CB 22

DE LA INDUCCIÓN COMPLETA A LA INDUCCIÓN ESTRUCTURAL

José L. AGUADO

Facultad de Ciencias Exactas - Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires - Argentina
jaguado@exa.unicen.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: inducción, recurrencia, inducción estructural, conjuntos inductivos.

RESUMEN

El método de inducción matemática se enseña a los alumnos, principalmente de matemáticas y computación, desde su primer año de carrera universitaria.

Si el alumno de matemática o informática percibe que la construcción de un conjunto por inducción permite definir funciones recursivamente, le parecerá natural usar el Método de Inducción Estructural para demostrar propiedades en teoría de lenguajes o teoría de grafos.

Es deseable, entonces, conocer los fundamentos sobre los cuales se basa la inducción sobre los naturales de modo de poder comprender cómo funciona en el marco de otros conjuntos. En este trabajo exponemos algunos fundamentos que responden a preguntas como las siguientes: ¿De dónde viene este principio? ¿Por qué funciona?

1. INTRODUCCIÓN

Inducción: (Fil.) *Extraer, a partir de determinadas observaciones o experiencias particulares, el principio general que en ellas está implícito.*- (Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® 2005. © 1993-2004 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos).

En 1922 apareció el Círculo de Viena que propuso un modelo en el que la ciencia actúa mediante generalizaciones (proceso de inducción) a partir de los datos.

La visión de la ciencia del Círculo de Viena es llamada también *Concepción Heredada*. La idea es que la ciencia debe utilizar las teorías como instrumentos para predecir fenómenos observables y debe renunciar a buscar explicaciones (que es la función de la metafísica). Los integrantes del Círculo defendieron un criterio verificacionista que agrupaba los enunciados en dos clases:

1) Los enunciados con sentido, que son afirmaciones que pueden comprobarse empíricamente si son verdaderas o falsas.
2) Los enunciados sin sentido, cuya verdad o falsedad no puede comprobarse y se deben descartar.

Posteriormente, llegó Karl Popper con el *falsacionismo*. A diferencia del Círculo de Viena, para Popper la ciencia no es capaz de verificar si una hipótesis es cierta, pero sí puede demostrar si ésta es falsa. Según este punto de vista, la inducción no sirve: por mucho que se experimente nunca se podrán examinar todos los casos posibles. Pero basta con un solo contraejemplo para refutar y destruir una teoría.

Muchas ciencias utilizan como metodología la inducción empírica, afirmando la validez de una ley cuando se verifica en un gran número de casos particulares, seleccionados adecuadamente. Nadie, por ejemplo, ha verificado que todos los cuerpos que se hallan en la tierra librados a su propio peso caen en el vacío según la vertical del lugar; sin embargo nadie duda de la certeza de semejante ley.

La certeza de un teorema matemático se establece de manera totalmente diferente. Un método de demostración matemática que se usa en una infinidad de casos es el Principio de Inducción Matemática o Principio de Inducción Completa.

El principio de inducción sobre los naturales nos permite deducir que una propiedad es satisfecha por cada uno de sus elementos.

Según nuestra experiencia, a los alumnos les resulta difícil entender cuándo se puede aplicar este método de demostración y cuándo no. Posiblemente a muchos no les queda claro como método en sí mismo.

Las razones para que esto suceda pueden ser varias, pero las más clásicas son:

1) En los cursos de Álgebra se enseña en forma exclusiva a partir de ejercicios de demostración de fórmulas cerradas para sumas de términos de una sucesión. El estudiante asocia sumatoria con inducción completa y hasta ahí no está mal, pero muchas veces supone que sumatoria es una unidad del programa de estudios y que inducción no lo es.
2) En los cursos de Cálculo, la inmadurez del alumno en lo tocante a técnicas de acotación complica de manera dramática la comprensión del método. En nuestra opinión, un primer curso de Cálculo es el peor contexto para aprender el método de inducción.

Por otro lado, en Ciencias de la Computación el mecanismo inductivo se utiliza ampliamente sobre conjuntos de diversa naturaleza y no solamente sobre los números naturales. Para poder extrapolar el procedimiento inductivo efectuado en $\boldsymbol{N}$, es conveniente definir a los números naturales de manera abstracta, es decir formular un conjunto de axiomas que establecen las propiedades mínimas que un conjunto debe obedecer para poder llamarse “el conjunto de los números naturales”.

La construcción de los números naturales a partir de los axiomas de Peano contiene al Método de Inducción Completa. Luego es posible generalizar a la Inducción Estructural, tal como se implementa en Lógica Computacional. Los profesores de un primer año de matemática en carreras científicas no necesitan ser especialistas en Lógica o Teoría de la Computación. Así, no necesitan estudiar en profundidad textos como [1] o [3].

