

ANÁLISIS DE CONVERSIONES ENTRE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DE NÚMEROS COMPLEJOS

María A. AZNAR, María L. DISTÉFANO, Stella FIGUEROA, Emilce MOLER

Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional de Mar del Plata - Argentina
maznar@fi.mdp.edu.ar

Nivel Educativo: Educación Superior.

Palabras Clave: Registro gráfico, registro algebraico, conversiones, números complejos, errores.

RESUMEN

Este trabajo presenta una exploración, sistematización y caracterización de las dificultades que enfrentan los estudiantes al expresar algebraicamente las condiciones que caracterizan a un conjunto de números complejos representados gráficamente. Esta transformación que, de acuerdo con la Teoría de Registros Semióticos de R. Duval (2004) se denomina *conversión*, implica una coordinación entre representaciones semióticas producidas en distintos registros semióticos, en este caso entre el registro gráfico y el registro algebraico. Este tipo de transformación es reconocida por esta Teoría como una actividad cognitiva inherente a la conceptualización de los objetos matemáticos.

La investigación se realizó con alumnos que cursan la asignatura Álgebra de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Del análisis de los datos derivados de esta experiencia se observa que la habilidad de efectuar conversiones del registro gráfico al registro algebraico, en el tema estudiado, no está internalizada en los alumnos y esto proviene de diversos factores dado que requiere de un esfuerzo cognitivo superior. Teniendo en cuenta los obstáculos detectados, se formulan lineamientos que podrían darse en futuros abordajes didácticos abocados a dicha internalización que podrán ser base para futuras investigaciones.

INTRODUCCIÓN

El rol preponderante que tienen las representaciones en la actividad matemática ha sido estudiado y demostrado desde distintas corrientes teóricas de la psicología del aprendizaje y la didáctica de la Matemática, dado que las mismas están estrechamente vinculadas a la capacidad de otorgar significados, a la comprensión de conceptos y a las posibles modelizaciones de los problemas (Font, Godino & D' Amore, 2007). En este sentido, respecto del uso de las representaciones gráficas y del desarrollo de habilidades de visualización, se ha indagado sobre cómo el uso parcializado de estas formas de representación limita tanto los recursos en la resolución de problemas como la conceptualización de objetos matemáticos asociados (Hitt, 2003). La tendencia en la enseñanza tradicional ha sido la de otorgar más importancia al registro algebraico mientras que al registro gráfico se le ha dado un status inframatemático (Artigue, 1995). Este fenómeno se acentúa en la enseñanza del Álgebra donde, no se suele iniciar al alumno en el hábito de extraer datos a partir de un gráfico para

interpretarlos en el lenguaje del álgebra. Las conversiones que se proponen en la ejercitación de ciertos temas contemplan sólo los casos de pasajes del registro algebraico al gráfico, pero no en el sentido contrario, bajo la suposición de que son análogos, y que si un alumno es capaz de efectuar la transformación en un sentido también podrá hacerlo en el sentido contrario. Sin embargo esta suposición no tiene un correlato con prácticas cotidianas, pues para realizar las conversiones del primer caso, el alumno aplicando la fórmula o ecuación, obtiene un conjunto de pares ordenados que tiene sus correspondientes puntos en el plano, mientras que en el segundo caso, se requiere del alumno un esfuerzo cognitivo superior, pues debe descubrir cuáles son los rasgos del gráfico que caracterizan la representación y traducir esto a una ecuación o inecuación. La imposibilidad para concretar tales transformaciones genera dificultades en el aprendizaje, obstaculizando la conceptualización del objeto de estudio.

En este trabajo se presenta un análisis exploratorio de las dificultades que poseen los alumnos al realizar conversiones del registro gráfico al registro algebraico en el tema Números Complejos. Se indagó sobre los errores más frecuentes que se manifiestan al efectuar estas transformaciones, y se los caracterizó, clasificó y sistematizó (Aznar et al., 2009). Los alumnos que realizaron esta tarea de conversión ya habían cursado la unidad temática correspondiente a Números Complejos, del programa de la asignatura Álgebra de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Debe destacarse que entre las actividades que forman parte de la guía de trabajos prácticos del tema, los estudiantes habían resuelto numerosos ejercicios en los que debían representar gráficamente los números complejos que verificaran determinadas condiciones, expresadas simbólicamente, es decir que se habían entrenado en efectuar conversiones del registro algebraico al registro gráfico, pero no en el sentido contrario.

