CB 49

PROCESOS COLECTIVOS DE GENERALIZACIÓN[1]

Verónica CAMBRIGLIA, Patricia SADOVSKY, Carmen SESSA

Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias - Universidad de Buenos Aires
Instituto del Desarrollo Humano - Universidad Nacional de General Sarmiento
Área de Investigación en Didáctica de la Matemática de Suteba
Buenos Aires - Argentina

Nivel Educativo: Educación Polimodal /Nivel Medio.

Palabras Clave: generalización, procesos de interacción, procesos personales y colectivos.

RESUMEN

En esta comunicación pretendemos avanzar en la consideración del vínculo entre procesos personales y colectivos de generalización en el aula de matemática. Ambos procesos tienen lugar a propósito de una cierta tarea matemática y de la gestión del docente en el marco de una vasta complejidad que supone la interacción del aula alrededor de lo general.

Proponemos una mirada de la interacción como "**medio de construcción",** trascendiendo la consideración usual de los procesos de interacción como modo de relación entre ciertos sujetos que elaboran, los productores, y otros que reciben, los receptores. En un ambiente de interacción los sujetos asumen roles de productores e intérpretes, a veces de manera fusionada y, en este sentido, interpretar comporta potencialmente la producción de algo nuevo que sólo es posible a partir de la producción del otro.

Esta nueva mirada de la interacción la consideramos con relación al análisis de dos episodios de un aula de primer año en los que la producción colectiva da lugar al establecimiento de nuevos problemas: el estudio de una propiedad que emerge en la interacción y la validación en la propiedad y en la disciplina en general.

INTRODUCCIÓN

Esta comunicación esta inscripta en una investigación más amplia que pretende avanzar en el estudio de la problemática de la generalización en la clase de matemática, en momentos de ruptura con las prácticas aritméticas y de entrada al trabajo algebraico.

Nuestro interés es analizar los hechos de la clase, estudiando el vínculo entre los procesos personales y colectivos de generalización que tienen lugar en el aula y el papel del docente en la gestión de las situaciones didácticas que se proponen para que los alumnos se *encuentren c*on esta problemática. Sobre este escenario de investigación hemos considerado inicialmente

[1] Este trabajo se inscribe en la investigación llevada adelante en el marco del proyecto Ubacyt X-207 y del Proyecto UNGS "Procesos personales y colectivos de la generalización". Forma parte, a su vez, de la investigación que lleva adelante Verónica Cambriglia en su doctorado que dirigen Carmen Sessa y Patricia Sadovsky.

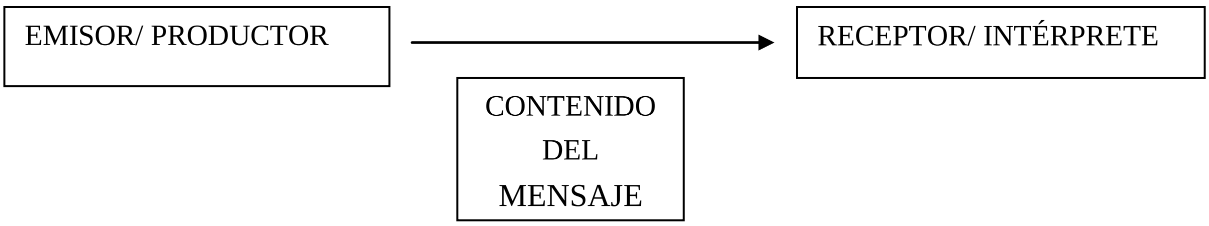
dos zonas del trabajo matemático en el aula: por un lado, el estudio de las propiedades de los números naturales y por otro, la producción de fórmulas para contar. En esta comunicación abordaremos el análisis de dos fragmentos de registros que reúnen aspectos referidos a la primera zona mencionada.

Preguntarnos por la relación entre procesos individuales y colectivos de producción matemática, nos remite a aquellas investigaciones didácticas- citaremos algunas en los párrafos siguientes- que consideran la interacción en el aula como generadora de condiciones para la emergencia de nuevos conocimientos. Es una mirada que compartimos y que trasciende la consideración usual de los procesos de interacción como medio de relación entre ciertos sujetos que elaboran, los productores, y otros que reciben, los receptores.

Pensamos la interacción como "**medio de construcción**" en el sentido de que da lugar a la emergencia de relaciones matemáticas que se construyen en torno a la actividad matemática del aula y que serían otras (o no serían) si aisláramos a los actores de la clase. En este "medio" los sujetos que participan asumen roles de productores e intérpretes, a veces de manera fusionada. Es decir, el acto de interpretar comporta potencialmente la producción de algo nuevo que sólo es posible a partir de la producción del otro.