Nuestro objetivo es describir someramente algunos aspectos fundacionales de los procesos inductivos y recurrentes en matemática, a fin de ofrecer a los docentes que se deben encargar de enseñar los rudimentos del tema, un punto de partida para diseñar actividades didácticas en inducción y recurrencia. Para “echar de ver” la formación que en el tema se espera de alumnos de informática (¡y matemática!) en años más avanzados, hemos extraído los problemas 5.2 y 5.3 que siguen del estupendo libro *Concrete Mathematics* ([6]). Los autores explican que *concrete* se adoptó como una mezcla de *continuous* y *discrete mathematics*.

2. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales ***N***, como subconjunto de ***R***, está definido por: $\boldsymbol{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ donde 2=1+1,3=1+1+1=2+1, etc.

Observando la definición del conjunto anterior cabe preguntarse si esta definición es por extensión o por comprensión. Como sabemos, todo conjunto tiene una definición por comprensión: la tautológica. Pero si ponemos $\boldsymbol{N}=\{n\in \boldsymbol{R}: n\in \boldsymbol{N}\}$ no ganamos nada. Algunos autores consideran que la notación $\{1,2,3,\ldots\}$ es por extensión, aunque podría objetarse que no están listados todos los naturales. Pero la ley de generación de los elementos de ***N*** es clara, ya que cada uno de ellos se obtiene sumando el 1 una cierta cantidad de veces y por la forma de generar los elementos de este conjunto, siempre se está en condiciones de probar, luego de un número finito de etapas, que el número 2^{500} digamos, pertenece al conjunto ***N***. Precisamente, los números naturales son la versión matemática del concepto "número finito de veces" (sea lo que sea que esto signifique para filósofos, filólogos, epistemólogos o matemáticos). Son usados para dos propósitos fundamentalmente: para describir la posición de un elemento en una sucesión ("el 9º mandamiento") lo que lleva al concepto de ordinal, y para especificar el tamaño de un conjunto finito ("9 vidas"), lo que lleva al concepto de cardinal. En el mundo de lo finito, estos dos conceptos son coincidentes: los ordinales finitos son iguales a los cardinales finitos. Cuando nos movemos más allá de lo finito, ambos conceptos no coinciden.

Una suma de dos números que son sumas de 1's es de nuevo una suma de 1's por la propiedad asociativa de la suma de números reales:

$$n+m=\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{n\,veces}+\underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{m\,veces}$$

Por lo tanto en ***N*** se verifica la ley de cierre para la suma y se deduce que la operación suma de naturales cumple las propiedades de asociatividad y conmutatividad.

De la misma manera, usando la propiedad distributiva de los números reales se ve que el producto de naturales es un natural. También para el producto de naturales vale la asociatividad, conmutatividad y existencia de neutro. Finalmente también vale la propiedad distributiva en ***N***.

Es usual definir $\boldsymbol{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ que es el conjunto de números naturales con el agregado del 0. Los elementos de $\boldsymbol{N}_0$ se llaman *números enteros no negativos*. Observar que en $\boldsymbol{N}_0$, valen todos los axiomas para la suma y el producto que valen en ***N***, y también el axioma de existencia de neutro para la suma.

El siguiente principio es válido en ***N***, con el orden usual heredado del orden en los números reales.

Principio de Buena Ordenación (***PBO***) *Cualquier subconjunto de* ***N*** *no vacío, tiene un elemento mínimo* (*llamado también primer elemento*).

Usando el PBO se puede demostrar el:

Teorema 2.1 *Entre* 0 *y* 1 *no hay ningún número natural.*
Demostración. Supongamos que existe un número $x \in \boldsymbol{N}$ tal que $0 < x < 1$. Entonces el conjunto $\{x \in \boldsymbol{N} : 0 < x < 1\}$ es no vacío y por el PBO este conjunto tiene un elemento mínimo. Sea m tal elemento, entonces $0 < m < 1$. Como en particular es $0 < m$ se tiene, multiplicando la desigualdad anterior por m, que $0 < m^2 < m$. Siendo $m \in \boldsymbol{N}$, se tiene que $m^2 \in \boldsymbol{N}$ y que $0 < m^2 < m < 1$, contradiciendo que m es mínimo.

La utilización del PBO para probar propiedades sobre ***N*** siempre sigue el mismo lineamiento: Se supone, por el absurdo, que la propiedad P es falsa para algún natural y se define $A = \{n : P(n) \textit{ es falso}\}$. Luego se aplica el PBO obteniendo un elemento mínimo m y se procede a llegar a un absurdo a partir de ello (generalmente construyendo un elemento más chico que m tal que P es falso allí).

3. LA SUCESIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES

La caracterización de los naturales que sigue fue propuesta por Giuseppe Peano en 1889. Esta caracterización, a partir de axiomas, sirve para deducir otras propiedades.

