CB 16

UNA SITUACION GEOMETRICA FUNCIONANDO EN LOS CONTEXTOS SINTETICO, ANALITICO Y DINAMICO: ANÁLISIS Y REFLEXIONES

Mariana TORRES, Ramón HERNANDEZ, Claudio FERNANDEZ, Raúl MUÑOZ

UACO – UNPA /UACO – UNPA. I.S.F.D Nº 807 – I.S.F.D Nº 802/ UACO – UNPA/I.S.F.D. Nº 807
mtorres@uaco.unpa.edu.ar monramo2004@hotmail.com cfernandez@uaco.unpa.edu.ar raulchess@hotmail.com

Palabras Clave: Medianas, geometría sintética, geometría analítica, GeoGebra.

RESUMEN
Este trabajo surgió en el proceso de evaluación de un Curso de Extensión para profesores, y de una reflexión sobre la resolución de una actividad y su justificación, cuyo objetivo era construir un $\overset{\Delta}{ABC}$, dadas las longitudes de sus tres medianas. Se planteó así la posibilidad de encarar el problema de distintas maneras según el contexto donde se hagan funcionar las relaciones que se producen con los "datos", a saber: el sintético, el analítico y el que nosotros denominamos dinámico. Específicamente nos propusimos analizar y comparar las resoluciones dadas al problema, pensando en cómo incide el uso y funcionamiento de los elementos de las distintas geometrías en los significados dados y en los que emergen a partir de las condiciones que establecen cada uno de los diferentes contextos, tratando de brindar una mirada crítica que nos brinde nuevos elementos para repensar la enseñanza de conocimientos geométricos.

1. INTRODUCCION
Este trabajo surgió durante la realización del trabajo final de un curso de extensión[1] que focalizó su desarrollo en las complementariedades de la geometría sintética y la geometría analítica y que realizó el grupo de docentes autores de este trabajo. En el mismo se solicitaba ***la construcción de un triangulo dada las longitudes de sus tres medianas,*** exigiéndose la justificación del juego de objetos y relaciones utilizados para su resolución. Ante esta consigna y teniendo en cuenta el marco metodológico en el que se desarrolló el curso, surgió la idea de abordarlo desde tres enfoques diferentes: sintético, analítico y dinámico, con herramientas y objetos de ambas geometrías, en particular con regla y compás en la geometría euclidiana y además utilizando el soft dinámico libre GeoGebra.

2. DESARROLLO
En primer lugar queremos comentar ciertas características generales del problema -producto de nuestro estudio- antes del análisis de sus posibles resoluciones. Esto es a los fines de anticipar ciertos elementos potentes del mismo para pensarlo como una tarea que permita determinar límites de técnicas, generar nuevas preguntas sobre los datos e incluso ser portador de diferentes significados de la noción de mediana.

[1] Este curso se dictó en la UNPA (UACO) en el marco de la formación continua para profesores en matemática, por la Prof. Mg. Silvia Etchegaray (docente de la UNRC y la UNPA).

Problema: Construir un $\overset{\Delta}{ABC}$ dadas las longitudes de las tres medianas.
Si al problema se lo piensa como: *la construcción con regla y compás de un triángulo, conocidas sus medianas M_a, M_b, M_c*, puede hacerse mediante técnicas sintéticas, como se mostrará más adelante, y además es reducible mediante estas técnicas sintéticas a la construcción de un triángulo cuyos lados sean *$2M_a$, $2M_b$, $2M_c$ (Puig Adam)*. Sin duda este alcance teórico es una gran fortaleza que se sostiene desde este contexto, llamado por nosotros: sintético. Asimismo vale dejar explícito que la diferencia con problemas similares de construcción de triángulos a partir de otros tres datos (p. ej. lado c, altura h_c y mediana M_c)[2], radica en que la técnica sintética de la intersección de dos lugares geométricos que permite resolver ese tipo de problemas no resulta evidente -"a priori"- poder aplicarla para esta situación. Sintetizando a Gascón (2002), podemos decir que esto no invalida que la construcción pueda hacerse de este modo o que existan otras técnicas sintéticas de resolución (justamente es lo que vamos a mostrar), si no que elegir esta tarea permite "ver" las limitaciones de las técnicas empleadas en problemas del mismo tipo y el surgimiento más "natural" de técnicas analíticas que permiten –mediante su implementación- hacer otro tipo de análisis a través de las ecuaciones algebraicas que representan a los objetos geométricos involucrados.