En la medida de que en el aula se generen procesos colectivos de producción las relaciones matemáticas elaboradas son un producto de las tensiones de la interacción más que el producto de algunos sujetos (aislados) inmersos en la interacción.

En tal sentido, nos enfrentamos con que el modelo de comunicación,



nos resulta insuficiente para entender las interacciones que se producen en una clase y que son ellas mismas un soporte para la producción. En una clase en la que los alumnos discuten en torno a relaciones matemáticas – y toman decisiones- el receptor es intérprete y productor, así como el emisor es productor e intérprete. El receptor produce sobre la producción de otro, desde su propio marco interpretativo, y esta nueva producción porta las primeras relaciones construidas por el/los productores anteriores ya sea modificadas/ enriquecidas/ eventualmente cuestionadas.

La variedad de interacciones (docente – alumno, alumno-problema, alumno-alumno) y su complejidad, es abordada por diferentes perspectivas teóricas y autores. Nos interesa aquí considerar aquellas que nos resultan centrales y que condicionan las porciones de la realidad que se nos hacen visibles. Dentro de las investigaciones ya clásicas, la Teoría de Situaciones elaborada por Guy Brousseau, provee una modelización que nos permite estudiar los procesos de producción matemática como procesos de adaptación cognitiva en el marco de dos tipos de interacciones básicas: la interacción alumno – medio modelizada a partir de la noción de *situación adidáctica* y la interacción alumno – docente que la teoría modeliza a través de la noción de *contrato didáctico*.

Si bien el lugar de la interacción social con los compañeros, no aparece claramente diferenciado en el modelo de la teoría, Sadovsky & Sessa (2005) plantean una interpretación sumamente provechosa de la teoría en términos de la fertilidad atribuida al espacio colectivo. Las autoras señalan que el hecho de intercalar en el aula un espacio de interacción con las producciones de los otros, incorporándolas como problemas a considerar[2] es generador de un escenario que habilita la formulación de nuevas preguntas.

"El trabajo del otro cumple la función de interpelar el propio. Los límites que encuentra cada alumno para validar tanto las aceptaciones como los rechazos sobre los procedimientos de los otros, generan buenas condiciones para alojar nuevas preguntas. La capa de relaciones matemáticas y normas de trabajo que se pondrán en juego en el debate colectivo, se ha "engrosado". En muchos casos la formulación de nuevas preguntas es una tarea del docente que solamente puede tener lugar en el marco de los debates que se generan como resultado de la confrontación." (Sadovsky & Sessa, 2005)

Otros autores incorporan al plano de lo colectivo otros constructos teóricos que permiten interpretar el funcionamiento de la clase en términos de cultura. Estos autores, que se ocupan de teorizar la producción de conocimientos, distinguen en su modelización el plano de los conceptos, teoremas, propiedades, leyes, problemas, de aquél de las *normas* que regulan el trabajo (qué es lo que está o no permitido hacer en matemática, qué se considera suficiente para dar por válido un enunciado o un procedimiento, cuáles son los criterios que permiten establecer que una estrategia es "*matemáticamente pertinente*", etc.). En particular, Yackel y Cobb (1996), plantean que el aprendizaje en matemática es tanto un proceso de construcción individual como un proceso de enculturación hacia las prácticas matemáticas de una sociedad más amplia. En el complejo proceso de la elaboración de normas intervienen: la experiencia de cada alumno como productor, la internalización de las cláusulas del contrato didáctico y los desequilibrios provocados por los otros cuando aparecen en el espacio colectivo diferentes puntos de vista con relación a una norma. Para dar cuenta del origen social de estas normas en el aula y de su especificidad con respecto al conocimiento matemático, Yackel y Cobb hablan de normas sociomatemáticas.

Las investigaciones teóricas consideradas nos iluminan respecto de la potencia del contexto colectivo como generador de nuevas inquietudes y situaciones en torno a lo general, las cuales dan lugar a construcciones matemáticas y reglas de funcionamiento específicas de esa aula: su cultura.

En tal sentido, nos resulta importante avanzar en la consideración de algunos asuntos propios de los procesos colectivos de producción que nos permitan por un lado, atrapar diferentes contextos de emergencia de lo general y por otro, avanzar en el estudio de la complejidad de la comunicación y de la gestión docente en estos contextos de emergencia.