Definición 3.1 (***Axiomas de Peano***) *El conjunto de los números naturales* ***N****, el elemento 1 de* ***N*** *y la función* $suc : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ *verifica los siguientes axiomas*:
Axioma I. $\operatorname{Im}(suc) \subset \boldsymbol{N} - \{1\}$, es decir $suc(n) \neq 1$ para todo $n \in \boldsymbol{N}$.
Axioma II. Si $n,m \in$ N y $suc(n) = suc(m)$, entonces $n = m$ (i.e. suc es inyectiva).
Axioma III. Sea $A \subset \boldsymbol{N}$. Supongamos que
1. $1 \in A$ y
2. $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$

Entonces $A = \boldsymbol{N}$

Puede definirse una *estructura de Peano* como una terna (***N***, 1, *S*) donde ***N*** es un conjunto, 1 un elemento de ***N*** y *S* una operación unaria sobre ***N*** que satisface los tres axiomas de Peano. Luego se prueba que el conjunto $\boldsymbol{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ con S la función $S(n) = n + 1$ es una estructura de Peano, ya que ponemos $2 = S(1), 3 = S(2)$, etc. Finalmente, se prueba que cualquier par de estructuras de Peano son isomorfas, es decir, son esencialmente indistinguibles.

Sobre estas propiedades, se define la suma como:

i). $n+1 = S(n)$, para cada $n \in \boldsymbol{N}$
ii) $n + S(m) = S(n+m)$ siempre que n+m esté definido.

También puede definirse el producto de manera semejante.

Concluimos que los axiomas de Peano efectivamente caracterizan a los números naturales.

Definición 3.2 Una *sucesión de elementos de un conjunto A* es una función $f : \boldsymbol{N} \to A$ que a cada $n \in \boldsymbol{N}$ le asigna un elemento $f(n)$ en el conjunto A.

Por ejemplo si A es el conjunto de los naturales pares (los naturales que son múltiplos de 2) la función $f(n) = 2n$ permite mirar a los naturales pares como una sucesión. La función $f(n)=2n$ puede graficarse así:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots \end{array}$$

Como los números de la fila superior son siempre los mismos, podemos escribir sencillamente 2, 4, 6, 8, 10,…omitiendo la fila superior. Es convención universal usar la notación más práctica siguiente: $a_n = f(n)$, es decir $a_1 = f(n), a_2 = f(2),\ldots$ con lo cual las sucesiones se describen $a_1, a_2, \ldots$. Lo llamaremos el recorrido sugerido de la sucesión. También se dice que a_n *está indexada por los números naturales*. Con estas convenciones la manera usual es definir las sucesiones dando la ley del término general poniendo a_n = *definición en función de n*, que como veremos pueden ser definiciones de forma muy diversa, incluyendo definiciones por recurrencia.

Ejemplos 3.3

1) Sean a y k números reales que se eligen de manera arbitraria y $\forall n : a_n = a + (n-1)k$. El recorrido sugerido es $a, a+k, a+2k, \ldots$. Esta sucesión se llama *la progresión aritmética de razón k*.

2) $\forall n \in N : a_n = q^{n-1}$ donde q es un número real no nulo fijo. El recorrido sugerido es $1, q, q^2, q^3, \ldots$

Observar que si $q = 1$, obtenemos una sucesión constante. En realidad si $q = 0$, el único valor de la sucesión que no está definido es a_1. Esta sucesión se llama *la progresión geométrica de razón q*.

Observación 3.4 Los puntos suspensivos "…", llamados *el etcétera matemático*, se colocan cuando se sabe en cada caso, qué los sustituye si se desea continuar y, generalmente a través de la información que se obtiene por conocer los elementos anteriores. Por ejemplo $\{1,2,3,\ldots\} = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Mientras esté clara la ley de generación se considera lícito el uso de "…" para sugerir los restantes elementos del conjunto. El recorrido sugerido $a_1, a_2, a_3, \ldots$ no contiene toda la información sobre la sucesión en tanto no se conozca la función *f* o su ley de generación.

La mayoría de los test de CI incluyen preguntas de este tipo: "Escriba el número que sigue en 1, 10, 19,…". En este caso, la respuesta es, fácilmente, 28, desde que 1, 10, 19, son los 3 primeros términos del recorrido sugerido de una progresión aritmética de razón 9, definida por y $a_1 = 1$ y $\forall n \geq 1 : a_{n+1} = a_n + 9$. Pero también, la respuesta podría ser 100, puesto que para la sucesión definida por $b_n = 16\text{-}35n + 24n^2\text{-}4n^3$ se tiene que $b_1 = 1, b_2 = 10, b_3 = 19, b_4 = 100$, como puede comprobarse.

Además se ve que $\mathrm{a}_5 = 37$ y que $\mathrm{b}_5 = -59$. Es decir, ambas sucesiones son distintas.

Convención 3.5 En muchos casos es útil comenzar las sucesiones desde a_0 en lugar de a_1, esto significa que tratamos con funciones $f : \boldsymbol{N}_0 \to A$.

Por ejemplo en 7), la progresión geométrica q^{n-1} comenzando desde $n = 1$, tiene el mismo recorrido que la progresión geométrica q^n comenzando desde n=0.

