CB 26

LAS DEMOSTRACIONES DE EXISTENCIA

José Luis AGUADO

Facultad de Ciencias Exactas – UNICEN - Pcia. de Buenos Aires
jaguado@exa.unicen.edu.ar

Palabras Clave: teorema de existencia, número irracional, demostración.

RESUMEN

Las matemáticas constituyen el armazón sobre el que se construyen los modelos científicos, toman parte en el proceso de modelización de la realidad, y en muchas ocasiones sirven como medio de validación de estos modelos. Mucho antes de que fuesen observados físicamente, pudo descubrirse la existencia de los últimos planetas de nuestro sistema solar, gracias a cálculos matemáticos. Sin embargo, la evolución de las matemáticas no sólo se ha producido por acumulación de conocimientos o de campos de aplicación. Los propios conceptos matemáticos han ido modificando su significado con el transcurso del tiempo, ampliándolo, precisándolo o revisándolo. Las demostraciones de existencia son uno de los pilares de esta evolución de las matemáticas. La metodología de investigación de esta ciencia y su lógica subyacente enseñan a validar estas demostraciones de existencia. En esta comunicación analizamos tres tipos de demostraciones de existencia en relación con la formación de Profesores.

DEMOSTRACIONES DE EXISTENCIA

Una demostración de existencia en matemática establece la existencia de alguna entidad sin especificar cómo hallarla. Se suelen llamar también demostraciones de existencia indirecta, para diferenciarlas de las demostraciones de existencia constructivas, donde se construye la entidad. Sin embargo, el concepto *demostración indirecta* se usa para la demostración de la implicación contrarrecíproca de la que se desea demostrar. Por eso mantenemos el vocablo *demostración de existencia* sin más.
A continuación se da un ejemplo sencillo de una demostración de existencia.

Proposición 1. *Dada la información que ningún ser humano tiene más de 300.000 cabellos en su cabeza y que según un censo reciente la ciudad de Mar del Plata tiene una población de más de 600.000 habitantes, entonces existen al menos dos habitantes de esa ciudad que tienen la misma cantidad de cabellos.*
Demostración: Comencemos con la persona en Mar del Plata que tiene el menor número de pelos en su cabeza. Intentemos ver si hay otra persona con el mismo número. Si existiese, la proposición queda demostrada. En caso contrario, pasamos a la persona con el siguiente menor número de pelos en su cabeza y se repite el proceso. El caso extremo en que todos tienen distintas cantidad de pelos no puede darse puesto que el número de personas es mayor que el de pelos. Así, se llegará a una coincidencia en el número de pelos antes de llegar a los 600.000 habitantes. La demostración ha terminado.
Las demostraciones de existencia suelen no dejar completamente satisfechos a quienes no son matemáticos profesionales. Desean otra demostración, una demostración constructiva que indique exactamente cuáles son las personas que tienen el mismo número de pelos o que al

menos localice a dos ¿Cuánto tardaríamos en hallar a la persona con la menor cantidad de pelos? No obstante, una gran parte de las matemáticas se apoya en demostraciones de existencia sin las correspondientes construcciones.
Menos inquietante suele ser una demostración de no existencia. Efectivamente, se trata de una demostración de que alguna entidad no existe. Por ejemplo: *no hay números naturales no interesantes*; esto se puede probar por demostración indirecta. En otras palabras, se puede probar la no existencia de un número natural no interesante.
Algunos números naturales son interesantes. Por ejemplo, 1 es interesante porque es el primer natural, 2 lo es porque es el único primo par, 3 porque es el primer primo impar, y así sucesivamente. Pero, ¿qué se puede decir del 24, y del 424? Consideremos el conjunto de todos los números naturales no interesantes. Este conjunto debe contener uno que sea mínimo. Pero este número ya es interesante puesto que es el primero de los no interesantes. Como esto es una contradicción, no hay ningún número natural no interesante.
Como puede verse, probar la no existencia dentro de un conjunto A, de un objeto con la propiedad P, equivale a probar que todos los elementos de A tienen la propiedad no P.
Recíprocamente, si estamos seguros de que todos los elementos de un conjunto A tienen una propiedad P, una demostración de existencia de un elemento con la propiedad no P, nos pone frente a una paradoja en la medida que nuestra teoría prediga que debe pertenecer al conjunto A. Si la demostración es correcta, entonces nuestra teoría está en problemas.
Cuando se piensa en los pitagóricos, se los relaciona con un importante teorema, el Teorema de Pitágoras, que establece que el cuadrado del lado más largo de un triángulo rectángulo (hipotenusa) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados (catetos). De este teorema resulta que la diagonal de un cuadrado de lado 1 tiene una longitud h tal que $h^2 = 2$. Esta demostración fue anunciada por los seguidores de Pitágoras alrededor del 500 A.C. Pero es la que originó la primera gran crisis de las matemáticas. Fue una verdadera paradoja para los pitagóricos. Estuvieron tan confundidos que intentaron mantenerla en secreto por un tiempo, puesto que minaba sus creencias básicas.
Algunos antecedentes son necesarios para comprender el motivo de semejante desconcierto. Su líder, Pitágoras, enseñaba que todas las cosas tenían su fundamento en números, refiriéndose a los números naturales. Las medidas de las cosas, podían no ser números naturales, pero siempre se podían expresar como razones de dos números naturales, lo que se denomina fracciones en la escuela media.
Por tanto, siguiendo sus teorías, deben existir dos números naturales, a, b tales que su razón sea igual a h. Suponemos a y b coprimos, es decir, sin factores comunes. Entonces:

$$\frac{a}{b} = h \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Puesto que a y b son números naturales, también lo son a^2 y b^2. Y se ve que a^2 es un número par. Esto implica que a es par como se verá al final de la demostración.
Luego, si $a = 2m$, donde m es un número natural, se tiene, elevando al cuadrado:

$$4m^2 = 2b^2 \text{, o sea } 2m^2 = b^2$$

Por el argumento usado anteriormente, b debe ser par. Pero se sabe que a y b no pueden ser pares simultáneamente. Luego, el supuesto original de que la raíz cuadrada de 2 puede expresarse como razón de dos números naturales, es falsa.
Veamos una demostración indirecta de que si a^2 es par, entonces a es par. Supongamos que a^2 es par y que a es impar. Entonces se puede escribir $a = 2m+1$, por tanto
$a^2 = 4m^2 + 4m + 1$, que es claramente impar lo que contradice que a^2 sea par. Por tanto a debe ser par.
Que $\sqrt{2}$ no es racional (o sea, irracional), es un resultado destacable desde distintos puntos de vista. No sólo altera el fundamento de la creencia pitagórica, sino que presenta un primer ejemplo de un teorema cuya comprobación física no es posible. Si se prueba que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales, entonces se pueden dibujar triángulos

isósceles y medir sus ángulos con tanta precisión como se pueda y ver que el teorema funciona. Incluso si se prueba que algo no puede ocurrir, por ejemplo, que dos rectas no se encuentran, se pueden hacer dibujos muy precisos que permitan comprobarlo. Sin embargo, jamás por medio de un dibujo será posible ver si $\sqrt{2}$ es racional o irracional. Se puede aproximar $\sqrt{2}$ tanto como quiera con razones de números naturales, o sea, con números racionales. Por ejemplo, las conocidas aproximaciones: 1.4, 1.41, etc. Incluso se podrían mejorar estas aproximaciones. En otros términos, un teorema del tipo "los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales" podría ser un teorema para el cual existe un argumento que admita algún cálculo o medida visual, pero la irracionalidad de $\sqrt{2}$ es puramente matemática.
Espantados por este resultado, los griegos decidieron que las longitudes (y otras magnitudes) debían ser tratadas de forma diferente a los números. Después de los pitagóricos, Eudoxio desarrolló una excelente *Teoría de las Magnitudes*, que eran consideradas como distintas de los números. Esto dio a las matemáticas griegas una personalidad especial, con predominio de la geometría a expensas del álgebra. Lo que hoy llamamos un *cambio de paradigma*.
Los griegos sabían medir cualquier segmento con toda la precisión que desee como razón de dos números naturales. Que existiesen segmentos que no podían ser medidos exactamente por este método, parecía imposible. Puede que los griegos estuvieran en lo cierto. Cuando los matemáticos finalmente decidieron incorporar los números irracionales a la aritmética, se presentaron todo tipo de problemas. Aún, hoy día, es cierto que no hay aplicación física directa de los números irracionales, ya que nadie puede medir nada con un grado de precisión mayor que el que puede ser expresado por números racionales. En algún sentido, los números irracionales sólo tienen interés teórico (Si bien las aproximaciones racionales deben ser usadas para los cálculos en muchas partes de las matemáticas relacionadas con los números irracionales). Su súbita aparición en matemáticas fue no sólo sorprendente, sino que resultó, dado lo que los pitagóricos esperaban de las matemáticas, una paradoja insoluble, ya que no podían explicarlo desde sus conocimientos. Hoy ya no es considerado una paradoja, pues no contradice nada de lo que la gente sabe que es cierto. Pero la ganancia de haber agregado los irracionales a los racionales para construir los números reales, redundó en la potente teoría del cálculo infinitesimal, base del Análisis Matemático.
Modernamente, podemos dar una extensa lista de muy útiles teoremas de existencia.
Por ejemplo, el Teorema de Rolle y el Teorema de Bolzano del Análisis son los primeros ejemplos de teoremas de existencia muy útiles. Para no mencionar los teoremas de existencia de punto fijo o de soluciones de ecuaciones diferenciales.
Cuánto más avanzado sea el resultado, pueden ser necesarias construcciones más sofisticadas que involucran teoremas de existencia de otros objetos.
Uno de los ejemplos elementales de demostración de existencia que ejerce un efecto de muy profunda incredulidad entre los no matemáticos (quizás por su inocente confesión de nuestro credo matemático) es el que sigue:

Teorema 1. *Existen dos números irracionales a y b tal que* a^b *es racional.*

Demostración: En efecto, $\sqrt{2}$ es irracional. Entonces, si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, el problema se resuelve con $a = b = \sqrt{2}$. De lo contrario, se resuelve con $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $b = \sqrt{2}$, pues:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$$

Aquí, inmediatamente surgen algunos interrogantes:
¿Bien, pero cuál de las soluciones es la que vale?
¿Pero $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ podría ser racional? (No tiene aspecto…)
Ahora, para sacarnos la duda, podemos recurrir al teorema de Gelfond-Schneider.
Para entender este teorema hacemos un curso acelerado de idioma de ecuaciones algebraicas.

Definición. Un número complejo α se dice un *número algebraico*, si verifica una ecuación polinómica de la forma $\alpha^n + r_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + r_1\alpha + r_0 = 0$, donde los r_i son números racionales. Un número complejo que no es algebraico se dice *trascendente*.

Así, $\sqrt{2}$ es algebraico, pues $\sqrt{2}^2 - 2 = 0$. Cualquier número racional *r* es algebraico, pues es raíz del polinomio $X - r$.
El teorema de Gelfond-Schneider es un resultado que establece la trascendencia de una gran familia de números. Fue probado originalmente por Alexander Gelfond en 1934 y de nuevo de forma independiente por Theodor Schneider, en 1935.

Teorema 2 (de Gelfond-Schneider). *Si* α *y* β *son algebraicos,* β *es irracional, y* $\alpha \neq 0,1$*, entonces* α^β *es transcendente.*
Para ser más técnico, cualquier rama de α^β es trascendente.

Según este teorema entonces, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es trascendente y por lo tanto irracional.
Luego, el Teorema 1 queda demostrado exhibiendo la identidad:

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2$$

Y ahora, ¡cuán creíble y elegante nos resulta la demostración del Teorema 1!
Stan Dolan ha demostrado recientemente [2], que prácticamente todos los números racionales en el intervalo $(1,\infty)$ son de la forma a^a, donde a es irracional.
Más precisamente:

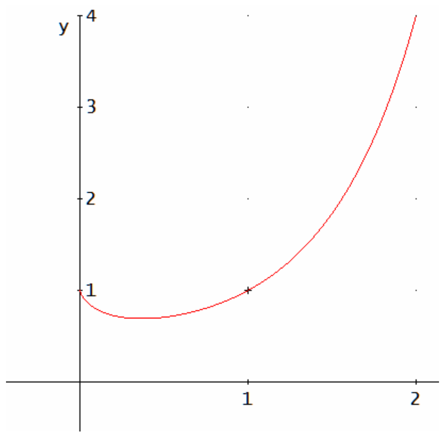
Teorema 3. (Dolan) *Si* $r \in \left(\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \infty\right)$ *es un racional que no es de la forma* n^n *con* n *natural, entonces existe un irracional* a *tal que* $r = a^a$.
Demostración: Consideremos la función:

$$f:\left(\frac{1}{e},\infty\right) \to \left(\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}},\infty\right), \text{ definida por } f(x) = x^x$$

Entonces:

$$f'(x) = x^x(1 + \ln(x))$$

Para $x > \frac{1}{e}$ esta función derivada es positiva, lo que garantiza que la función *f* es monótona creciente y por lo tanto, siendo continua, una biyección entre los dominios dados (usamos el Teorema de Bolzano).