3. ESTUDIO REALIZADO

3.1 Geometría Sintética

Es muy compartido en las instituciones de enseñanza que la geometría sintética es la que comúnmente se utiliza a la hora de construir un triángulo dados los datos de tres elementos característicos, utilizando como herramientas regla y compás. A continuación se explicará cómo se construyó en este trabajo dicho triángulo con esta técnica y utilizando los datos de las tres medianas (M_a, M_b y M_c).

A continuación, en la figura 1, se muestran los datos que se tienen, por hipótesis, o sea se muestran cuáles son las medianas de las que se parte en el problema (Izquierda de la figura 1). Además se muestra la ubicación del nuevo objeto construido: el baricentro (Centro de la Figura) para realizar la actividad. Debajo de la Figura 1 se notan cuáles son las medianas en cuestión.

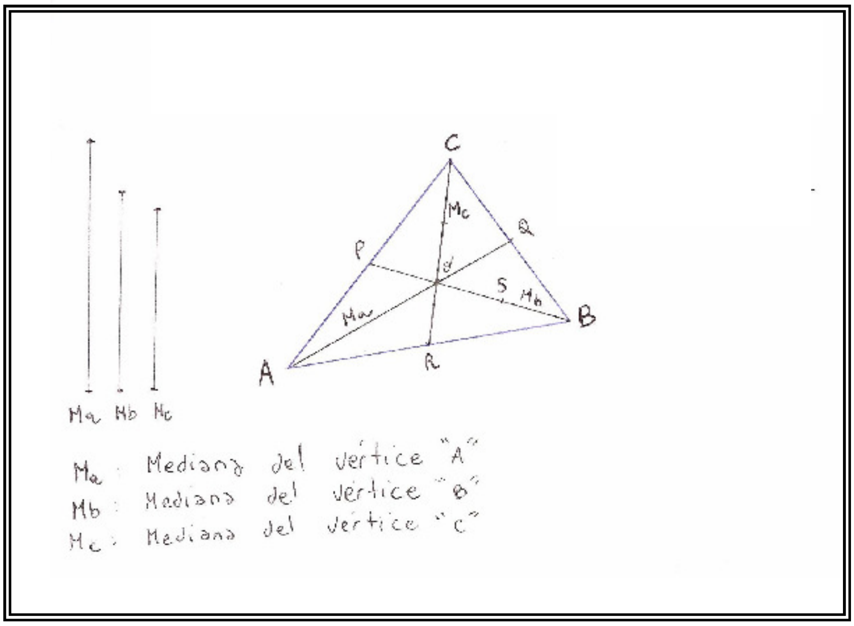

Figura 1

[2] Estos problemas fueron resueltos y discutidas sus técnicas, argumentos, lenguajes, durante la implementación del curso.

**Concepto y propiedad que se conocen y que se ponen a funcionar ante este problema*:
Recordemos que el *baricentro* de un triángulo de vértices {A, B, C} se encuentra en el punto en el que se intersecan las tres medianas del triangulo.

El baricentro O se encuentra a $\frac{1}{3}$ del punto medio de cada lado y a $\frac{2}{3}$ de la distancia del vértice del que parte.