En general, es fácil ver que dada una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que comienza con $n = 1$, es posible definir una sucesión $b_0, b_1, b_2, \ldots$ por $\forall n \in \boldsymbol{N}_0 : b_n = a_{n+1}$ y, recíprocamente, dada la sucesión $b_0, b_1, b_2, \ldots$ se obtiene $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definiendo $\forall n \in \boldsymbol{N} : a_n = b_{n-1}$. Ambas sucesiones toman exactamente los mismos valores del conjunto *A*. La elección puede residir en la comodidad de definición.

4 PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA

El principio de inducción matemática (o inducción completa) establece lo siguiente:

Principio de Inducción Completa (**PIC**)
Sea $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ una sucesión de proposiciones matemáticas y sea que:

i) La proposición P_1 es verdadera
ii) Para cada *k* se verifica que si P_k es verdadera entonces P_{k+1} es verdadera.

Entonces P_n es verdadera para todo *n*.

Este principio se acepta sin demostración cuando se considera ***N*** como un concepto primitivo. Puede justificarse usando la axiomática de Peano, ya que si consideramos el subconjunto de naturales *K* para los cuales P_n es verdadera, entonces $1 \in \mathrm{K}$ por i) y por ii) si $n \in K$ entonces $n+1 \in K$; luego por el Axioma III de Peano, debe ser *K*=***N***.

La proposición P_k de ii) que se supone verdadera se llama la *Hipótesis Inductiva* (HI).

Es claro que se puede tener además una proposición P_0. En ese caso, se demuestra también para el caso *n*=0 por separado o se usa sencillamente en el PIC la cláusula i) La proposición P_0 es cierta.

Teorema 4.1 *El PIC puede demostrarse a partir del PBO.*
Demostración. Sea *S* el conjunto de los naturales *k* tal que P_k es falsa. Si *S* es no vacío, por el PBO, *S* tiene un elemento mínimo *m*. Claramente, $m \neq 1$, pues por la primera hipótesis de PIC P_1 es verdadera. Por lo tanto es m > 1. Asimismo P_{m-1} es verdadera (por definición de *m*) y, por la segunda hipótesis de PIC, obtenemos que P_m es verdadera. Esta contradicción muestra que *S* es vacío y que, por lo tanto P_n es verdadero para todos los naturales *n*.

Teorema 4.2 *El PBO puede demostrarse a partir del PIC.*
Demostración. Supongamos que el PIC es válido y sea *S* un subconjunto no vacío de ***N***. Veamos que *S* tiene un menor elemento. Sea que *S* no tiene un menor elemento. Sea $S^c = \boldsymbol{N} - S$ el complemento de S. Definimos $T = \{x \in \boldsymbol{N} : \text{para cada } y \leq x, y \in S^c\}$.
Entonces $1 \in S^c$ (pues si $1 \in S$, entonces 1 debe ser el menor elemento de *S*). Luego $1 \in T$.
Supongamos ahora que $k \in T$. Debido a la definición de *T*, esto significa que $1, 2, \ldots, k$ deben ser todos elementos de S^c.
Ahora, si $k+1 \in S$, entonces debe ser el menor elemento de *S* lo que no es posible ya que *S* no tiene un elemento menor. Por lo tanto $k+1 \in T$ y por el PIC debe ser *T* = ***N***. Esto significa que *S* es vacío lo que es una contradicción. Por lo tanto, *S* debe tener un menor elemento.

Existe una formulación equivalente del principio de inducción, que puede ser útil en algunos casos.

Principio de Inducción Fuerte (**PIF**)
Sea $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ una sucesión de proposiciones matemáticas y sea que:

i) La proposición P_1 es verdadera
ii) Para cada $k > 1$ se verifica que si P_j es verdadera para todo $j < k$ entonces P_k es verdadera.

Entonces P_n es verdadera para todo *n*.

Veamos un ejemplo de aplicación del PIF.

Teorema 4.3 *La proposición* P_n : *"$n + 2$ puede ser factorizada como producto de números primos" es verdadera para todo n natural*.
Demostración. El caso base ($n = 1$) es inmediato pues 2 es primo. Pasemos al caso inductivo. Supongamos que para un $k > 1$ se verifica que P_j es verdadera para todo $j < k$. Veamos que P_k es verdadera. Si *k* es primo concluimos de inmediato. Si *k* no es primo debe ser divisible por un número r con $1 < r < k$. Digamos que entonces $k = rs$. Dado que $2 \leq r$ y $s < k$, por HI tanto r como s puede escribirse como producto de números primos. Combinando estas factorizaciones obtenemos una factorización para *k*. Esto concluye la demostración.

Si bien es posible demostrar que el PIC y el PIF son equivalentes, es necesario presentar ambas formulaciones a los alumnos ya que:

I. El PIC es suficiente en la mayoría de los casos.
II. EL PIF se utiliza cuando no aparece una aplicación clara del PIC. Los ejemplos de aplicación del PIF suelen ser más elaborados y pueden requerir una mayor madurez en demostraciones por parte de los estudiantes.

