

UN DESAFÍO: INCLUIR GRAFOS EN LOS DISTINTOS NIVELES EDUCATIVOS

Teresa BRAICOVICH, Marcia OROPEZA, Valeria CERDA

*Universidad Nacional del Comahue
Buenos Aires 1400 - Neuquén Capital (C.P. 8300) - Argentina
teresabraicovich@jetband.com.ar*

Nivel Educativo: EGB3 y Polimodal.

RESUMEN

El trabajar con algunos conceptos de grafos hace que los alumnos: realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, a partir de la intuición, exploración, descubrimiento y planteo de distintas hipótesis. También pueden utilizar a los grafos como “organizadores”, con el fin de facilitar la comprensión y el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas. Por último, es un tema que resulta motivador para los alumnos, dando la posibilidad de cambiar de actitud frente a la asignatura matemática.

La finalidad del dictado de este taller es transferir el tema grafos a docentes, tanto en formación como en ejercicio, haciendo referencia también a la didáctica y a la metodología a utilizar en los distintos niveles educativos.

Los temas que se presentarían en el desarrollo del mismo son los siguientes: recorridos eulerianos, grafos planares, grafos bipartitos, árboles, coloreo y recorridos hamiltonianos, a pesar de que este último tema es aún hoy un problema abierto.

Durante los encuentros se buscaría que los propios asistentes sean quienes construyan el conocimiento, mediante la presentación de actividades adecuadas, esto con el fin de generar en ellos la inquietud de profundizar en el estudio de este tema en el futuro y también de movilizarlos a enseñar el mismo a sus alumnos.

I) INTRODUCCIÓN

Puede observarse en los distintos niveles educativos, incluida la enseñanza universitaria, las serias dificultades de algunos estudiantes para poder realizar un aprendizaje significativo, en general les resulta difícil proponer razonamientos propios y/o resolver problemas. También es importante destacar lo difícil que resulta a los docentes despertar el interés de los alumnos en la enseñanza.

La Teoría de Grafos es un tema avanzado a nivel universitario que no se encuentra en las currículas escolares y que permite realizar análisis y razonamientos muy interesantes, algunos conceptos de esta teoría pueden ser introducidos en alumnos de nivel primario y/o secundario pues no necesita contar con una base matemática importante. Con el fin de determinar si sería interesante enseñar dicho tema en distintos niveles educativos, se ha llevado a cabo una investigación de tipo cualitativa con alumnos de entre 11 y 14 años, la misma fue el trabajo de tesis de la Ing. Teresa Braicovich de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas, orientación matemática (Universidad Nacional del Comahue), el mismo se titula

“Introducción de Grafos en el Tercer Ciclo de la Educación General Básica” y fue dirigido por el Dr. Claude Gaulin de la Universidad de Québec (Canadá).

En este trabajo de tesis se introdujo a alumnos del Tercer Ciclo de la Educación General Básica (E.G.B. 3) en la temática grafos con el objetivo de determinar si esto ayuda a alcanzar algunos de los objetivos de la currícula correspondiente. El mismo fue desarrollado mediante el análisis de experiencias realizadas con alumnos de E.G.B. 3 de cuatro establecimientos educacionales públicos de la provincia de Río Negro, uno de radio céntrico, uno de radio periférico, uno de zona rural y otro de gestión privada. Además fueron realizadas entrevistas personales a un grupo de niños de este último establecimiento al año de haber finalizado la experiencia y también se dictó un taller a docentes de matemática en la III Conferencia Argentina de Educación Matemática (Universidad Nacional de Salta. Año 2003).