* *Primer modo de hacer y argumentar*:
La representación ayuda a “ver” que basta poder construir uno de los triángulos en los que queda dividido el triángulo grande ABC, para luego re-construirlo a partir de esa parte.
Para comenzar, se divide a las tres medianas en tres segmentos congruentes por Teorema de Thales, en donde R es punto medio del segmento $\overline{AB}$, S es punto medio de $\overline{OB}$, $\overline{RS}$ es base media del triángulo $\overset{\Delta}{AOB}$ y por propiedad de las bases medias de un triángulo entonces $\overline{RS}$ es la mitad del segmento $\overline{AO}$, por lo tanto se conoce las medidas del triángulo $\overset{\Delta}{RSO}$.
Recordemos que el Teorema de la base media dice: En todo triangulo una base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.

**Construcción del triángulo ABC con Regla y Compás*:
Se Construye una semirrecta de origen R que pase por un punto que llamamos Z, se traslada $\frac{1}{3}$ de la medida de M_a con el compás, haciendo centro en R sobre la semirrecta RZ, cortando a la misma en S, luego con la medida de $\frac{1}{3}$ de M_b y haciendo centro en S, se traza un arco hacia el origen de RZ, con la medida de $\frac{1}{3}$ de M_c y haciendo centro en R trazamos un arco que intersecta al anterior en el punto O que será el baricentro del triangulo a construir. Véase figura 2.

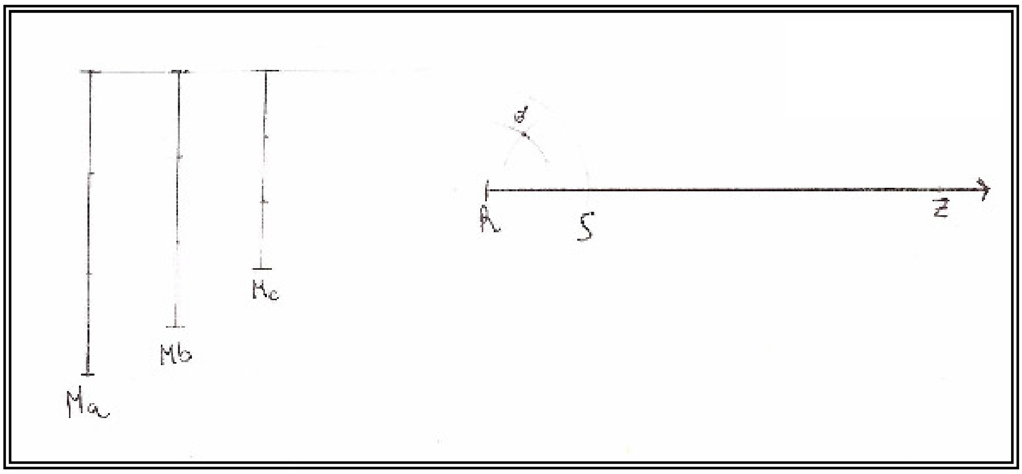

Figura 2

Trazamos una semirrecta de origen R que pase por O. Esta semirrecta va a contener a la mediana de M_c, luego se traza una recta que pase por los puntos O y S. Formando el triangulo $\overset{\Delta}{RSO}$, en esta recta se va a encontrar la mediana de B, M_b. Tomamos $\frac{2}{3}$ de M_b y haciendo centro en O, se corta la recta $\overleftrightarrow{OS}$ en un punto al que llamamos B (que va a ser uno de los vértices del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$). Luego tomamos $\frac{2}{3}$ de M_c haciendo centro en R, cortamos a RO en un punto al que llamamos T. Con la misma medida se corta a OT haciendo centro en O en un punto al que se llama C. (vértice del $\overset{\Delta}{ABC}$) luego unimos B con C (obtenemos el lado $\overline{BC}$)