Nos parece importante –también- hacer explícitas algunas afirmaciones que asumimos en nuestro trabajo y que se han ido elaborando a partir de nuestras variadas experiencias[3] . Estas afirmaciones funcionan para nosotros como un marco para nuestra investigación, y -al mismo tiempo- se reformulan/ precisan/ matizan, como producto de la misma.

- ✓ El espacio fértil para la generalización se construye con la componente sustancial que proporciona la situación planteada.
- ✓ Las diferentes historias de los alumnos- que se forjan tanto en las experiencias matemáticas vividas en las instituciones primarias por las que han transitado como en las

[2] Las autoras hablan de interacción *adidáctica* con los procedimientos de los otros, en el sentido de la teoría.
[3] trabajos de investigación y de capacitación llevados adelante con profesores y maestros en las aulas, trabajo llevado adelante en formación de profesores, desarrollos de diseños curriculares de la Ciudad de Bs. As., diálogo con investigaciones de la Didáctica Matemática, entre otras.

experiencias vividas en el aula particular del primer año que observamos- dan lugar a la emergencia de distintas inquietudes y posiciones personales con relación a lo general.

✓ Los proyectos de generalizar que los alumnos portan se deben a diversos motivos e intereses (que a veces coexisten): porque en el aula se habilita / se reconoce / se da lugar a esa actividad en términos de producción matemática, porque esperan producir alguna regla de acción que les sirva para resolver situaciones futuras.

✓ El docente es parte fundamental en el sostén de los procesos de generalización, al desplegar variadas acciones acordes con las distintas posiciones que asumen los alumnos.
En particular – lo veremos en uno de los fragmentos considerados- existen casos en que los alumnos producen generalizaciones, sostienen y devuelven la generalidad de una propiedad a un docente que no logra percibirla aún como tal. Es decir que las generalizaciones en el aula de matemática se darían ***con y contra*** la gestión del docente.

✓ En un aula enfocada en la producción de alumnos y docente, existen situaciones en las que los roles se "intercambian" siendo a veces los alumnos los que asumen gestos del docente (devolver, explicar) y los docentes los que aprenden.

En la sección que sigue nos interesa abordar el estudio de dos episodios de aula en los que se despliegan aspectos centrales de la generalización matemática: el establecimiento de un enunciado general y la validación de lo general. Las relaciones que se generan alrededor de estas dos cuestiones adquieren un espesor especial gracias al **medio** que proporciona la producción en la interacción del aula.

LA GENERALIZACIÓN EN LA INTERACCIÓN DEL AULA

Abordaremos aquí el análisis de dos fragmentos de registros de un aula de primer año de una escuela secundaria de Ciudad de Buenos Aires. Ambos episodios transcurren en dos clases consecutivas durante los primeros días del mes de abril. Las tareas desarrolladas en el aula desde comienzos de año estuvieron centradas en analizar aritméticamente las operaciones en tanto relaciones. En estas actividades la estructura de la cuenta resultaba la fuente de información privilegiada para concluir ciertas características sobre el resultado de esas operaciones. Por ejemplo, se buscaba analizar -sin efectuar la cuenta- si el número 633, que resulta de la operación 5 x 126 + 3, tiene resto 3 en la división por 5 o si resulta o no divisible por 3 o por 6.

Empecemos con el primer fragmento de clase:

Acerca de la gestación de un enunciado general en el aula
Fragmento 1, martes 8 de abril

En esta clase los alumnos habían discutido diferentes resoluciones de la siguiente actividad:

Si 66 x 40=2640, ¿es posible decidir, sin hacer la cuenta, si 2640 es divisible por 40, 60, 33, 3, 4, 9 y 12?

A discutir sobre esta actividad quedó escrito en el pizarrón

66 x 40 =2640	66 x 40 =2640 .
3. 22 . 20 . 2 =2640	6. 11 . 10 . 4 =2640
60 . 44 =2640	

Es entonces cuando Tomás plantea,

1) **Tomás(D)**: *ahí cuando hacés 3 por 22 y 2 por 20 o 20 por 2, cuando vos habías dicho de hacer 6 por 11 y 10 por 4, que después queda en 44, el otro queda 60 y el otro 44 y multiplicando 60 por 44 te daría 2640, o sea que a ese 6 ponele que yo lo paso como un 4 allá asociando, explicando…*

2) **P**: *pará, pará, pará qué 6 pasás como un 4*

3) **Tomás(D)**: *es que….*

4) **P**: *vení, vení, vení…*

Tomás pasa al pizarrón

5) **Tomás(D):** *éste, cuando vos hacés el por 11…viste que hacés por 11 por 4 y este por 4, 40 y después le sumaste…(señala en 6 . 11 . 10 . 4 =2640)*