A continuación se describen las ideas centrales del marco teórico que sustenta este trabajo.

MARCO TEÓRICO

La Teoría de Registros Semióticos (Duval, 1998, 2004, 2006b) reconoce tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la *formación* de representaciones, el *tratamiento* (transformación efectuada dentro de un mismo registro) y la *conversión* (transformación efectuada entre distintos registros).

La *formación* de representaciones en un registro implica la selección de signos apropiados dentro del conjunto de signos del mismo, combinados de acuerdo a sus reglas de conformidad. Estas reglas se refieren esencialmente a: la determinación de unidades elementales, las combinaciones admisibles de dichas unidades y las condiciones de pertinencia y completitud de una representación de orden superior (Duval, 2004).

Los *tratamientos* y las *conversiones* están directamente vinculados a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformabilidad en otras representaciones. Particularmente, las conversiones resultan de un nivel de dificultad superior puesto que son transformaciones externas al registro de partida y con frecuencia no hay reglas que sistematicen o regulen su ejecución. Esta es una de las razones por las que “...la *conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos.*” (Duval, 2004, p.49)

Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, puesto que la habilidad de

efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, imprescindible para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Las conversiones que no son triviales ni inmediatas porque los elementos involucrados, es decir las *unidades significantes*, no están en correspondencia uno a uno, se denominan *no congruentes*. Este tipo de conversiones, como es el caso de las planteadas en este trabajo, requieren de especial atención en el proceso de enseñanza y aprendizaje y deben ser abordadas intencionalmente, dado que:

“...Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable observado en el aprendizaje de la Matemática, a todos los niveles y en todos los dominios; [...] la conversión, en los casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación movilizados, coordinación que nunca existe al inicio y que no se construye espontáneamente...” (D’Amore, 2005, p.32)

La identificación de las unidades significantes tanto en el registro de partida como en el de llegada, es condición necesaria para toda actividad de conversión y, por consiguiente para el desarrollo de la coordinación entre distintos registros de representación.

En la siguiente sección se presentan las características metodológicas referidas a la población y al material utilizado para el relevamiento de datos de este trabajo.

OBJETIVO

Realizar un análisis exploratorio de la capacidad que poseen los alumnos de efectuar conversiones de representaciones de conjuntos de números complejos desde el registro gráfico al algebraico.

METODOLOGÍA

La exploración se realizó con 100 alumnos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata, que cursan la asignatura Álgebra, en la cual ya se había terminado de dictar la unidad temática del programa correspondiente a Números Complejos.

Material

Se trabajó con un instrumento constituido por seis ítems. En cada ítem se presentó a los alumnos la representación gráfica de un conjunto de complejos con una característica común sobre el módulo, la parte real o el argumento tomando, en los tres casos, un único valor o un rango de valores. Esta característica común es la unidad significativa que los estudiantes debieron identificar en cada caso, para luego expresarla en forma de una ecuación o una inecuación en el lenguaje algebraico. Los ítems estuvieron estructurados de manera tal que se evalúan las conversiones tomando representaciones donde la unidad significativa a identificar es el módulo en el caso de los ítems (a) y (d), el argumento, en los ítems (c) y (e) y la parte real, en los ítems (b) y (f). Los gráficos correspondientes a cada ítem fueron ubicados en el instrumento de modo tal que no hubiera un orden que le sugiriera al alumno la unidad significativa a identificar.

Para valorar la validez de contenido del instrumento, es decir, la existencia de una adecuada correspondencia entre lo que se propone medir en los estudiantes evaluados, y lo que realmente miden los ítems propuestos en el instrumento, se recurrió al juicio de docentes titulares de cátedras del área Álgebra de la Universidad Nacional de Mar del Plata, en calidad de expertos.

Para determinar la confiabilidad, el instrumento fue administrado en una cohorte anterior, obteniéndose un coeficiente Alfa de Cronbach de 0,792, considerado aceptable para propósitos de investigación.

Los alumnos que lo resolvieron no recibieron ninguna formación específica en lo referido a la identificación de las unidades significantes en la representación gráfica de conjuntos de números complejos, ya sea en su expresión en forma binómica o en forma polar.

A modo de ejemplo, se presentan dos de los ítems del instrumento. En el Gráfico 1, correspondiente al ítem (a) del instrumento, se representan números complejos caracterizados por un único valor sobre el módulo; en el Gráfico 2, correspondiente al ítem (e) los complejos representados están caracterizados por los valores que toman sus argumentos dentro de un rango acotado.