El objetivo propuesto al realizar esta investigación fue determinar, de manera experimental, si el iniciar a los alumnos de este ciclo en la temática grafos, permite alcanzar algunos de los objetivos de la currícula correspondiente, específicamente si esta inclusión hace que los alumnos: realicen razonamientos matemáticos típicos de la matemática discreta, a partir de actividades en las cuales deben intuir, explorar, descubrir, plantear hipótesis y corroborarlas o no, esto siempre mediante justificaciones correctas y adecuadas a sus edades, sean capaces de utilizar a los grafos como “organizadores” para facilitar la comprensión y por lo tanto el aprendizaje, realizando representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas y si el tema resultaba motivador para los alumnos. Durante las actividades se trabajaron problemas que no sean una mera ejercitación rutinaria, sino aquellos que hagan movilizar los conocimientos previos y engendrar nuevos para lograr resoluciones correctas.

Los instrumentos de evaluación en esta investigación fueron: las observaciones de las clases, las producciones de los alumnos, las opiniones de los docentes asistentes al taller y también de los que se encontraban a cargo de los grados en los cuales se desarrollaron las distintas experiencias. Por supuesto también se tuvieron en cuenta para realizar el análisis son las entrevistas realizadas a los alumnos luego de concluidos los encuentros mantenidos.

Las conclusiones de las actividades realizadas fueron que la introducción del tema grafos hace que los alumnos desarrollen las capacidades de abstracción y de razonamiento matemático, realicen representaciones y modelizaciones de situaciones cotidianas y también que encuentren relación entre la matemática y problemas de la vida real. Cabe aclarar que además se notó a los alumnos muy motivados en las distintas experiencias realizadas. Todo esto se evidenció a partir de las observaciones de clases, de las producciones de los alumnos, de los comentarios de los docentes y también a partir de las encuestas y entrevistas que fueron hechas a los niños.

La finalidad de este taller es poder transferir este tema a los asistentes, ya sean docentes en formación o en ejercicio. Se trabajarán distintos conceptos de la temática en cuestión, con actividades con una fuerte componente procedimental, se buscará que los propios asistentes sean quienes construyan el conocimiento, esto por supuesto, eligiendo actividades adecuadas a tal fin.

II) PERTINENCIA DE LA PROPUESTA

En matemática discreta se trabaja con conjuntos finitos de objetos, lo que incluye tópicos y técnicas de cada día de la vida, esta rama de la matemática se desarrolló rápidamente adquiriendo gran importancia durante las últimas cuatro décadas y es utilizada para la toma de decisiones en nuestra sociedad, lo que hace notar a los estudiantes la relevancia de la matemática en el mundo real. El tema de matemática discreta con el cual se trabajaría en este taller, como ya se dijo, es la teoría de grafos, el primer artículo referido a este tema apareció en 1736 y fue escrito por Leonhard Euler. Esta teoría en sus comienzos se ocupaba principalmente de pasatiempos y rompecabezas, sin embargo, avances recientes en la

matemática y especialmente en sus aplicaciones la han impulsado en gran medida, actualmente es una rama de la matemática que se encuentra en pleno auge.

Ya en el siglo XIX se usaban los grafos en áreas como en circuitos eléctricos o los diagramas moleculares, en la actualidad estos son una herramienta natural y tienen muchas aplicaciones a cuestiones de carácter práctico: emparejamientos, problemas de transporte, flujo en redes, programación, entre otros y además está presente en campos tan dispares como la economía, la psicología y la biología.

Grafos y su potencial educativo

Puede establecerse, a modo de síntesis, que existen distintos argumentos para pensar que sería positivo introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los programas escolares. En el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997) se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando distintos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada porque les da la posibilidad de un nuevo comienzo.

III) CONTENIDOS A DESARROLLAR

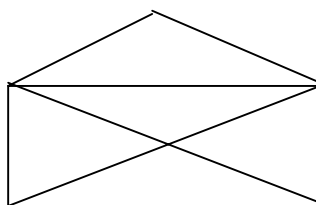
Los temas con los cuáles se trabajaría en el taller se presentan a continuación, junto a ciertos conceptos que se considera pertinente aclarar:

I. Caminos Eulerianos:

El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) escribió el primer artículo científico relativo a grafos, el que apareció en San Petersburgo, donde a partir de un problema concreto se hace la pregunta *¿en cuáles grafos se puede encontrar un camino cerrado que recorra todas las aristas una sola vez?* Esta pregunta termina dando origen a los dos siguientes teoremas:

- *Un grafo conexo con todos sus vértices de grado par contiene un camino cerrado que pasa una y sólo una vez por cada una de las aristas y es llamado camino euleriano cerrado.*
- *Un grafo conexo contiene un camino S_{ab} que pasa una sola vez por cada arista si y sólo si a y b son los únicos vértices de grado impar y es llamado camino euleriano abierto.*

El problema euleriano está relacionado directamente con el de las figuras unicursales, que son las que pueden ser recorridas de un solo trazo sin repetir segmentos. Un entretenimiento muy conocido y relacionado con este concepto es el comúnmente denominado: "figura del sobre", que se presenta a continuación:



Grafo que representa al juego del sobre

Como en este grafo hay sólo dos vértices de grado impar, existe camino euleriano abierto, para dibujar la figura sin levantar el lápiz ni repetir aristas debe comenzarse el trazado en uno de los dos vértices inferiores y finalizar en el otro.

II. Lema del apretón de manos:

Es un importante resultado dentro de la teoría de grafos, que se debe también al matemático suizo Leonhard Euler, que dice: “*en cualquier grafo la suma de los grados de los vértices es par, es decir que en cualquier grafo existe un número par de vértices de grado impar*”.

III. Grafos planares:

Son aquellos grafos que pueden dibujarse en el plano de manera que sus aristas sólo se corten en vértices del grafo. En los grafos planares conexos la diferencia entre la suma del número de vértices y de regiones y el número de aristas es igual a 2 (vértices + regiones – aristas = 2).

Este concepto es el correspondiente al conocido pasatiempo en el que se pregunta si es posible proveer de luz, agua y electricidad, a tres casas, de forma tal que las respectivas redes de distribución, supuestas en un mismo plano, no se intersecten. Contestar a esta pregunta equivale a determinar si el grafo determinado es planar, como el mismo no lo es, se puede afirmar que no es posible que las redes de distribución no se superpongan.

IV. Coloreo de grafos:

Un grafo es coloreado de manera tal que a vértices adyacentes correspondan colores diferentes, el número mínimo de colores con el que puede ser coloreado es denominado el número cromático del grafo. Es importante destacar que para colorear cualquier grafo planar es suficiente con cuatro colores.

El problema que parece haber dado origen a este tema es el mencionado por Moebius en 1840 y es consecuencia de una hipótesis de los fabricantes de mapas, que dice: “*Supuesto que cada país está constituido por una única región conexa y que toda frontera entre países está formada por arcos de curva (no las hay constituidas por un solo punto) todo mapa sobre un plano, o equivalentemente sobre la superficie de una esfera, puede colorearse utilizando a lo sumo cuatro colores y de forma que países limítrofes tengan colores distintos*”. Este problema tuvo en vilo por más de un siglo a los más famosos matemáticos del mundo, recién fue demostrado en 1976 por Appel y Haken.

V. Grafos bipartitos:

Son aquellos grafos en los cuales el conjunto de vértices puede descomponerse en dos subconjuntos disjuntos A y B , tales que sólo hay aristas entre A y B . Todo grafo bipartito puede colorearse con 2 colores.

El grafo determinado en el problema mencionado en el punto III es bipartito, cada uno de los tres vértices que representan a las casas está unido con cada uno de los tres vértices que representan a los servicios.

VI. Grafo completo:

Un grafo es completo cuando cada vértice está relacionado por exactamente una arista con todos los demás. El número cromático de un grafo completo de n vértices es igual a n .

VII. Grafo valuado:

Cuando a cada arista del grafo se le asocia un peso o valor.

VIII. Árbol:

Son grafos conexos que no tienen ciclos. En los árboles de n vértices hay siempre un número igual a $(n-1)$ aristas. El concepto de árbol surgió en estudios sobre redes eléctricas y también en otros referidos a química, esto fue aproximadamente 100 años después de la aparición del primer escrito de Euler, el que fuera mencionado en el punto I. En la actualidad tiene muchas aplicaciones en algoritmos para computación.