6) **P**: *no este por 4, no. Agarré el 10 y el 6 para formar el 60*

7) **Tomás(D)**: *te armaste el 60 y el 4 y el 11…*

8) P: *Sí?*

9) **Tomás(D):** *44*

10) **P**: *Ah ya entiendo vos lo que decís es si acá yo pongo un 0 y acá pongo un 4 sería lo mismo…sí dudo que sea una regla general, en este pasó…no sé si por ejemplo yo agarro, habría que pensarlo, si por ejemplo yo agarro ponele 73 por 40 si esto es lo mismo que hacer 70 por 43*

11) **X**: *No, pero no es lo mismo, porque en el primer número se repite el mismo número y ahí estás poniendo 73 que es diferente, allá ponés 6 y 6, que son los mismos números, y lo transformás como 4 y 4, no como 4 y 6*

12) **P**: *yo creo que es una particularidad de esos números*

13) **Agostina**: *pero en todas las cuentas…ahí por ejemplo 77 por 40 es lo mismo que 70 por 44…en todas las cuentas que sea así se puede…donde diga por ejemplo 77, 88 por 30 y hacés 80 por 33 y da lo mismo…*

14) **P**: *Ahhh está buenísimo…vamos a hacer eso de tarea. Acá están diciendo, a partir de lo que dice Tomás. Tomás hace una pregunta y dice, vieron que nosotros arrancamos de acá y llegamos a la conclusión de que esto era igual a esto, los tres dan lo mismo. Y Agos está diciendo que siempre va a pasar eso, siempre que tengamos un 66 un 88,77,33 ¿entienden? Se los pregunto, yo la verdad que, eso lo dijo Agos, yo no me hago cargo de lo que dice Agostina, a ver si está diciendo cualquiera.*

La tarea queda planteada del siguiente modo en el pizarrón y en las carpetas,

¿Será cierto que pasa siempre?

44 x 40 = 40 x 44

55 x 40 = 50 x 44

33 x 40 = 30 x 44

Un análisis de la propiedad que se instala en el aula – sin ser enunciada más que a través de ejemplos - nos lleva a precisar que la misma puede ser formulada de diferentes formas. Toda ley o propiedad general implica dos procesos solidarios:

- Generalizar la familia o conjunto sobre la cual se aplicará dicha ley, que podríamos llamar el dominio de aplicación de la ley.
- Enunciar la ley o propiedad general sobre dicha familia.

¿Cuál es el dominio de aplicación de la ley que empieza a instalar Tomás? Podríamos aquí caracterizar a dichos objetos como dos subconjuntos de los números enteros, los cuales admiten diferentes formas de expresión, entre otras:

a. Los múltiplos de 11 y los múltiplos de 10.

b. Los números con dos cifras, ambas iguales y los número de dos cifras terminados en cero.

b^*. O un equivalente de este último b: los números de la forma nn y m0 en notación posicional, donde n y m son números entre 1 y 9.

La ley o propiedad general formulada sobre estas clases de números – de la cual se busca analizar su validez podríamos enunciarla, sin ser exigentes en sus niveles de precisión, como "la multiplicación de dos números como los considerados es igual a **otra multiplicación** entre números ***del mismo tipo***. De este modo la fusión de familias de números y propiedad sobre ellas permitiría formular la propiedad general de variadas formas, por ejemplo

A. "*el producto entre un múltiplo de 11 y uno de diez resultará igual a **otro** producto entre un múltiplo de 11 y un múltiplo de 10*"

o bien,

B. "*el producto entre un número con dos cifras iguales y otro número terminado en cero será igual a **otro** producto entre un número terminado en cero y otro de dos cifras iguales"*

Observar que cualquiera de estas dos últimas formulaciones podría ampliarse otorgando un modo de generar ese nuevo producto. Por ejemplo, la segunda formulación podría completarse como "*el producto entre un número con dos cifras iguales y otro número terminado en cero será igual a otro producto entre un número terminado en cero y otro de dos cifras iguales*, **a *partir de transformar de la siguiente manera: donde hay cifras repetidas, se pone un cero en el lugar de las unidades y donde hay un cero en el lugar de las unidades, se pone una cifra repetida*".**

El enunciado de la formulación podría también enfatizar la ley de transformación que da lugar al otro miembro de la igualdad sin prestar atención al hecho de que se obtienen números del mismo **tipo:** "*el producto entre un número con dos cifras iguales y otro número terminado en cero será igual al producto entre dos números que se generan del siguiente modo: al número de cifras repetidas , se le pone un cero en el lugar de las unidades y al número terminado en cero, se le pone la cifra repetida de las decenas en el lugar del cero".* Esta manera final parece ser la más cercana a la expresión inicial de Tomás.

