los contenidos procedimentales en el aprendizaje de la matemática, consideramos necesario explicitar las formas de razonamiento que no se encuadran en la lógica formal pero están presentes en la actividad matemática, y en particular en el proceso de demostración.
Si bien la Matemática se suele presentar como una ciencia puramente deductiva, identificándola con su abstracción axiomática formal, el matemático recorre distintos caminos heurísticos para elaborar, contrastar y validar conjeturas.
En el quehacer matemático, no sólo tienen lugar razonamientos deductivos, sino que existen ciertos razonamientos que se consideran provisionales y viables, así como ciertos procedimientos tendientes a descubrir la solución de los problemas que se abordan.
La demostración, a la hora de ser transmitida, consiste en una cadena de implicaciones fundamentadas en axiomas u otras demostraciones independientes de ella. Pero en el proceso

de elaboración de la prueba formal, tienen lugar distintos caminos de descubrimiento, con idas y vueltas, acercamientos con algunos rodeos, aproximaciones en espiral.
Nos proponemos compartir con los participantes del taller el pensamiento de George Polya e Imre Lakatos quienes, a diferencia del formalismo dogmático que identifica a la matemática exclusivamente con la matemática formalizada, presentan respectivamente, una perspectiva heurística y otra metodológica, basadas en una matemática en proceso de descubrimiento y crecimiento.

## MARCO TEÓRICO

Los contenidos del taller se sustentan en el marco teórico que aportan las obras plasmadas en los libros "Matemática y razonamiento plausible" (Polya, 1966) y "Pruebas y refutaciones" (Lakatos, 1976) en su primera parte. El primero lleva a analizar los razonamientos implicados en la elaboración y contrastación de conjeturas, y el segundo se sitúa en una fase de validación, enfocando la crítica de la conjetura o de la prueba mediante contraejemplos globales y locales.

### Polya y los patrones de razonamiento plausible

El razonamiento heurístico no es definitivo ni riguroso, sino simplemente provisional y plausible; no lleva necesariamente a la solución del problema o a la demostración de la conjetura. Se considera que los razonamientos son plausibles cuando, aunque no se transmita verdad de las premisas a la conclusión, se produce un aumento en la creencia de que la conclusión efectivamente es correcta.
Polya determina patrones para describir la estructura de las operaciones mentales utilizadas en los razonamientos heurísticos, a los que llama "patrones plausibles". Las habilidades implicadas, según este autor, se adquieren a través de situaciones que dan la posibilidad de aplicarlo.
Los patrones plausibles provienen de considerar las siguientes formas de contrastar una conjetura:

- *verificación de consecuencias* de la conjetura, tratando de comprobar la validez de la conjetura a través de casos particulares
- *examen de un posible motivo o fundamento* de la conjetura, que consiste en hallar una proposición de la que se deduce dicha conjetura y abocarse a ella, que si bien es más general, por alguna razón, parece también más viable
- *examen de una conjetura incompatible*, que se realiza a través del análisis de otra conjetura que no puede ser verdadera al mismo tiempo que la conjetura original
- *examen de una conjetura análoga*, que se realiza al percibir y clarificar una analogía entre la conjetura original y otra, y puede probarse que esta última es verdadera.

Las contrastaciones pueden realizarse con distintos grados de sofisticación, de modo que pueden obtenerse diferentes patrones que llevan a un debilitamiento o fortalecimiento de la conclusión.

### Lakatos y la metodología del descubrimiento

Los primeros pasos del trabajo con una conjetura responden a las fases de elaboración y contrastación; a éstos les sigue naturalmente la fase de validación. En este punto entra en escena Lakatos:

> "La fase de conjeturar y contrastar en el caso de V-A+C = 2 se discute en Polya (1954), vol 1. Polya se detuvo ahí, sin ocuparse de la fase de probar, aunque

señala, por supuesto, la necesidad de una heurística de *problemas a probar*.
Nuestra discusión comienza allí donde se detiene Polya". (Lakatos, 1978; pp23)

En cuanto a la evolución de los conocimientos en situaciones de validación, Lakatos muestra cómo se puede someter a una conjetura a algún tipo de "experimento mental", que se caracteriza fundamentalmente por descomponer la conjetura primitiva en subconjeturas o lemas que abren nuevas instancias de contrastación.

