**CB 07**

# EVALUACIÓN CONTINUA A TRAVES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS PARA MEJORAR LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

**Gladys Carmen MAY, María Laura ALIAGA, Marcela Natalia BARACCO, Rita Karina OLGUÍN, Graciela del Valle ECHEVARRÍA**

**Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales - UNSL**
**Ruta Provincial Nº 55 Extremo Norte - Campus Universitario**
*gcmay@fices.unsl.edu.ar aliagalaura@gmail.com mbaracco@fices.unsl.edu.ar*
*rkolguin@fices.unsl.edu.ar gecheva@fices.unsl.edu.ar*

**Palabras Clave:** Evaluación, errores, resolución de problemas, registros de representación.

## RESUMEN

El presente trabajo consiste en el análisis de las respuestas dadas por alumnos de la asignatura Análisis Matemático II de la Carrera de Licenciatura en Administración en un "parcialito" (ejercicio o preguntas teóricas que se toma antes comenzar con la clase de actividades prácticas). El mismo, consiste en un problema sencillo de aplicación a la economía, donde los estudiantes deben utilizar superficies cuadráticas y curvas de nivel.

Se analizan las dificultades que presentaron los alumnos al resolver esta actividad. Los resultados son comparados con los de dos años anteriores, donde se observó, que la mayoría de los alumnos no resolvieron o resolvieron incorrectamente un problema similar al analizado en esta experiencia. A causa de estos resultados se han ido modificando las teorías y guías de trabajos prácticos incorporando en casi todas las unidades situaciones problemáticas aunque sencillas pero aplicadas a la carrera y además se agregó la toma de "parcialitos" en todas las clases con la pretensión de brindar a los alumnos una respuesta clara sobre el avance de su aprendizaje durante el dictado de la asignatura.

Este diagnóstico es de tipo exploratorio y con el objetivo de mejorar nuestra práctica docente.

## INTRODUCCIÓN

El presente trabajo, que forma parte de una investigación más amplia, se llevó a cabo en el primer cuatrimestre de 2012 con alumnos de segundo año de la carrera Licenciatura en Administración. Surge de la observación que viene realizándose desde años anteriores frente a las dificultades que presentan los alumnos a la hora de resolver problemas aplicados a la economía. Según May, G. y otros (2011), debería ser un objetivo deseable considerar la resolución de problemas como el eje alrededor del cual giran las clases, para contribuir a desarrollar un pensamiento reflexivo y crítico, dando la posibilidad de modificar visiones negativas acerca de la Matemática. Entendemos, por lo tanto que la función esencial de la educación se encuadra en tres metas generales (Perkins, D. 1995): retención, comprensión y uso activo del conocimiento.

Obviamente la posibilidad de actuar flexiblemente con el conocimiento no es algo que pueda hacer el alumno de manera solitaria, sino acompañado de los docentes y sus prácticas. Es por esta razón que desde el año 2009 se vienen modificando nuestras prácticas en virtud de realizar una evaluación continua sobre el alumno. Durante el ciclo 2009-2010, se comenzaron a integrar problemas de aplicación a la economía en la práctica. Desde el año 2011 comenzamos a separar la ejercitación práctica en dos partes: por un lado, los alumnos hacían en clase ejercicios que llamamos "obligatorios", con los cuales accedían al presente, y por otro lado, realizaban ejercicios que llamamos "complementarios", que el alumno completaba fuera del horario de clase y debía presentarlos en una fecha anterior al parcial coordinada entre profesores y alumnos. Si bien con esta metodología los alumnos estaban más pendientes de los temas de la asignatura, vemos según el estudio realizado por May, G. (2011), que los resultados no variaron demasiado entre el año 2009 y 2011. Por esto, agregamos a la propuesta anterior, el trabajo con evaluaciones permanentes que llamamos "parcialitos". Las mismas se realizan al empezar o terminar la clase y cuentan con ejercicios sencillos o conceptos teóricos que hacen que el alumno esté en un contacto permanente con la teoría y la práctica de la asignatura. Por otro lado, nos permite ir modificando nuestras prácticas de enseñanza a medida que se va dictando la materia, y reforzar aquellos contenidos que presentan mayores dificultades, antes de ser evaluados en el parcial. Coincidimos con Bolívar, A. (2002), en que mejorar los procesos de evaluación conduce sin duda a la mejora de la enseñanza.

## MARCO TEORICO

Al enseñar matemática no sólo nos limitamos a la parte del currículo que se consigna en completar los programas y temas de estudios, sino que también debemos activar y modificar los procesos de pensamiento que los alumnos ponen en funcionamiento, tales como: abstracción, demostración, razonamiento bajo hipótesis y planteamiento y resolución de problemas.