IX. Árbol minimal cubriente de G :

Es el árbol de menor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo G .

X. Árbol maximal cubriente de G :

Es el árbol de mayor valor o peso que contiene a todos los vértices del grafo G .

XI. Camino hamiltoniano:

Es un recorrido que pasa una y solo una vez por cada uno de los vértices del grafo.

Este último tema es aún hoy un problema abierto, pero es importante que los docentes, sobre todo del polimodal, cuenten con herramientas de este tipo. Cabe aclarar que los alumnos no necesitan una base matemática importante para poder comprenderlo y de esta manera los estudiantes tienen una visión distinta de la matemática, pues tienen la posibilidad de saber que no está “*todo resuelto*” en esta disciplina, creencia que, en general, es muy fuerte en ellos.

IV) METODOLOGÍA

El propósito de esta propuesta es la de presentar una serie de actividades a resolver con herramientas de la Teoría de Grafos, las que pueden ser llevadas al aula por el docente, por supuesto con la dificultad acorde al nivel en que dicta sus clases.

Como el tiempo de desarrollo del taller no es demasiado extenso, la idea es generar en los asistentes la inquietud de investigar y estudiar el tema, por lo que se prepararon actividades que los motiven a continuar en esa dirección. Para que esto sea efectivamente provechoso se ofrecerá toda ayuda a futuro, mediante el contacto con los encargados del taller.

Algunas actividades a proponer

A continuación se presentan ciertas pautas a tener en cuenta para las actividades que se propondrían en el taller, esto atendiendo a la flexibilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje:

- Comenzar el taller analizando en conjunto el prólogo del libro "*Matemática 1. Iniciación a la creatividad*" de Luis Santaló, que dice: *... "Como los alumnos de hoy no son los mismos que los de ayer y las necesidades para poder actuar eficazmente en el mundo actual tampoco son las mismas, es natural que la educación matemática deba estar en continua evolución y que los educadores deban ir ajustando sin pausa la forma y el fondo de sus enseñanzas, para mantener a la escuela acorde a la calle de manera que el alumno no encuentre demasiada discontinuidad entre lo que oye en el aula y lo que encuentra y ve en su casa y en la calle"....*
- Sin definir la estructura de grafo, se planteará a los asistentes una situación problemática que pueda ser modelizada utilizando grafos y se les pedirá que hagan un esquema de la misma, con la finalidad que surja a partir de los distintos esquemas que realicen el concepto de grafos.
- Dar un listado con distintos conceptos de la teoría de grafos, por ejemplo: vértice, conexo, nodo, arista, distancia, ciclo, grafo valuado y pedir que ellos “*definan*” los mismos, esto por supuesto de manera intuitiva, para luego sí presentar las definiciones formales correspondientes.
- A medida que se dan los contenidos, mencionar las distintas motivaciones históricas del surgimiento de esta teoría, haciendo especial referencia a los grandes problemas de la misma, a saber: camino euleriano, camino hamiltoniano, árboles, coloreo y planaridad. Se hará hincapié en que la historia debería formar parte, necesariamente, de los conocimientos de cada docente en todos los niveles, no sólo con la intención de que la utilice como instrumento en su propia enseñanza, sino también porque proporciona una visión verdaderamente humana de la ciencia y por ende permite entender mejor las distintas correlaciones existentes.
- Dar actividades que no sean una mera ejercitación rutinaria, sino aquellos que hagan movilizar los conocimientos previos y engendrar nuevos para lograr resoluciones

correctas, haciendo que los propios asistentes construyan el conocimiento. Entre otras, se trabajarán las situaciones planteadas en el punto III.