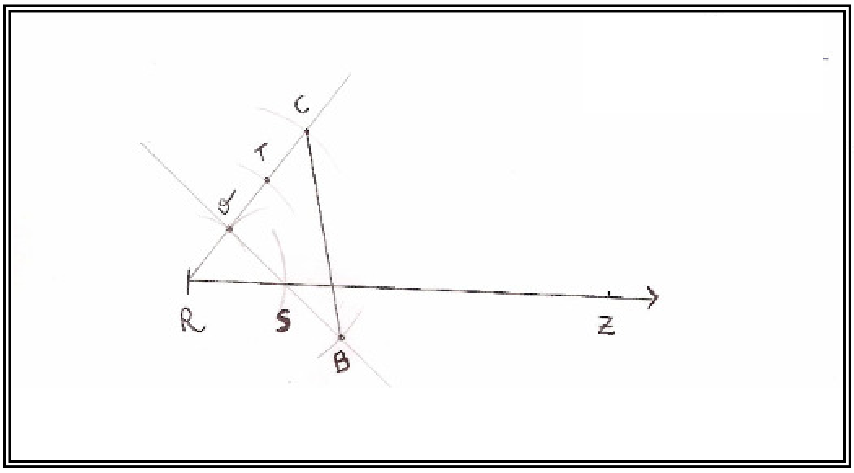

Figura 3

Tomamos $\frac{2}{3}$ de M_b y haciendo centro en S, corta a la semirrecta $\overrightarrow{SO}$ en un punto al que llamamos P. Trazamos una semirrecta de origen C que pasa por P (esta semirrecta va a contener a otro lado de $\overset{\Delta}{ABC}$). Se traza una semirrecta de origen B que pase por R y el punto de intersección con la otra semirrecta es A, obteniéndose el tercer vértice. Finalmente, uniendo los tres vértices, obtenemos el triangulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

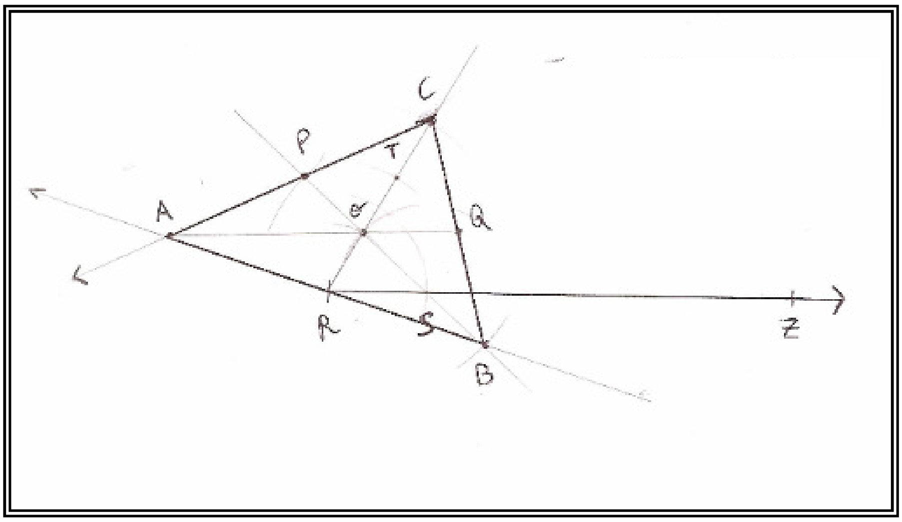

Figura 4

La tercera mediana M_a quedara determinada por el baricentro O y el vértice A. Comprobando que la construcción es correcta y determinando el punto medio Q de BC.

3.2 Geometría Analítica

Cuando se elige este contexto, la primera pregunta apunta a la búsqueda de **una** relación entre los lados del triángulo (incógnitas) y sus medianas (datos) para poder resolver el problema. Ante ello se recurre al:

Teorema de Apolonio (teorema de la mediana) que dice:

Para todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual a la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.