En el libro de referencia, este autor presenta la metodología del descubrimiento matemático mediante la lógica de pruebas y refutaciones, a través del diálogo imaginario entre un profesor y sus alumnos en una instancia de clase en la que se discute la conjetura de Euler. Ilustra el funcionamiento de la matemática desde la formulación de conjeturas, hasta la confirmación o refutación de las mismas. Narra cómo van apareciendo ejemplos que no encajan con la conjetura o con la prueba (contraejemplos), mostrando su función de falsación o refutación. Considera dos tipos de contraejemplo a los que llama locales y globales.

Un contraejemplo local es aquél que tiene características que hacen que la prueba no sea válida para ese caso, pero que sin embargo verifica la proposición conjeturada. Éstos refutan uno de los lemas, sin refutar la conjetura; critican la prueba puesto que en dicho ejemplo no se cumple una propiedad que se suponía válida. Lo que queda refutado es un lema implícito y por tanto, la prueba.

Un contraejemplo global, por otra parte, es aquél que refuta la propia conjetura. La presencia de contraejemplos globales del teorema produce una tensión entre el concepto, la conjetura y su prueba. Esta tensión afecta a la conjetura o a la prueba, y puede resolverse de distintas maneras, incluso ajustando la definición del concepto o determinando el abandono de la conjetura. Todo esto permite establecer distintos métodos de trabajo en procura de la validación.

Al caso de abandono de la conjetura lo llama Método de *la rendición*, ya que determina el rechazo de la conjetura pues el contraejemplo da por tierra con ella.

Los métodos restantes, que sí siguen trabajando con la conjetura, son:

1. Método de *exclusión de monstruos*
2. Método de *ajuste de monstruos*
3. Método de *exclusión de excepciones*
4. Método de *incorporación de lemas*

Según estos métodos, los contraejemplos pueden llevar respectivamente a tratar de revisar la conjetura, los términos en ella implicados o su prueba, mediante:

1. una redefinición de los términos que en ella intervienen
2. la reinterpretación del contraejemplo
3. una restricción del dominio de validez
4. la identificación del lema (explícito o implícito en la prueba) que es refutado por el contraejemplo y su incorporación a la conjetura como condición.

## METODOLOGÍA

El taller se realizará en dos sesiones conformadas por una instancia teórica de presentación de las perspectivas de los autores de referencia, y otra instancia de práctica que permita consolidar los temas tratados y su discusión.

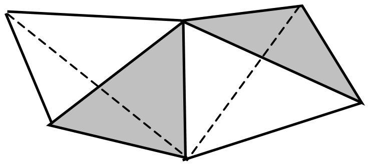
Como cierre y evaluación se trabajará el teorema de Jordan desde su presentación como conjetura, hasta la discusión de una determinada prueba al estilo de la dialéctica de pruebas y refutaciones de Lakatos.

La primera sesión consistirá de una breve reseña teórica acerca de las posturas de Polya y Lakatos respecto a elaboración y contrastación de conjeturas, presentando también los patrones de razonamiento plausibles que el primero de estos autores estableció para describir distintos modos de razonamiento heurístico que se ponen en juego en instancias de contrastación.

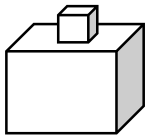
La parte práctica consistirá en la discusión de ejemplos que hemos elaborado para ilustrar la teoría y la eventual discusión de otros que surjan de los participantes.
La segunda sesión atiende a la validación de una conjetura a través de los métodos de la lógica del descubrimiento, utilizando como soporte el teorema de Euler respecto a poliedros:

*"En todo poliedro el nº de vértices más el nº de caras menos el nº de aristas es igual a dos,* $v - a + c = 2$*"*