Ítem (a)

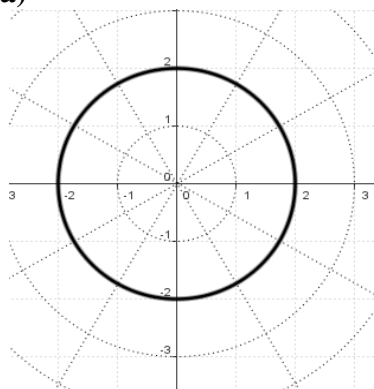
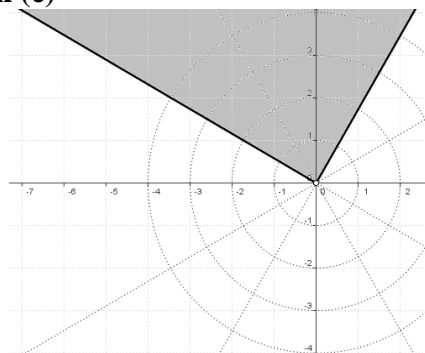


Gráfico 1. Representación de números complejos cuyos módulos toman un único valor fijo

Ítem (e)



Observación: $0+0i$ está excluido

Gráfico 2. Representación de números complejos cuyo argumento toma un rango de valores acotados

Procedimiento

El instrumento se administró durante una clase práctica de la asignatura. En esa instancia del dictado de la materia, ya se había trabajado en las dos clases anteriores con ejercitación, de la guía de trabajos prácticos correspondiente a la unidad Números Complejos de la asignatura, que contiene ejercicios cuya resolución involucra únicamente conversiones desde el registro algebraico al gráfico, es decir en el sentido inverso al que evalúa el instrumento.

El tiempo de administración fue aproximadamente de 15 minutos.

A continuación se muestran los resultados obtenidos de la administración del instrumento descrito anteriormente.

RESULTADOS

Al evaluar la resolución de los incisos se consideraron dos aspectos: el reconocimiento de la unidad significativa, esto es identificar cuál es y qué valor o valores toma, y la representación en el lenguaje algebraico de la relación entre unidad significativa y valores, de acuerdo con las reglas de formación de representaciones en dicho registro. La conversión se consideró correcta en las resoluciones en las que estos dos aspectos fueron apropiadamente abordados.

En la Tabla 1 figuran las características de los incisos del instrumento acompañados de los porcentajes de alumnos que resolvieron exitosamente la conversión correspondiente.

Característica del conjunto de complejos representados en el instrumento		Porcentaje de alumnos que realizaron la conversiones correctamente
Unidad significativa	Valores que toma	
módulo	único valor fijo	52%
parte real	único valor fijo	54%
argumento	único valor fijo	37%
módulo	rango de valores acotados	34%
parte real	rango de valores acotados	38%
argumento	rango de valores acotados	23%

Tabla 1. Porcentaje de alumnos que realizaron conversiones correctamente

Puede observarse que, en los casos en los que la unidad significativa toma un único valor, las resoluciones correctas apenas superan el 50%. Este porcentaje disminuye acentuadamente en los casos en que la unidad significativa toma un rango de valores sin alcanzar siquiera el 40%. Esta disminución en los porcentajes podría adjudicarse a una mayor dificultad en el reconocimiento de la unidad significativa y, en los casos en que la unidad es reconocida, a que la representación en el registro algebraico requiere expresar el rango de valores con dos condiciones en forma de inecuaciones.

En la Tabla 2 se presentan los porcentajes de resoluciones correctas, pero en este caso discriminados en los dos aspectos mencionados al inicio de la sección.

Valores	La unidad significativa toma un único valor			La unidad significativa toma un rango de valores acotados		
	Módulo	Parte real	Argumento	Módulo	Parte real	Argumento
Porcentaje de resoluciones correctas en la identificación de la Unidad Significante	60%	64%	46%	51%	53%	37%
Porcentaje de resoluciones correctas en la expresión en el lenguaje algebraico	54%	52%	28%	32%	36%	15%

Tabla 2. Porcentajes de resoluciones correctas en aspectos vinculados a la tarea de conversión

A partir de los datos de la Tabla 2 se construyeron los Gráficos 3 y 4 en los que puede compararse el desempeño de los alumnos en los dos aspectos analizados, para cada una de las unidades significantes. En el caso del Gráfico 3, se comparan aquellos ítems en los cuales la unidad significativa toma un único valor fijo, mientras que en el Gráfico 4 ésta toma un rango de valores acotados.