En la bibliografía es posible encontrar lo que hemos llamado PIC como PIF, pero Principio de Inducción Matemática o Principio de Inducción Completa, significan lo mismo, para enfatizar que la validación de un teorema en matemática exige que la propiedad que éste afirma valga *para todos los elementos del conjunto* del que se trata.

5. RECURRENCIA

La particularidad del conjunto de naturales es que es infinito, pero cada elemento se genera sumando 1 cierta cantidad finita de veces. Los símbolos que usamos para designar a estas sumas y los nombres que les damos varían según las lenguas y culturas. Pero hay una idea posiblemente universal detrás de este concepto, que es la de idea de **recurrencia** (*Propiedad de aquellas secuencias en las que cualquier término se puede calcular conociendo los precedentes*-Biblioteca de Consulta Microsoft® Encarta® 2005. © 1993-2004 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.).

El método de definición recurrente es la de base de generación de sucesiones en matemática y en informática. Una vez fijada la sucesión de los números naturales, podemos definir por su intermedio, otras sucesiones de objetos cualesquiera.

Las definiciones por recurrencia se utilizan para definir sucesiones y se aplica un procedimiento copiado de los dos pasos del PIF.

Supongamos que queremos definir una sucesión a_n por recurrencia. Entonces se siguen los siguientes dos pasos:

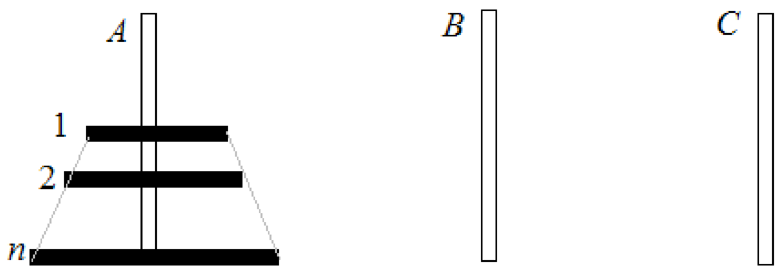
i) Se define a_1.
ii) Si suponemos definidos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entonces definimos a_{n+1}. Si con conocer a_n alcanza para definir a_{n+1} se adopta el esquema del PIC.

Entonces de nuevo, por el Axioma III de Peano, hemos definido a_n, para todo $n \in \boldsymbol{N}$.

Ejemplos 5.1
1) a_1, k son números reales que se eligen de manera arbitraria, $\forall n > 1 : a_n = a_{n\text{-}1} + k$. El recorrido sugerido es $a_1, a_1 + k, a_1 + 2k, \ldots$. Nuevamente obtenemos la progresión aritmética de razón *k* pero ahora definida por recurrencia.
2) $a_1 = 1, \forall n > 1 : a_n = na_{n\text{-}1}$. El recorrido sugerido es
$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ 5040,\ 40320,\ 362880,\ 3628800, \ldots$ Esta sucesión es *n*! (factorial de *n*).
3) a_1, a_2 son números reales que se eligen de manera arbitraria y $\forall n > 2 : a_n = a_{n\text{-}1} + a_{n-2}$. Por ejemplo, con $a_1 = a_2 = 1$, el recorrido sugerido es 1,1 , 2, 3, 5, 8,…. Esta sucesión se llama la *sucesión de Fibonacci*.

Ejemplo 5.2 La recurrencia ayuda a resolver el Problema de las Torres de Hanoi.
El bastante conocido juego de las torres de Hanoi es como sigue:

Se tienen *n* discos de diámetros todos distintos con agujeros en sus centros y tres pilares denominados *A*, *B* y *C* respectivamente. Originalmente los *n* discos se hallan anillados en el pilar *A*, el de mayor diámetro está más abajo de todos y de allí, hacia arriba todos en orden decreciente de diámetros.



El juego consiste en pasar a la misma pila en *C*, usando el pilar *B* como auxiliar, con una regla: nunca debe quedar un disco encima de uno de diámetro menor.

Evidentemente, si $n = 1$, pasamos el disco 1 directamente desde *A* hasta *C*. Si $n = 2$, pasamos el disco 1 desde *A* hasta *B*, el disco 2 desde *A* hasta *C* y luego el disco 1 desde *B* hasta *C*.

Ahora queremos averiguar dos cosas:

i) Un algoritmo para efectuar los pasos.
ii) Calcular $p(n)$, el número de pasos necesarios para transportar *n* discos.

Vemos que si $n = 1,\ 2$ un tal algoritmo existe y que $p(1) = 1$ y $p(2) = 3$.