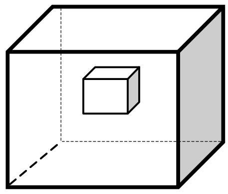
Se contará con distintos cuerpos poliédricos para realizar la parte práctica correspondiente, permitir una exploración de la conjetura y ejemplificar los elementos teóricos. Se dispondrá de una extensa gama de poliedros: regulares, semirregulares, otros convexos, "toro poliédrico" (baliza, marco de cuadro), calidociclo, "poliedros con burbuja" (poliedro con otro dentro), "cubo con sombrero" (cubo con un cubo pequeño en el centro de una de sus caras), tetraedros siameses (una arista en común, un vértice en común), poliedros estrellados, otros no convexos. Mostramos algunos dibujos de los ejemplos más "extraños":



tetraedros siameses



cubo con sombrero

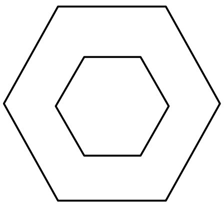


poliedro con burbuja

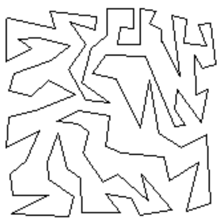
La metodología utilizada en esta parte consistirá en la búsqueda de los distintos contraejemplos y discusión de su validez, a medida que se vaya presentando la teoría.
Para concluir, se afianzarán los distintos métodos de Lakatos utilizando el teorema de Jordan para polígonos:

*"Cualquier polígono simple P divide a los puntos del plano en dos regiones disjuntas, conexas y distintas, de modo que cualquier poligonal que une puntos de una y otra tiene con el polígono intersección no vacía"*

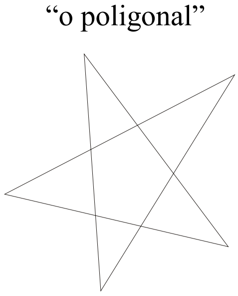
Se abordará la prueba restringida a polígonos que sigue los lineamientos de la que aparece en R. Courant y H. Robbins (1941), con fines a su análisis.
Se mostrarán distintas figuras que, consideradas como polígonos, lleven a revisar la prueba presentada o la definición de polígono a utilizar. Algunos ejemplos:



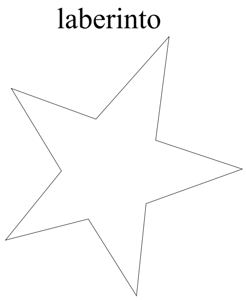
"o poligonal"



laberinto



"monstruo" estrellado



polígono estrellado simple como resultado del ajuste

La elección del teorema de Jordan como cierre y evaluación se debe a dos aspectos que consideramos muy importantes: uno, que juega un rol determinante tanto en la noción de poliedro (como "caja"), como en la de polígono simple (como "corral") y ambos conceptos son fundamentales para la búsqueda de los monstruos trabajados con los métodos de la lógica del descubrimiento; otro, es que tiene una historia de algún modo similar a la de la conjetura de Euler tratada por Lakatos y también las pruebas tienen características similares, por ejemplo ambas se pueden descomponer en lemas de fácil enunciado.

## IMPACTO DEL TALLER

Acordando con las actuales tendencias que enfatizan la inclusión de los contenidos procedimentales en el currículo de escuela media, pensamos que la participación en este curso constituye una instancia de reflexión y aprendizaje, que apunta a profundizar algunos aspectos del quehacer matemático y brinda al docente un marco teórico de gran influencia sobre el modo de pensar la Matemática, con implicaciones en la Educación Matemática.

## BIBLIOGRAFIA

Courant, R. y Robbins, H. (1941): *¿Qué es la Matemática?* Prensa de la universidad de Oxford.

Lakatos, I. (1976): *Proofs and Refutations*. Oxford University Press: London. [Trad. castellana: *Pruebas y refutaciones*. Alianza Ed.: Madrid, 1978].

Polya, G. (1965): *Cómo plantear y resolver problemas*, Ed. Trillas, México, (orig. published 1954)

Polya, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*. Tecnos: Madrid.