En consecuencia sabemos que valen las siguientes fórmulas:

1) $a^2+b^2=\frac{c^2}{2}+2M_c^2$ 2) $b^2+c^2=\frac{a^2}{2}+2M_a^2$ 3) $a^2+c^2=\frac{b^2}{2}+2M_b^2$

Despejando las medianas en función de los lados, obtenemos

1’) $2M_a^2=b^2+c^2-\frac{a^2}{2}$ 2’) $2M_b^2=a^2+c^2-\frac{b^2}{2}$ 3´) $2M_c^2=a^2+b^2-\frac{c^2}{2}$

Y sumando miembro a miembro ya que necesitamos sintetizar toda esta información en una sola fórmula, llegamos a que $\boxed{M_a^2+M_b^2+M_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)}$ o en forma equivalente a $\boxed{a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(M_a^2+M_b^2+M_c^2)}$

Obtenemos así **una** ecuación que relaciona las longitudes de los lados y las medianas.
Nuestro objetivo es ahora poder determinar las longitudes de los lados del triángulo en función de las medianas.
Manipulando las ecuaciones 1’) 2’) y 3’) convenientemente, lograremos las fórmulas deseadas:
Hacemos $\boxed{\text{2’)+3’) – ½ 1’)(*)}}$; $\boxed{\text{1’)+3’) – ½ 2’)(**)}}$; $\boxed{\text{1’)+2’) – ½ 3’)(***)}}$, obteniendo así:

(*) $\frac{9}{4}a^2=2M_b^2+2M_c^2-M_a^2$ (**) $\frac{9}{4}b^2=2M_a^2+2M_c^2-M_b^2$ (***) $\frac{9}{4}c^2=2M_a^2+2M_b^2-M_c^2$

Luego, despejando los lados en función de las medianas, llegamos a:

1’’) $a=\frac{2}{3}\sqrt{2M_b^2+2M_c^2-M_a^2}$ 2’’) $b=\frac{2}{3}\sqrt{2M_a^2+2M_c^2-M_b^2}$ 3’’) $c=\frac{2}{3}\sqrt{2M_a^2+2M_b^2-M_c^2}$

Esto nos permite saber qué longitudes tendrán los lados del triángulo ABC que se construirá a partir de conocer sus tres medianas.
Pero, justamente esta expresión algebraica de los lados nos enfrenta a un nuevo problema: ¿cuándo tres números positivos serán admisibles como longitud de las medianas de un triángulo?, ya que es necesario que el radicando sea positivo, o sea:

I) $2M_b^2+2M_c^2-M_a^2\geq 0$ II) $2M_a^2+2M_c^2-M_b^2\geq 0$ III) $2M_a^2+2M_b^2-M_c^2\geq 0$

Si fijamos M_c =k, las medianas M_a y M_b pueden tomar valores x e y, respectivamente, que satisfagan las siguientes inecuaciones:
I´) $x^2-2y^2\leq 2k^2$ II’) $y^2-2x^2\leq 2k^2$ III’) $2x^2+2y^2\geq k^2$
La región del plano a la que pertenecen los puntos (x, y) que son soluciones de las inecuaciones I’), II’) y III’), queda determinada por la intersección de las soluciones de cada una de ellas.
A continuación, se ilustra la región de validez para k=1 (región con doble rayado).

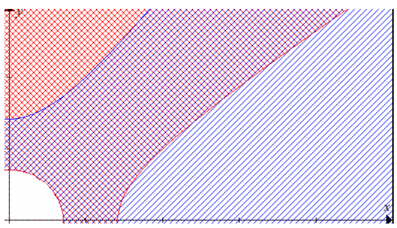

Figura 5

Se procede de manera análoga si se consideran fijas M_a ó M_b, llegándose a resultados similares. En otras palabras, dado el valor de la longitud de una de las medianas los otros dos valores de las medianas “deben vivir” (como coordenadas de un punto) en una determinada región del plano.

3.3 Geometría Dinámica

En primer lugar aclaramos que en este modo de hacer en ningún momento se intentará explicar el empleo de los comandos del GeoGebra, sino que se trata de mostrar cómo y qué se realizó con el soft para resolver el problema.
Primera acción: Tomamos dos puntos A y B, y trazamos el segmento que los une. La idea es tomar, dos pares mas de puntos {(C, D), (E,F)}, con sus respectivos segmentos.
¿Para que hacemos esto? La intención es que los tres segmentos que se construyeron en el paso anterior representen los segmentos dados (que son por hipótesis las medianas), por propiedades de la geometría euclidiana se deben intersecar en un único punto llamado baricentro, sino no se podría construir el triangulo.