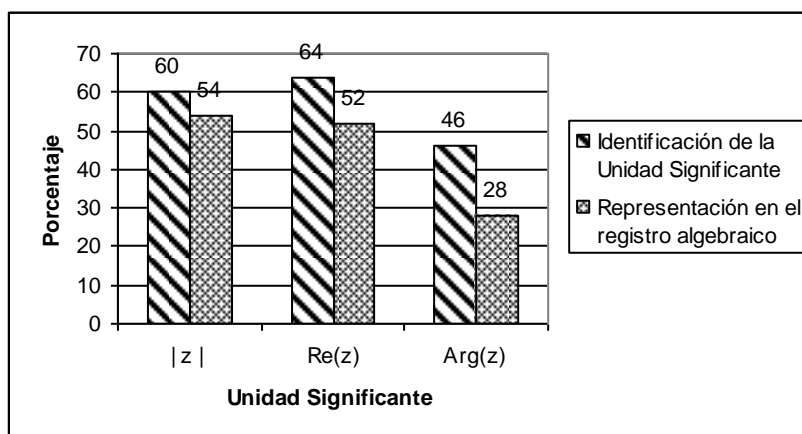


Gráfico 3. Porcentajes de resoluciones correctas en los aspectos vinculados a las conversiones en los que la unidad significativa toma un único valor fijo

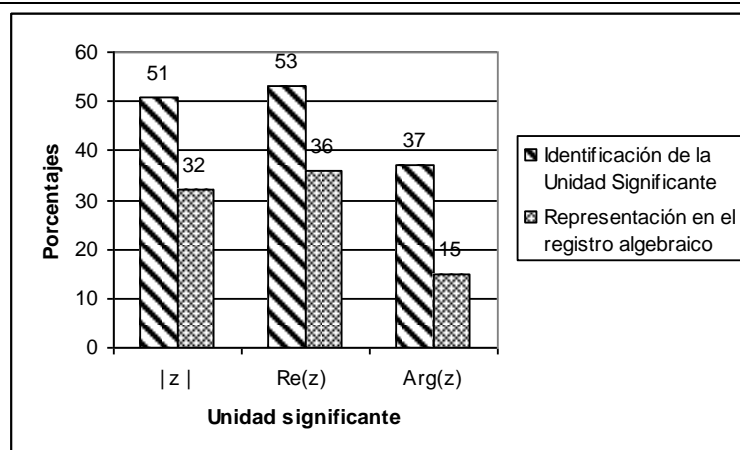


Gráfico 4. Porcentajes de resoluciones correctas en los aspectos vinculados a las conversiones en los que la unidad significativa toma un rango de valores acotados

A partir de los gráficos 3 y 4 pueden realizarse las siguientes observaciones:

- En todos los casos, se observa una diferencia en los porcentajes de resoluciones correctas, que son mayores en la actividad de identificar la unidad significativa que en la de efectuar la representación en el registro algebraico. Esto pone en evidencia que existe una clara dificultad en la construcción de representaciones en el registro algebraico; la misma podría deberse a que los alumnos no dominan las reglas de formación de expresiones en dicho registro vinculadas a los números complejos.
- La diferencia mencionada es más amplia en los casos en los que la unidad significativa toma un rango de valores. Esto podría deberse a que la construcción de la expresión de una relación de igualdad (necesaria para caracterizar los gráficos en los que la unidad significativa toma un único valor) resulta más sencilla que la construcción de una expresión constituida por una conjunción de desigualdades (requerida para caracterizar los gráficos en los que la unidad significativa asume un rango de valores).
- La unidad significativa de mayor dificultad para su identificación es el argumento, tanto si éste toma un único valor como un rango de valores. Esto podría deberse a que la característica gráfica “recta vertical” o “circunferencia” asociadas a la parte real y al módulo respectivamente, es un rasgo gráfico más familiar para los alumnos, al haber trabajado anteriormente en coordenadas cartesianas la ecuación de la recta y de la circunferencia. No es éste el caso del rasgo gráfico “semirrecta” de los números complejos caracterizados por poseer el mismo argumento.

A continuación se describen y analizan algunos de los errores que se observaron organizados de acuerdo a los aspectos explicitados para la tarea de conversión. Dicho análisis resulta de interés pues la falta de capacidad para realizar la conversión, pone en evidencia la parcial conceptualización del objeto matemático de estudio.