Gráfica de la función $f(x) = x^x$

Sea $r \in \left(\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}, \infty \right)$ racional. Existe $a \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right)$, tal que $r = a^a$.

Supongamos que $r = \frac{p}{q}$ y que $a = \frac{n}{m}$, con *p*, *q* naturales sin factores comunes, y lo mismo para *n* y *m*.
Entonces:

$$\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{p}{q}, \text{ lo que implica } q^m n^n = m^n p^m$$

Si $m = 1$, entonces $r = n^n$. Vamos a demostrar que este es un caso excepcional. En otras palabras, veamos que suponer $m > 1$ lleva a una contradicción. Desde que *m* y *n* son primos entre sí, vemos que m^m divide a q^m y como *q* y *p* son también primos entre sí, vemos que q^m divide a m^n. Tratándose de números naturales, deducimos que $q^m = m^n$.
En particular, $m > 1$ implica que $q > 1$, así que usamos el Teorema Fundamental de la Aritmética sobre la unicidad de la descomposición en factores primos, y deducimos que el conjunto de primos que dividen a q es el mismo que el conjunto de primos que dividen a m.
Sea p un primo común en las factorizaciones de q y m. Escribimos $q = p^i t$ con $i > 0$ y t coprimo con p. También $m = p^j u$ con $j > 0$ y u coprimo con p.
Luego la identidad $q^m = m^n$, se transforma en $p^{im} t^m = p^{jn} u^n$ y, nuevamente por unicidad de la descomposición en factores primos debe ser $im = jn$. Como p^j divide a m, vemos que p^j divide a jn. Desde que m y n no tienen factores comunes, resulta que p^j divide a j. Pero entonces $2^j \le p^j \le j$, lo cual es una contradicción, pues para cada natural j vale que $j < 2^j$.
Esto termina la demostración.

CONCLUSIONES

En virtud de lo analizado, podríamos clasificar las demostraciones de existencia en tres tipos.
1) Demostraciones de existencia de objetos que rápidamente se perciben útiles para aplicaciones ulteriores y que pasan a ser de uso cotidiano. Aquí incluimos las demostraciones de existencia que hacen caer paradigmas, como la del dilema pitagórico.
2) Demostraciones de existencia diseñados sin otra finalidad que poner de manifiesto aspectos peculiares del paradigma matemático. Por ejemplo, la Proposición 1 y el Teorema 1 anteriores.
Claramente este tipo de demostraciones pueden ser adaptadas a una forma elemental y entretenida para implementaciones didácticas. Siempre invitamos a nuestros alumnos de Profesorado buscar o crear este tipo de demostraciones.
3) Demostraciones de existencia como el Teorema 3 de Dolan anterior, que si bien profundiza una situación planteada en el Teorema 1, obtiene un resultado que parece más orientado a los fundamentos de la matemática y a satisfacer cierta percepción estético-filosófico de la ciencia.
Las demostraciones de tipo 3) justifican, entre otras cosas que la Matemática es también una actividad intelectual en la que se busca una cierta clase de belleza intelectual, solamente accesible - como afirmaba Platón- a los ojos del alma. Sin querer siquiera interpretar lo que esto signifique, creemos que una currícula de Educación Matemática en la formación de Profesores debe reservar siempre un espacio para que los futuros educandos tengan la oportunidad de reflexionar y debatir este costado estético-filosófico de la ciencia.

Las concepciones que tengan los profesores o profesoras sobre la naturaleza de la Matemática van a influir de manera sustancial sobre sus estrategias de trasposición didáctica y su práctica profesional en general.
Respecto a la formación en Fundamentación de la Matemática, será conveniente tratar las tres corrientes de pensamiento: la escuela logicista, la escuela intuicionista y la escuela formalista.

REFERENCIAS

- BUNCH, BRYAN. 1987. *Matemática Insólita - Paradojas y Paralogismos,* Ed. Reverté.
- DOLAN, S. 2012. *A rational number of the form a^a with a irrational*, The Mathematical Gazette, v 96 n 535. March 2012, 106-108.

Web

- *Matemáticas y su didáctica para maestros*

http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf

- Ministerio de Educación de la República del Perú. *Fascículo 1: Naturaleza, evolución e importancia de la matemática*

http://sistemas02.minedu.gob.pe/archivosdes/fasc_mat/04_mat_d_s1_f1.pdf