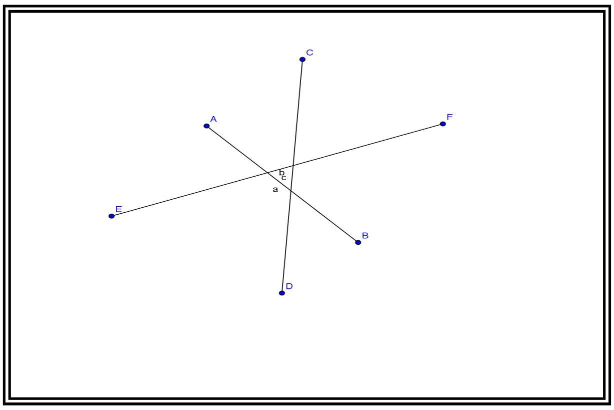

Figura 6

En el proceso de "mover" los segmentos hasta que se corten en un punto, aparece otra cuestión: luego de trazar las medianas para que sea posible construir los lados, los puntos E, D y B deben estar alineados, así como E, A y C y la terna C, F y B. Para que esto ocurra, lo que se puede hacer es trazar tres rectas que contengan a cada una de las tres ternas que dijimos deben estar alineadas. Cuando se intenta trazar estas rectas mencionadas, nos encontramos que la herramienta del GeoGebra pide que, para trazar una recta, basta con marcar dos puntos. Debemos entonces tomar una "decisión". Para ello, vamos a tomar los puntos extremos que queremos que sean los que delimitan los lados de los triángulos. Trazamos entonces una recta que une los puntos E y B, la otra que une E y C y la otra que une C y B. Ahora bien, una vez que tenemos las tres rectas la construcción adquiere la siguiente forma:

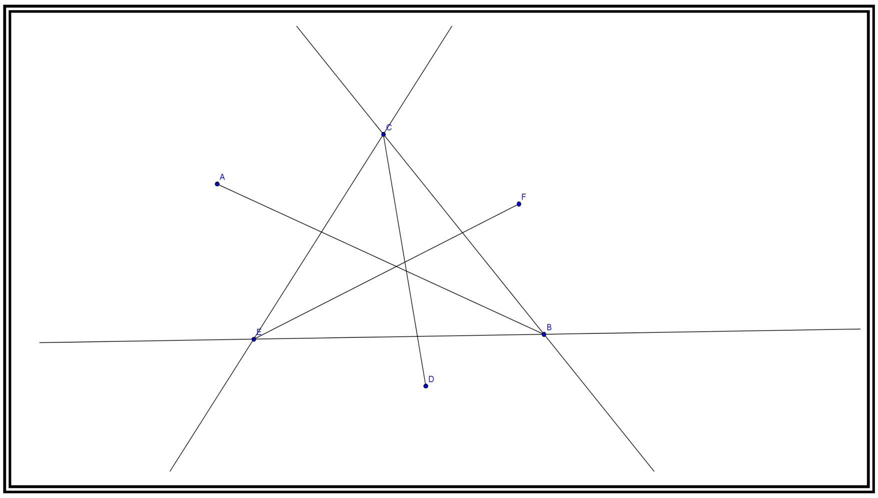

Figura 7

Como podemos ver en la figura las ternas que queríamos que quedaran alineadas, ¡¡¡no lo están!!! Es decir, queríamos que A esté contenido en la recta EC, que F esté en la recta CB y que D esté en la recta EB. Pero… ¿sólo queremos que suceda eso?

No perdamos de vista nuestro problema, nos interesaría que además de que los puntos A, D y F estén contenidos en las respectivas rectas, éstos sean *puntos medios* de los segmentos EC, EB y CB, ya que nuestros elementos dados como datos son: "medianas". Estamos nuevamente ante una situación de toma de "decisión", para ello, primero trazamos los puntos medios de los segmentos mencionados.