Pero volvamos a las formas A y B enunciadas previamente. La forma A involucra las características de los números independientemente del sistema de numeración posicional, mientras que la forma B enfatiza la particularidad de este sistema y recurre a su escritura decimal.

Así, la propiedad general en danza en esta aula puede remitir a la divisibilidad entre números o a aspectos "más visuales" de las cifras involucradas. Más aún, debido a las características del sistema numérico, se necesitan sólo tres signos distintos n, m y 0 entre las 8 cifras involucradas en la expresión de la identidad nn x m0 = n0 x mm (*). Estos signos, que corresponden a las cifras de los factores, proporcionan un *efecto visual* que permite pensar la identidad (*) como un proceso dinámico que transforma los dos números del miembro derecho de la igualdad de una manera en cierto sentido *inversa*: donde hay cifras repetidas, pone un cero en el lugar de las unidades y donde hay un cero en el lugar de las unidades, pone una cifra repetida.

En un plano más general, el problema del producto entre un múltiplo de 11 y uno de diez igual a **otro** producto entre un múltiplo de 11 y un múltiplo de 10, se enmarca en la cuestión de la identidad entre el producto de un múltiplo de ***c*** y un múltiplo de ***d*** y **otro** nuevo producto entre un múltiplo de ***c*** y un múltiplo de ***d***. Cuestión cierta debido a que (***c*** k) x (***d*** h)= (***c*** h) x (***d*** k).

En el fragmento considerado, Tomás instala una pregunta en 1) acerca de la validez de una posible regla de transformación sobre las cifras de los factores involucrados en cada uno de los productos planteados. No queda claro -a partir de la explicitación de Tomás- si él está conjeturando la existencia de una regla que trascienda el caso 66 x 40 = 60 x 44. Sin embargo, hay una generalidad que parece flotar en el ambiente desde la intervención 1) a la 10). Es la profesora recién en esta intervención 10), quien explicita –con términos de duda- el problema de la existencia o no de una regla general. La profesora se instala en la consideración de una transformación sobre las cifras e interpreta que su regla *cambia la unidad del primer factor por cero y el cero del segundo factor por la unidad removida.* Desde este lugar plantea en 10) 73 x 40 = 70 x 43. Este ejemplo tampoco responde al caso considerado por Tomás pues en ese caso 66 x 40 debiera ser igual a 60 x .46.

La alumna que llamamos X refuta en 11) el ejemplo de la profesora, en una primera parte de su intervención, porque los números del ejemplo no están en el dominio de la regla[4] , dominio que hasta este momento nadie había mencionado ni esbozado pero que X parece conocer claramente cuál es. Nos referimos a su expresión: "*No, pero no es lo mismo, porque en el primer número se repite el mismo número y ahí estás poniendo 73 que es diferente, allá ponés 6 y 6, que son los mismos números…"*

En una segunda parte de su intervención –*"... y lo transformás como 4 y 4, no como 4 y 6"*-, la alumna señala que tampoco la transformación que propone la profesora sobre los dígitos entre los números del primer producto y los del segundo, se adapta al caso considerado por Tomás.

La profesora, al intentar buscar un ejemplo que contradiga la regla que comenzó con Tomás, pone en evidencia que no la comprendió: no es para esos números, no es esa la transformación que hay que hacer.

Lo mencionado nos lleva a reflexionar respecto de la distancia que se instala entre el *productor* de una ley (o propiedad) y el *interlocutor* que la interpreta.

Como mencionamos al comienzo toda ley o propiedad general implica dos procesos de generalización solidarios: considerar la familia o conjunto sobre la cual se aplicará la propiedad y determinar la propiedad general sobre dicha familia.

Es claro que para el *productor* un proceso no puede existir sin el otro: no puede enunciar la propiedad si no define sobre quiénes está se cumple. El *productor* percibe todo junto en el enunciado de la ley, como es el caso de Tomás que intenta describir la regularidad de los números involucrados al mismo tiempo que señala la generalidad a cumplirse sobre sus cifras.