Errores en la identificación de unidades significantes

- *Confunden parte real con parte imaginaria*

Dicha confusión podría deberse a asociar erróneamente el rasgo gráfico “recta vertical paralela al eje imaginario” con condiciones sobre la parte imaginaria. Pareciera existir una intención de forzar la congruencia de la conversión vinculando el paralelismo del registro gráfico con una relación o condición sobre la parte imaginaria en el registro algebraico.

- *Consideran módulos negativos*

El hecho de otorgarle al módulo un valor negativo pone en evidencia la falta de conceptualización del objeto matemático módulo de un número complejo. Este error se percibió especialmente en el ítem en el cual el módulo toma valores dentro de un rango, como puede observarse en el Gráfico 5. La representación resulta entonces un “aro” o “anillo” del cual pareciera que realizan la lectura sobre el semieje negativo de las abscisas, que es la primera información que aparece en una “lectura cartesiana” del gráfico, en lugar de una “lectura polar”, y sin tener en cuenta el sentido o significado del módulo.

- *Identifican incorrectamente el valor del ángulo correspondiente al argumento*

Este error se presentó en casos en los que, por ejemplo, se le otorgaba a un argumento de complejos ubicados en el segundo cuadrante, una medida resultante de iniciar la lectura sobre el semieje negativo de las abscisas en sentido horario. Si bien reconocen que la unidad significativa es el argumento, esta identificación podría considerarse parcial dado que la incorrecta lectura del valor del ángulo revela que el argumento no se percibe en su totalidad, ya que el semieje positivo de las abscisas, en tanto es el lado inicial del ángulo, no es considerado. Esto inducen a pensar, nuevamente, que los alumnos realizan una “lectura cartesiana” sobre los gráficos en lugar de una “lectura polar”, revelando un escaso dominio de las *reglas de conformidad* que definen al registro gráfico, particularmente las referidas a “*las condiciones para que una representación de orden superior sea una producción pertinente y completa*” (Duval, 2004, p.43).

- *Agregan condiciones que excluyen al complejo nulo en los ítems en que se caracteriza al argumento.*

La necesidad de incorporarle a los ítems caracterizados por el argumento, alguna otra condición para excluir al complejo nulo, estaría sugiriendo que los alumnos suponen que el número complejo $0+0i$ tiene argumento.

Errores en la representación en el registro algebraico

- *Escriben en orden invertido los valores que acotan el módulo de los complejos representados.*
- *Escriben en orden invertido los valores de los ángulos que acotan el argumento de los complejos representados.*

Ambos errores de inversión en el orden de los valores de acotación sugieren la necesidad de trasladar un orden visual de izquierda a derecha, posiblemente heredado del orden de los números en la recta real, a un orden algebraico, forzando un mismo orden de aprehensión entre las unidades significantes de ambas representaciones, como si la idea latente fuera, los complejos que figuran “más a la izquierda en el gráfico” tienen que tener menor argumento o menor módulo que los representados más a la derecha. Esto puede observarse en la, por ejemplo escriben $\frac{5}{6}\pi \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{6}$ en lugar de $\frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{5}{6}\pi$ o escriben $-4 \leq |z| \leq -3$ en lugar de $3 \leq |z| \leq 4$ como en los gráficos 5 y 6.

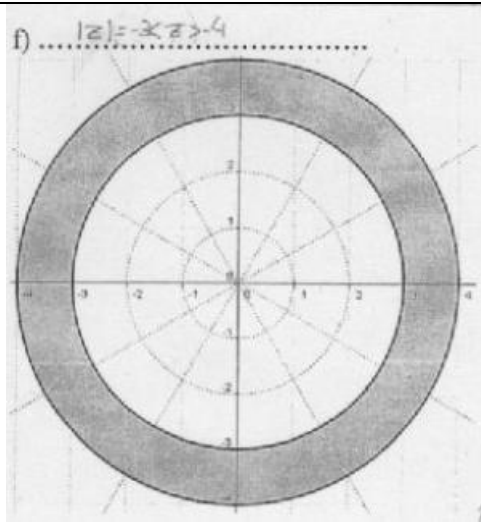


Gráfico 5. Resolución incorrecta donde la unidad significativa módulo asume un rango de valores