Ahora bien, supongamos que tenemos un algoritmo para transportar n discos de un pilar a otro, usando un tercero como auxiliar. Y queremos transportar $n+1$ desde A hasta C. Procedemos así:

1º Transportamos los n discos de más arriba desde A hasta B, usando el pilar C como auxiliar. Hasta aquí hemos efectuado $p(n)$ pasos.
2º Pasamos el disco $n+1$ desde A hasta C. Hasta aquí hemos efectuado $p(n)+1$ pasos.
3º Transportamos los n discos desde B hasta C, usando el pilar A como auxiliar. Y hemos efectuado en total $p(n)+1+p(n)=2p(n)+1$ pasos.

Luego tenemos el algoritmo buscado y el número de pasos requerido para este algoritmo verifica la relación de recurrencia $p(n+1)=2p(n)+1$ con $\mathrm{p}(1)=1$.
Ahora se trata de hallar una expresión para $p(n)$
Analizando los primeros términos del recorrido de $p(n)$ vemos que es 1, 3, 7, 15,…, de donde conjeturamos que $p(n)+1=2^n$ o sea $p(n)=2^n\text{-}1$. Hasta ahora es una conjetura, pero podemos demostrar que $p(n)=2^n\text{-}1$ para todo natural n, usando inducción.
Como $p(1)=1$ y $2^1\text{-}1=1$, para $n=1$ la identidad es cierta. Supuesta verdadera para n dado, tenemos que $p(n+1)=2p(n)+1=2(2^n\text{-}1)+1=2^{n+1}-1$.

Una leyenda asegura que en algún monasterio de Oriente, una congregación de monjes tienen la misión de efectuar el pasaje de 64 discos de oro utilizando tres obeliscos de diamante. Comenzaron al formarse el Universo y cuando acaben será el fin. Suponiendo que los monjes trabajan de manera continua y que tardan 1 segundo en efectuar un paso, el número de segundos que dure este Universo será $p(64)=2^{64}-1=8446744073709551615$ segundos. Considerando que en un año (no bisiesto) hay 3600×24×365=31536000 segundos, deducimos que el Universo debe durar aproximadamente $8446744073709551615/31536000 \approx 2.6784\times10^{11}$ años como mínimo.

Ejemplo 5.3 Una variante más sencilla del conocido problema de Josephus (ver [2] por ejemplo) es arreglar n personas en una ronda y eliminar cada *segunda*. Veamos cómo se puede trabajar con recurrencia en esta variante del problema.

Con el objeto de hallar algún tipo de fórmula recurrente, llamemos $J(n)$ al número que ocupa el sobreviviente en una ronda de n personas. Aquí es útil hacer una tabla, usando papel y lápiz, para los primeros 10 naturales.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5

Lo primero que observamos de la tabla es que $J(n)$ parece ser siempre impar. De hecho, luego de la primera vuelta sobre la ronda se eliminan todos los que ocupan lugares pares. Cuando $n=2k$ es par, después de la primera vuelta sobre la ronda, se llega a una situación similar a la original con la mitad de personas: 1, 3, 5,…, $2k$-1. Es decir que si para calcular $J(k)$ partimos de la sucesión 1, 2, 3,…, k y la transformamos según la función $f(j)=2j-1$ como una nueva numeración de los integrantes, tendremos que $J(2k)=2J(k)-1$. Es decir $J(2n)=2J(n)-1$ para todo n. Entonces ya podemos extender la tabla de arriba, por ejemplo $J(20)=2J(10)-1=2\times5-1=9$ y $J(40)=2J(20)-1=17$, etc.
Cuando $n=2k+1$ es impar, en la primera vuelta la persona 1 se elimina, y los restantes k que quedan son 3, 5, 7,…, $2k+1$. De nuevo, si partimos de la sucesión 1, 2, 3,…, k para calcular $J(k)$ y le aplicamos la función $g(j)=2j+1$, obtenemos una numeración de los integrantes que

coincide con la que queda después de la primera vuelta aplicada a la sucesión 1, 2, 3,…, 2*k*+1. Entonces obtenemos $J(2n+1)=2J(n)+1$ para todo *n*.

Así, la recurrencia completa para $J(n)$ es:

$J(1)=1$

$J(2n)=2J(n)-1$ para todo *n*

$J(2n+1)=2J(n)+1$ para todo *n*

Usando estas fórmulas de recurrencia, podemos calcular *J*(*n*) para cualquier valor de *n*. Sin embargo, si *n* es muy grande, digamos $n=1000$, es posible que se requieran muchos pasos.