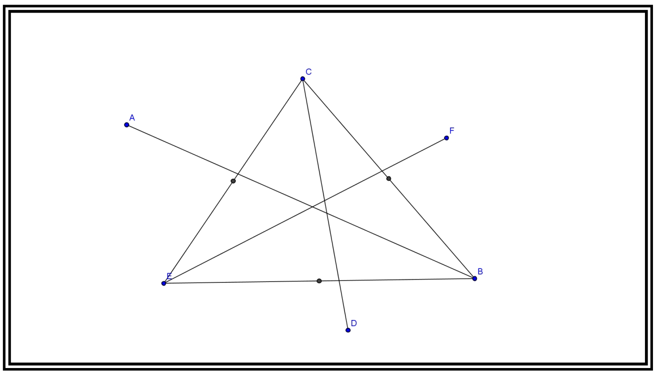

Figura 8

Ahora redefinimos A, F y D para que coincidan con los puntos medios marcados.
¡¡¡Lo logramos!!! Podemos ver que si intersecamos las medianas con una determinada relación se puede construir el triángulo- ¿Cuál es esa relación? Nosotros no la usamos, movimos los puntos hasta que quedaban alineados y pasaban por la mitad del segmento que se transformaba en lado. ¿La podemos empezar a pensar ahora? Si cambiamos las longitudes de las medianas, ¿se mantiene esa relación? Aparecen nuevas preguntas para seguir indagando en este contexto.
Como el soft permite trabajar además con ecuaciones, lo que hicimos luego fue introducir las fórmulas deducidas del Teorema de Apolonio –en la parte correspondiente a la geometría analítica-, para que queden definidos los lados del triangulo en función de las medianas y así validar nuestro trabajo previo. Quedan definidos, nuevos valores, A_1, B_1, C_1, que son justamente los valores de las longitudes de los lados. De esta manera no sólo construimos sino que quedaban definidos los lados en función de los datos dados.

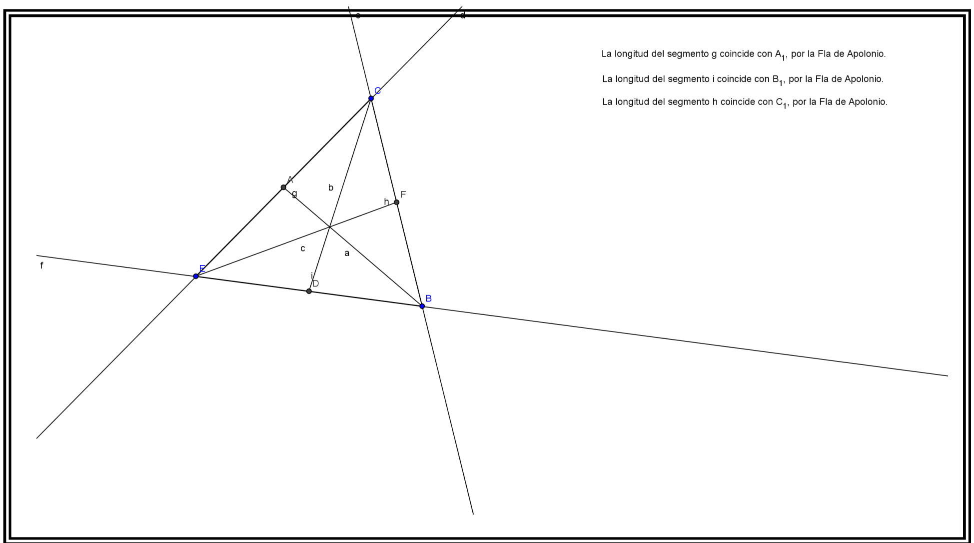

Figura 9

4. REFLEXIONES FINALES

Una de las cuestiones que podemos identificar, en este primer tipo de análisis realizado a este problema, generando prácticas geométricas en tres contextos diferentes, es la diferencia de significados con que emerge el objeto: triángulo en función de las longitudes de sus medianas.