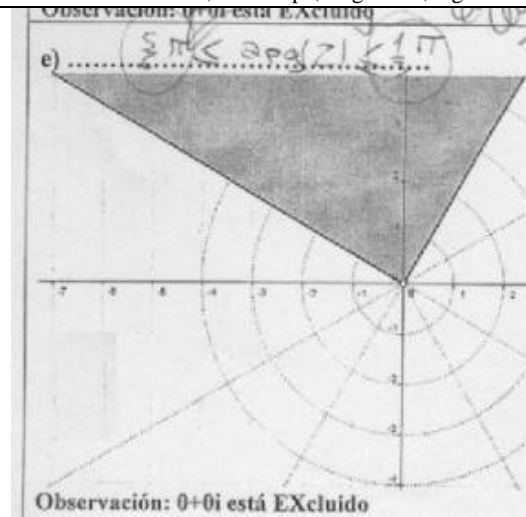


Gráfico 6. Resolución incorrecta donde la unidad significativa argumento asume un rango de valores

Fuera de la estructuración presentada anteriormente se puede señalar un error que involucra los dos aspectos considerados en la conversión:

- Escriben z , en lugar de $\text{Arg}(z)$, de $|z|$ ó de $\text{Re}(z)$

La escritura de z en lugar de $\text{Arg}(z)$ o $|z|$ o $\text{Re}(z)$ plantea la duda acerca de la posibilidad de que esos alumnos distinguieran el rasgo gráfico pero no pudieran reconocerlo nominalmente y por esa razón, no lo expresaran adecuadamente en el registro algebraico. El hecho de que, en muchos casos, escribieran correctamente el valor que la unidad significativa toma induce a avalar el planteo anterior.

CONCLUSIONES

Los alumnos que resolvieron las tareas propuestas ya habían realizado la ejercitación de la correspondiente guía de trabajos prácticos, en la cual se plantearon numerosas actividades que involucraban conversiones desde el registro algebraico al registro gráfico. Sin embargo, se observa, en base a los pormenorizados análisis y en coincidencia con otros estudios semióticos realizados anteriormente que abordaron otras unidades temáticas (Distéfano et al., 2009), que, para dar respuesta satisfactoria en las conversiones en sentido opuesto, esta situación no alcanza y requiere de otras estrategias didácticas.

Este es un punto que merece especial reflexión desde el rol docente, para no caer en la suposición de que la capacidad de los alumnos para efectuar cierto tipo de conversiones implique la de generar las del sentido inverso. Es decir, que no puede garantizarse la reciprocidad, especialmente en los casos, como éste, en que la conversión en un sentido (del registro algebraico al gráfico) es congruente mientras que la conversión inversa (del registro gráfico al algebraico) no lo es.

El análisis cualitativo efectuado sobre los errores localiza las dificultades en la tarea de conversión, suscribiéndolas al aspecto de la identificación de las unidades significantes en los rasgos del gráfico o al de la formación de representaciones de acuerdo con las reglas de conformidad del registro algebraico.

De todo lo expuesto se infiere la necesidad de implementar trayectorias didácticas que involucren conversiones en *ambos* sentidos, abordando sistemáticamente las que no son

congruentes. Esta sistematización incluye un planteo didáctico específico, tanto en el aula como en el material que se utilice, considerando los siguientes lineamientos: por un lado, debe estar orientado al logro de la identificación de las unidades significantes con sus valores y la correcta expresión de sus características en el lenguaje algebraico; por otra parte, debe considerarse en esas tareas, el nivel de dificultad que adquieren según los valores que la unidad signifiante pueda tomar.

Continuar con esta línea de investigación es importante para delinear estrategias que den cuenta de esta situación, no sólo con números complejos sino en diversos temas de matemática en que se presentan estas situaciones.

REFERENCIAS

Aznar, M.A., Distéfano, M.L., Massa, S. M., Figueroa, S.M., Moler, E. (2009). Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos. *XXXII Reunión de Educación Matemática (XXXII REM)*. Mar del Plata, Argentina. Setiembre de 2009.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 99-140). Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. México: Reverté.

Distéfano, M.L., Massa, S.M., Aznar, M.A., Porta, L., Moler, E. (2009). El aprendizaje de la Matemática a través de la coordinación de registros semióticos: uso de instrumentos interactivos. *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VI CIBEM)*. Puerto Montt, Chile. Enero de 2009.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1): 143-168.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1): 103-131.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). *Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática*. [Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2), 2007]. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Hitt, F. (2003) Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 , pp. 213-223. Disponible en: <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>