$J(1000)=2J(500)-1=2(J(250)-1)-1=\cdots$

Buscar una “forma cerrada” para *J*(*n*) es el próximo objetivo. Extendamos la tabla anterior un poco más.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J(*n*)	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Esto es más que interesante, parece que *J* vale 1 en las potencias de 2 y que entre cada dos potencias sucesivas aparece una sucesión de impares desde 1, de longitud el doble de la anterior. Así que si para un *n* dado ponemos

$$n=2^m+r \text{ con } 2^m \text{ la mayor potencia de 2 que no excede a } n$$

entonces la solución a nuestro sistema de recurrencias parece ser:

$$J\left(2^m+r\right)=2r+1 \text{ para } m\geq 0 \text{ y } 0\leq r<2^m$$

Esto es una conjetura, pero podemos probarla por inducción en m. Si $m=0$ resulta $r=0$ y *J*(1)=1 es verdadero. La etapa inductiva tiene dos partes, dependiendo que *r* sea par o impar. Si $m>0$ y $2^m+r=2n$ entonces, usando HI para *m*-1 tenemos:

$$J\left(2^m+r\right)=2J\left(2^{m-1}+\frac{r}{2}\right)-1=2\left(2\left(\frac{r}{2}\right)+1\right)-1=2r+1$$

Una comprobación similar se puede hacer para el caso *r* impar.

Ahora podemos calcular *J*(1000). Como $2^9=512$ y $2^{10}=1024$, ponemos

$$J(1000)=J\left(2^9+488\right)=2\times 488+1=977$$

Cuando una sucesión está definida por recurrencia puede o no existir una fórmula que exprese el término general, y aún cuando exista puede ser muy difícil calcular esa expresión. Desde el punto de vista computacional, parecería mejor tener una fórmula para calcular el término *n*-ésimo de una sucesión, ya que cuando la sucesión está dada por recurrencia, para calcular, digamos a_{100}, cualquier programa debe calcular sí o sí primero $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{99}$.

Las definiciones por recurrencia insumen mucha memoria y tiempo de máquina.

Un caso donde, con toda seguridad, es preferible usar la fórmula del término general y no la ley de recurrencia es el del Ejemplo 5.3.

Sin embargo, las fórmulas pueden involucrar el cálculo de número muy grandes para terminar dando números relativamente chicos en comparación a los obtenidos en cálculos intermedios.

Un ejemplo típico de esto son los coeficientes binomiales.

6. CONJUNTOS DEFINIDOS INDUCTIVAMENTE E INDUCCIÓN ESTRUCTURAL

La idea es la de construir un conjunto comenzando a partir de ciertos elementos básicos utilizando reglas que nos permiten armar elementos compuestos a partir de otros dados.

Definición 6.1 (***Definición inductiva de un conjunto***) Una *definición inductiva* de un conjunto *A* consiste en una colección de esquemas de reglas (abreviado esquemas). Cada esquema es de uno de los dos tipos: *básico* o *inductivo*.

Los esquemas básicos son aquellos que establecen incondicionalmente que ciertos elementos pertenecen al conjunto. Los esquemas inductivos son aquellos que establecen que un elemento, llamado *conclusión del esquema*, está en el conjunto si ciertos otros elementos llamados *hipótesis del esquema* están en el conjunto.

Los elementos de *A* son aquellos para los cuales puede mostrarse que pueden construirse a partir de un número finito de aplicaciones de esquemas.

Ejemplo 6.2 Definimos inductivamente al conjunto ***N*** del siguiente modo:
1. La expresión *uno* pertenece a ***N***.
2. Si *n* es una expresión en ***N***, entonces *suc*(*n*) pertenece a ***N***.
El conjunto ***N*** cuenta con los siguientes elementos {*uno*, *suc*(*uno*), *suc*(*suc*(*uno*)), *suc*(*suc*(*suc*(*uno*))), . . .}.

Ejemplo 6.3 Sea *V* un conjunto de nombres de variable, *C* un conjunto de constantes numéricas y $\{(,)\}$el conjunto de paréntesis. Definimos inductivamente el conjunto ARIT de expresiones aritméticas del siguiente modo:

1. Cada constante numérica en *C* pertenecen a ARIT.
2. Cada variable en *V* pertenece a ARIT.
3. Si e pertenece a ARIT, entonces (e) pertenece a ARIT.
4. Si *a* y *b* pertenece a ARIT, entonces *a* + *b* pertenece a ARIT.
5. Si *a* y *b* pertenece a ARIT, entonces *ab* pertenece a ARIT.

El Principio de Inducción Estructural permite demostrar propiedades *P* sobre conjuntos inductivos. En analogía con el PIC sobre ***N***, establece que para probar que *P* es verdadera para todos los elementos de un conjunto inductivo debe probarse:

1) *P* vale para todos los casos base determinados por los esquemas de reglas básicos, y
2) si una expresión *e* está construida en el conjunto inductivo utilizando un esquema de regla inductivo y elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, entonces debe probarse que si *P* es verdadero para cada a_i, entonces los es para *e*.

Principio de Inducción Estructural *Sea A un conjunto definido inductivamente y P una propiedad sobre los elementos de A. Supongamos que*
1. Para cada esquema básico en la definición de *A*, si *x* es introducido en *A* por la misma, entonces *P*(*x*) es verdadera.
2. Para cada esquema inductivo en la definición de *A*, si *P* es verdadera para cada hipótesis del esquema entonces *P* es verdadera para la conclusión del esquema.
Entonces, *P*(*x*) es verdadera para todo *x* en *A*.