[4] dos cifras iguales en un factor y una cifra y un cero para el otro

"*Ahí cuando hacés 3 por 22 y 2 por 20 o 20 por 2, cuando vos habías dicho de hacer 6 por 11 y 10 por 4, que después queda en 44, el otro queda 60 y el otro 44 y multiplicando 60 por 44 te daría 2640, o sea que a ese 6 ponele que yo lo paso como un 4 allá asociando, explicando…"*

A diferencia del productor, el *interlocutor* debe distinguir ambos procesos para poder interpretar la ley que se enuncia y poder eventualmente analizar su validez o aplicarla.

En el plano del aula, tal distinción se vuelve compleja. En el fragmento considerado previamente, el enunciado general que se plantea analizar de tarea, no queda formulado como ley, sino más que a partir de algunas identidades numéricas que se detallan.

Esto nos plantea una pregunta respecto de considerar la potencia y limitación de esta imprecisión en la explicitación. Por un lado, tal imprecisión genera buenas condiciones para habilitar un espacio fértil de exploración; por otro lado, esta imprecisión deja fuera de toda actividad a quienes no logran interpretar el enunciado que se busca estudiar.

Retomando el análisis de la interacción que tiene lugar en el fragmento de registro, es interesante destacar la contundencia de la intervención de Agostina en 13). Sin tener nosotros la posibilidad de precisar si dispone o no de razones más fuertes que la expresión de los números, para sostener que esa identidad valdrá siempre sobre los números considerados, nos interesa destacar que es Agostina quien le *devuelve*[5] el problema a la profesora que parece recién comprenderlo. Hay aquí una inversión de los roles tradicionales en donde el docente es quien devuelve el problema al alumno. Esto nos remite al trabajo de Mercier (1998) quien concibe la clase como un espacio de producción cooperativa en el que la intención de enseñar se extiende no sólo al docente sino a los alumnos. Este autor permite concebir ciertos espacios en el trabajo matemático del aula en donde se desdibujan momentáneamente las distancias docente – alumno.

Acerca de la validez
Fragmento 2, jueves 10-04

1) **P:** *Vamos a Belén que fue la que primero levantó la mano*

2) **Belén:** *Yo tomé para explicarlo un ejemplo, que era 30 por 44 y 33 por 40. Hice de 30 por 44 hice 3 por 5 por 2, o sea lo desarmé, era 3 por 5 por 2 por 44 y después de 33 por 40 hice once por 3 por 4 por 5 por 2…*

3) **P:** *Entienden lo que hace*

4) **Alumna:** *sí, descompone…*

5) **P:** *Descompone..el 30 lo descompone como…. 3 por 10*

6) **Al** (superpuesto con P)**:** *5 por 2*

7) **P:** *Y al 44, 11 por 4 y de este lado descompone al 33 y al 40 como 4 por 10 ¿se entiende?¿eh sí?¿y cuál es la conclusión, Belén, entonces?*

8) **Belén:** *entonces ahí me di cuenta que son los mismos números pero cambiados de lugar* (pausa silencio*) o sea el 11, el 3 un cuatro, el 5 y el 2…los mismos que están estos números pero cambiados de lugar*

Pizarrón

30 . 44 y 33 . 40
3.5.2.11.4 11.3.4.5.2

Tienen los mismos factores
en distinto orden

9) **Denisse:** *pero eso no puede pasar siempre…porque lo podés descomponer de diferentes maneras*

10) **Belén:** *pero igual pasa siempre porque si vos agarrás por ejemplo 77 por 40 lo desarmás y desarmás los 70 por 44 y te da lo mismo…los mismos números*

…………

Comencemos el análisis de este intercambio observando que en su primer intervención Belén (2)) empieza a describir el proceso general a partir del uso (y reconocimiento de este uso) de un caso particular (30, 44 y 33, 40). Su estrategia recurre a la descomposición de los factores de los dos productos que se intenta probar que dan iguales. Sin embargo, Belén no descompone completamente el primer producto manteniendo el 44[6] .

La profesora, en la devolución al resto de los alumnos de la descomposición de Belén, recorta y agrega nueva información sobre la incorporada por Belén, descompone también el número 44 en 4 x 11 y enfatiza los factores 10 y 11 del primer producto. El recurso de la profesora atiende a su proyecto de abordar la validez de lo general en el aula, y a su anticipación de que los múltiplos de 11 y los múltiplos de 10 son centrales para establecer una validación del enunciado cercana a los conocimientos de estos alumnos. Belén se incorpora a esta acción de la profesora pero conserva la descomposición del factor 10 como 2 x 5. Como formula en 8), su estrategia está en analizar los factores presentes en los dos productos para ver que resultan iguales. No menciona nada en este momento que se trata de factores primos pero lo hará en otras intervenciones refiriéndose a ellos como *los números más chiquititos.*

El argumento de Belén requiere movilizar centralmente dos conocimientos:

- Asumir que para cualquier número será posible hallar alguna descomposición en factores.
- Asumir que en todos los casos se podrá arribar a una misma descomposición, lo que permitirá concluir la identidad esperada.