- Se hará que los docentes hallen algoritmos para encontrar árboles, árboles minimales cubrientes y árboles maximales cubrientes, esto a partir de situaciones concretas que les serán presentadas.
- Se pedirá a los docentes que busquen distintas situaciones que puedan ser representadas utilizando grafos, se hará una puesta en común de las mismas, creando un ambiente propicio de interacción. Se analizará en los casos propuestos los problemas que se podrían presentar y que podrían ser resueltos utilizando conceptos de esta teoría.
- Se hará que los docentes trabajen de manera individual en algunas situaciones y de manera grupal en otras, consultando todo lo que consideren necesario, para lo que se contaría con 3 personas a cargo del taller.
- Presentar un sucinto detalle de la investigación realizada, tanto de las experiencias áulicas, como de los resultados de las encuestas y entrevistas llevadas a cabo y también de las conclusiones a las cuales se arribó. Esto se hará con la finalidad de intercambiar opiniones sobre la introducción de grafos en las distintas currículas.
- Por último, cerrar el taller con el prólogo del libro "*Introductory Graph Theory*" de G. Chartrand (1985), el que se transcribe a continuación: "*Escribí este libro con varios objetivos: enseñar al lector algunos de los temas vigorosos y excitantes del campo de la teoría de grafos, mostrar que los grafos son aplicables en una gran variedad de campos, dentro y fuera de la matemática, incrementar los conocimientos de los estudiantes y facilitar las demostraciones o pruebas matemáticas y por último no por ser lo menos importante para que disfruten con la matemática*". La idea es analizar el mismo y compartir, o no, la opinión del autor.

V) BIBLIOGRAFÍA

- APPEL, K. y HAKEN, W. 1989. "*La solución del problema de los cuatro colores*". Investigación y Ciencia. Número 15. Pags. 78-91. (Buenos Aires)
- AUSUBEL, D. 1978. "*Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*". (Trillas, México).
- BROUSSEAU, G. 1986. "*Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques*", en Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 N° 2.
- CANTO, F., VALDES, J., RUIZ CABELLO, S. (2007) *¿Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos?*. Revista UNION. Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM). Vol. 10.
- CORIAT, M. *Algunos usos escolares de los grafos*. (2004) Revista de Didáctica de la Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
- CHARTRAND, G. 1985. "*Introductory Graph Theory*". (Dover, Nueva Cork).
- CHIAPPA, R. 1989. "*Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos*". Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.
- GUZMÁN, M. 1984. "*Juegos matemáticos en la enseñanza*" Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.
- KENNEY, M. and HIRSH, C. 1991. "*Discrete Mathematics across the curriculum K12 Yearbook*". National Council of Teachers of Mathematics. (Reston, Virginia).
- MENENDEZ VELAZQUEZ, A. *Una breve introducción a la Teoría de Grafos*. (1998) SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Volumen 28.
- ORE, O. 1981. "*Graphs and their uses*". Mathematical Association of America. DLS-EULER (Editores. Madrid).

- *Principles and Standards for School Mathematics*. (2000) National Council of Teachers of Mathematics. (Reston, Virginia.)
- ROSENTEIN, J., FRANZBLAU, D., ROBERTS, F. Editores 1997. “*Discrete Mathematics in the Schools*”. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
- SANTALÓ, L: 1993. “*Matemática 1. Iniciación a la creatividad*”. (Kapelusz. Buenos Aires)
- The New Jersey Mathematics Curriculum Framework. Standard 14: Discrete Mathematics. (<http://dimacs.rutgers.edu/nj-math-coalition/framework.html>)
- WILSON, R. 1979. “*Introduction of Graph Theory*”. Longman. New York.
- CANTO, F., VALDES, J., RUIZ CABELLO, S. (2007) ¿*Conocía Sherlock Holmes la Teoría de Grafos?* Revista UNION. Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM). Vol. 10.
- MENENDEZ VELAZQUEZ, A. *Una breve introducción a la Teoría de Grafos*. (1998) SUMA: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Volumen 28.
- CORIAT, M. *Algunos usos escolares de los grafos*. (2004) Revista de Didáctica de la Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.