Ejemplo 6.4
Sea *P*(*x*) la siguiente propiedad sobre los elementos de ARIT.

$P(e)$ estipula que la expresión e en ARIT tiene el mismo número de paréntesis que abren que los que cierran.

Para probar esto debemos ver que:

1. $P(n)$ es verdadera para toda constante numérica en n en C.
2. $P(v)$ es verdadera para toda variable v en V.
Aquí $P(c)$ y $P(x)$ son claramente verdaderas pues no tienen paréntesis.
3. Si $P(e)$ es verdadera, entonces $P((e))$ es verdadera.
Supongamos que $P(e)$ es verdadera. Entonces $P((e))$ es verdadera pues dado que e tiene el mismo número de paréntesis que abren y que cierran, esta condición se mantiene si se agrega un paréntesis que abre y otro que cierra.
4. Si $P(a)$ y $P(b)$ son verdaderas, entonces $P(a + b)$ es verdadera.
5. Si $P(a)$ y $P(b)$ son verdaderas, entonces $P(ab)$ es verdadera.
Estas afirmaciones son inmediatas porque no se agregan paréntesis.
Por lo tanto, apelamos al Principio de Inducción Estructural sobre ARIT para concluir que $P(x)$ vale para toda expresión x en ARIT.

7. CONCLUSIONES

La tendencia actual en la enseñanza del Álgebra en carreras científicas obliga a prestar atención a los procesos algorítmicos y de automatización. Al fin y al cabo vivimos en la era de la informática, es decir del tratamiento automático de la información por medio de computadoras. Una pregunta central en informática es:

¿Cuáles funciones son calculables por una computadora?

Naturalmente esta pregunta precede a la invención de las modernas computadoras y originalmente su formulación fue: ¿cuáles funciones son mecánicamente calculables?

La palabra mecánicamente aquí debe interpretarse como “sin pensar" o “automáticamente”.

En la actualidad, varias áreas del Álgebra hacen importantes aportes a la Lógica y Teoría de la Computación para contestar a esta pregunta.

No vamos a formalizar aquí el concepto de una función calculable. Solamente vamos a justificar su relación con los números naturales. De hecho podemos codificar una gran familia de tipos de objetos discretos como un número natural, o una sucesión de números naturales. Como un ejemplo, supongamos que se tiene una función de las palabras del alfabeto a los grafos. Podemos pensar en una palabra en el alfabeto como un número escrito en base 27 con a = 1, b = 2 y así sucesivamente. Un grafo con n nodos pensarse como un $\binom{n}{2}$-vector booleano (i.e. de 0 y 1) donde cada coordenada se corresponde con una arista, y va 1 si y sólo si la correspondiente arista está en el grafo. Por ejemplo si el grafo tiene 3 nodos, las posibles aristas son (1; 2); (1; 3) y (2; 3). Si el gráfico sólo contiene las aristas (1; 3) y (2; 3) lo codificamos como 011. Agregamos un 1 al principio y consideramos el resultado como un número escrito en notación binaria (nuestro ejemplo corresponde a ($(1011)_2 = 11$). Es fácil ver que esta asignación es una función biyectiva entre el conjunto de todos los grafos finitos y $\boldsymbol{N}$. Así una función con dominio en el alfabeto y co-dominio en los grafos puede ser representada como una función de los números naturales a los números naturales ¡Es decir una sucesión de números naturales!

Como en el caso de la relación entre el PBO en $\boldsymbol{N}$ y el principio de inducción, también aparece una relación entre buenos órdenes definidos en conjuntos inductivos y la inducción estructural, que ya aquí se llama inducción transfinita.

Para finalizar permítasenos enfatizar el beneficio pedagógico de introducir ejercitaciones sobre problemas que se resuelven con argumentos recurrentes. Por ejemplo los expuestos en los Ejemplo 5.2 y Ejemplo 5.3. En estos casos ayuda disponer de algún programa de matemática simbólica como MAXIMA (gratuito).

BIBLIOGRAFÍA

[1] Aczel, Peter. *Handbook of Mathematical Logic*, capítulo *An Introduction to Inductive Definitions*, 739–782. North-Holland Publishing Company, 1977.

[2] Aguado, José L., Rébora, Laura, Velázquez, María. *La Ronda de Josefo,* RELME XV, Universidad de El Salvador, Buenos Aires, Argentina, 2001.

[3] Barnes, D. W.; Mack, J. M. *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*. Springer Verlag. N. Y., 1975.

[4] Birkhoff, G, Mac Lane, S. *Álgebra Moderna*. Ed. Vicens-Vives Barcelona, 1963.

[5] Busby, R. C., Kolman, B. *Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1984.

[6] Grahan, R.L., Knutn, D.E., Patashnik, O. *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1988.

[7] Korfhage, Robert R. *Discrete Computational Structures*. Academic Press, INC, 1974.