[5] En el sentido de devolución de un problema considerado en la Teoría de Situaciones.

[6] Notemos que a esta altura de su escolaridad los alumnos de primer año han tenido un acceso a lo general a partir de propiedades enunciadas generalmente sobre los números y sus operaciones o sobre objetos geométricos. Frecuentemente las letras han entrado al aula como una forma de dar expresión a estas propiedades (sin realizar transformaciones sobre ellas que permitan obtener nueva información o fundamentar alguna aseveración), para representar elementos geométricos o bien para condensar “un relato de cálculo” -mediante una fórmula- en el cálculo de áreas o perímetros. En tal sentido, la expresión de lo general en el caso aritmético, se da usualmente con apoyo en números particulares y el agregado de términos importados del lenguaje coloquial como ser ***siempre, acá, esto, algunos*** o símbolos presentes en la comunicación cotidiana: pausas en las pronunciaciones, indicadores de recurrencia con las manos, reiteraciones como ***“dos más tres, dos más tres y así...”***, entre muchos otros.

Si bien Belén asume que la descomposición será un proceso general que podrá ser aplicado a otros números –como menciona al responderle a Denisse en10)- no hace explícitas las razones de por qué siempre se encontrarán los mismos factores.

Su argumento es en cierto modo empírico, en el sentido de que exige mirar cada vez la descomposición efectuada para concluir que se encuentran los mismos factores. Diferenciamos los argumentos empíricos de los que permiten *anticipar* (anticipatorios) para nuevos números la validez de la igualdad. Cualquier argumento anticipatorio requerirá atravesar que en ambos productos (nn x m0 y n0 x mm) hay dos múltiplos de iguales números (ya sean de 10 y 11 ó de 5 y 11 ó de 2 y 11) y que los factores que los hacen múltiplos son en ambos productos iniciales los mismos (m y n ó 2, m y n ó 5, m y n)[7] .

Un posible argumento general –adaptado a los conocimientos de esta aula- nos lleva a considerar que en los números "de ese tipo" siempre se encuentra un factor 10 y un factor 11 y que la igualdad de los dos productos se garantiza porque las cifras de las decenas, en los factores considerados inicialmente, son las mismas en ambos productos.

Nos parece importante recortar la intervención 9) de Denisse ya que ella parece plantear que no puede aceptarse un argumento que dependa de una descomposición particular de los números iniciales. Argumento que podría derrumbarse si la descomposición elegida fuese otra. Su objeción trasluce que Denisse no está convencida de que cualquiera sea la descomposición que establezca inicialmente, será posible siempre arribar a una descomposición última que permita concluir la identidad buscada.

Hay un proyecto de generalidad en su planteo relacionado con la argumentación de la verdad de una proposición:

La validez de una proposición no debiera depender de ciertas contingencias en el argumento.

A partir de aquí la discusión en la clase se desplaza hacia el análisis de la existencia o no de una descomposición única sobre la base de ejemplos. Se deja de lado por un momento largo el enunciado general que originalmente se quería estudiar.

Más adelante, otra alumna –Julia- recupera lo que Denisse había planteado, estas dos alumnas habían trabajado juntas.

Julia expone en un diálogo con la docente, las decisiones que implica su modo de atender al problema.

Julia: *además si vos por ejemplo tenés el 33 y el 40 y lo descomponés, vos ya sabés a lo que querés llegar, vos querés llegar al 44 y al 30. Entonces, antes de descomponer te vas fijando si las cosas te dan, entonces si ves que no te da, intentás, a ver si es que no o si es que la cosa está mal, pero como vos ya sabés lo que en realidad te tiene que dar, antes de descomponer.. o sea*.