En efecto, en el contexto de la geometría sintética, más allá de la complejidad de la validación de la construcción, el triángulo construido "se ve" y es "uno".
En la geometría analítica surge la existencia del triángulo condicionada a una relación estable entre las longitudes de las tres medianas, ya que las expresiones que se encontraron inducen a pensar que iba a existir sólo si cumplía esa condición hallada al manipular fórmulas.
Con las herramientas de geometría dinámica vimos, por un lado, que ésta pone a funcionar elementos y propiedades de elementos que no se explicitan en las geometría sintética y en la analítica, por ejemplo, la necesidad de los puntos medios en los que las medianas debían cortar los lados del triangulo que se quería construir. Por otro lado nos permitió "ver" donde se inscribían **todos** los triángulos que se podían construir con esos datos.
En otras palabras podemos reconocer que ante este tipo de tarea, la geometría sintética es muy gráfica a la hora de "ver" el triángulo que pide el problema y muy "pesada" para demostrar su existencia. El trabajo con elementos de la geometría analítica, nos permitió "descubrir" condiciones de existencia del triángulo y caracterizar la forma del dominio de las tres medianas, mientras que con las herramientas de geometría dinámica caracterizamos la forma del dominio[3] de las tres medianas, cuestión que no había aparecido antes. También observamos que cuando utilizamos las herramientas del soft, recurrimos tanto a objetos y propiedades de la geometría sintética como a las fórmulas que se dedujeron de la geometría analítica para trazar y validar los diferentes triángulos dados sus tres medianas.
Por último queremos decir que, con este trabajo, no pretendemos tomar partido por la enseñanza de una Geometría Sintética, una Geometría Analítica, o las herramientas de Geometría Dinámica. Creemos -por ahora- que todas pueden y deben complementarse. El soft puede ser empleado como instrumento de mediación semiótica para visualizar/significar/idealizar conceptos, propiedades y relaciones que desde la geometría sintética se vuelven engorrosos y desde la analítica se "pierden de vista" dentro de las ecuaciones halladas. Esta afirmación para su validación exige un trabajo muy profundo sobre los diferentes elementos y atributos contextuales que van conformando el significado de los objetos al funcionar en la resolución de una tarea. Este es nuestro **nuevo problema** y al que estamos actualmente abocados en el marco de un proyecto de investigación en enseñanza de la Geometría. Así, las construcciones serán interpretadas y comprendidas en sus distintas formas y representaciones, reconociendo un espacio de complementariedad donde se establezcan aportes entre las distintas geometrías y "unas ayuden a las otras", permitiendo su coexistencia, ya que, - es claro- los trabajos realizados en cada una de ellas, no son para nada equivalentes cognitivamente pues requieren diferentes procesos, tal como se intentó mostrar en este trabajo.

5. BIBLIOGRAFIA

- ARANDA, C., CALLEJERO, M. LUZ. 2010. *Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: Un estudio de casos*. Relime. Vol. 13 (2).
- GASCÓN PÉREZ, J. 2002. *Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato: ¿Dos mundos completamente separados?* Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, ISSN 1130-488X, Nº 39, Págs. 13-26.
- PÉREZ SÁNCHEZ, J. 2001. *Lugares Geométricos*. Mérida- Venezuela.
- PUIG ADAM, P. 1986. Curso de Geometría Métrica Tomo I, Euler Editorial.
- Construcciones Geométricas: Triangulo - 3 Medianas Material disponible en: (www.youtube.com/watch?v=Dgrg9-MBmG8)

[3] Nos dimos cuenta que los extremos de las medianas debían estar algunos alineados. Además del hecho de que los extremos de las medianas debían ser puntos medios (de los lados de los triángulos que se querían construir) como así también respecto del dominio lo que hicimos fue utilizar las formulas dadas en la Geometría analítica.