P (Superpuesta)**:** *Empezás a unir como te conviene*

[7] Nuevamente esta es una cuestión particular del hecho de que el producto entre un múltiplo de c y un múltiplo de d con factores que los hacen múltiplos *h* y *k* resulta igual a otro producto entre un múltiplo de c y un múltiplo de d si se consideran los mismos factores que los hacen múltiplos (*h* y *k*)

Julia: *Claro, o si no hacés más chico o más grande según como te convenga para lo que querés.*

[…]

Julia: *claro pero nosotras antes de eso, por ejemplo dijimos "en qué descomponemos el 40" y dijimos "en 4 por 10" porque si lo descomponemos en 4 por 10 ya sabemos que vamos a tener los con qué formar los números que necesitamos.*

Tanto Denisse como Julia proponen una forma diferente de la de Belén de argumentar. Proponen no transformar ambos estados iniciales (los cálculos 33 .40 y 30. 44) hasta llegar a un estado único, sino que proponen realizar transformaciones sobre uno de los estados hasta arribar al otro.

Por otro lado la última intervención de Julia describe un proceso que llevaron a cabo junto con Denisse en el que es muy importante <u>la elección</u> de la descomposición a considerar (*"en qué vamos a descomponer al 40?").* De algún modo, esta intervención nos da una posible explicación del cuestionamiento que Denisse hace al proceso de Belén previamente: ***No sirve cualquier descomposición sino aquella que sea útil para encontrar el nuevo producto***.

Inferimos que este modo de posicionarse de Julia y Denisse para responderse al problema original las ubica en buenas condiciones para cuestionar la validez matemática del argumento de Belén y sembrar una pregunta en el aula que trasciende la validez de **este** argumento para instalar la inquietud de cuándo será **un** argumento válido en la disciplina.

El análisis de este episodio nos hace considerar nuevamente la potencia de la construcción colectiva para dar lugar a ciertos asuntos matemáticos en la clase. Algunas discusiones transversales (y esenciales) respecto del hacer matemático – como en este caso la problemática de la validación de una propiedad – se construyen en -y a partir de- la confrontación que tiene lugar en el aula. En tal confrontación, ciertos alumnos asumen la posición de constructores a partir de la producción de otro la cual resulta interpelada por las relaciones que los alumnos han construido en sus otras instancias de producción.

A MODO DE SÍNTESIS

Nos interesa aquí recuperar los ejes centrales que pretendimos comunicar y esbozar también aquellas cuestiones, que en el desarrollo actual de la investigación, se nos presentan.

Enmarcada nuestra investigación en el estudio de la problemática de la generalización en la clase y asumiendo el aula como un espacio de producción colectiva, hemos abordado dos cuestiones nodales del aula de matemática: la gestación de un enunciado general y la problemática de la validación de lo general.

En ambas cuestiones el valor de las intervenciones de los otros y las tensiones propias de la interacción han resultado generadoras de condiciones para que los alumnos interpelen lo general pudiendo dar origen a interrogantes que no tendrían cabida si la producción personal no se viera confrontada con la **de** los otros o con la que se va elaborando **con** los otros.
Estos primeros análisis nos permiten distinguir algunos aspectos relacionados con los procesos de generalización, entre ellos:

- Existen diferentes planos de generalización en el aula: generalizaciones de familias de números o clases de objetos matemáticos (que cumplen una propiedad), generalizaciones de propiedades o leyes (que cumplen un conjunto de números), generalizaciones de procedimientos, generalizaciones respecto de los modos de dar argumentos en la disciplina.
- En el plano de la generalización de propiedades numéricas, distinguimos aquellas generalizaciones propias del sistema de representación de los números; es decir las que dependen de nuestro sistema de numeración posicional de aquellas que son independientes del mismo.
- En relación con los procesos de interacción, existen diferentes posicionamientos de los alumnos respecto de las razones que aseguran la validez de lo general y estos posicionamientos tienen lugar al confrontarse en el plano colectivo producciones de orden más personal.

Por último, el análisis de los relatos de clase nos hace considerar que ciertas situaciones se muestran potentes para dar lugar – en el marco de la interacción del aula- a la emergencia de nuevos interrogantes. El rol del docente es fundamental en el sostén de un ambiente de interacción que resulte un ***medio para la producción*** del aula, cuestión que agrega una enorme complejidad a su gestión que resulta imprescindible para que se desplieguen en el aula distintos aspectos de la generalización.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Córdoba, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19, 1986, (versión castellana 1993).

Sadovsky P., Sessa C. (2005). The adidactical interaction with the procedures of peers in the transition from arithmetic to algebra: a *milieu* for the emergence of new questions. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 59. 1-3 Kluwer Academic Publishers.

Mercier, A. (1998). La participation des élèves à l'enseignement. Recherches en didactique des mathématiques. Vol 18/3 pp 279-310. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Yackel, E; Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *JRME,* Vol 27.