Nuestro interés por las situaciones problemáticas, reside en que las mismas constituyen no solo unas de las vías principales para la asimilación de los conocimientos, la formación de habilidades y hábitos matemáticos en los alumnos, sino también, como preparación para enfrentar de manera independiente, las diferentes tareas que le plantean la vida profesional. Por lo mismo, creemos que la resolución de problemas juega un papel muy importante en el desarrollo de la práctica docente en la enseñanza de la matemática en la Universidad. Además, es fundamental mostrar a los alumnos que cursan carreras de Ciencias Económicas, que las Matemáticas son una herramienta necesaria para abordar situaciones reales, por lo tanto el alumno debe aprender a desarrollar las distintas estrategias a utilizar en el tratamiento de un problema. Creemos que la resolución de problemas es mucho más rica que la aplicación mecánica de un algoritmo, pues implica crear un contexto donde los datos guarden una cierta coherencia.

Sin duda, el docente debe tener mucho cuidado al seleccionar problemas, ya que la resolución de los mismos, implica el desarrollo de un proceso lógico, que sólo se puede iniciar con una adecuada comprensión de la situación problemática. Es preciso que el estudiante llegue a tener muy claro de qué se está hablando, cuáles son los datos que se conocen. A su vez, como la mayoría de los problemas a resolver por los alumnos se plantean en forma escrita, la interpretación del texto se constituye en un elemento crítico para comprender el problema, por lo que el docente debe prestar especial atención a que el enunciado del problema sea debidamente comprendido.

Por lo expuesto anteriormente, sabemos también que la evaluación es una parte importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje, y por ende, una necesidad ya que significa: valorar, comprender y saber que se educa al hacerlo, preguntándonos qué está pasando con nuestros alumnos. El tema de la evaluación representa una de las áreas de mayor complejidad en el campo de la acción docente; desde su función como instrumento de formación, hasta su función como instancia reflexiva, en que se cuestiona todo el proceso de enseñanza y aprendizaje. La evaluación, a su vez, debe emplearse como una instancia de análisis, reflexión y punto de partida para la toma de decisiones por parte del docente.

En nuestra sociedad la idea de evaluación no está relacionada directamente con el aprendizaje, no es una instancia más, sino una instancia de premio – castigo. Debemos revertir el pensamiento tradicional que supone que aquellos alumnos que obtienen mayores calificaciones, han comprendido los conceptos, y a partir del análisis de las evaluaciones, mejorarlas de manera que el estudiante, al resolverlas sepa que con ellas pueda revisar conceptos, reparar el error, en definitiva, "aprender".

Además, examinar las concepciones del error no es un tema menor ni una pérdida de tiempo. Desestimar el error tiene graves consecuencias, como dice Piaget (2002) no debemos ocultarlo ni evitarlo, ya que la ocultación del error, paradójicamente, impide el aprendizaje. El error no es equivocación, sino que muestra el estado actual de las estructuras del conocimiento del alumno.

Es por esto, que a través de la evaluación continua que realizamos, podemos evaluar procesos y no sólo resultados, evaluar tanto lo que el alumno sabe como lo que no sabe, acompañando de este modo, los tiempos del proceso de aprendizaje. Sin duda, esta es una tarea para nada sencilla, ya que en el momento de elaborar las evaluaciones, los docentes además debemos asegurarnos de que verdaderamente adquieren conocimiento. Para esto, el monitoreo de las distintas etapas de la enseñanza, permite ir haciendo los ajustes necesarios para mejorar la calidad del proceso educativo. Por el mismo motivo, es una tarea delicada, compleja y que requiere mucho compromiso.

## ANALISIS DE LA ACTIVIDAD

Para buscar los caminos o idear un plan para poder resolver problemas muchas veces es necesario utilizar diferentes registros de representación, como gráficos, tablas, ecuaciones. Para ello se recurre a Duval (1998) con su Teoría de las Representaciones Semióticas.

Los alumnos deben aprender a realizar como una actividad necesaria, conversiones en distintos registros. La coordinación entre ellos es de suma importancia para el desarrollo del pensamiento. Este cambio de registros no se realiza en forma espontánea, pues el pensamiento moviliza un solo registro de representación. Con el propósito de analizar las dificultades que se les presentan a los alumnos al resolver un problema, donde tienen que realizar conversiones de registros, se analizaron 60 "parcialitos" de estudiantes de primer año de la carrera de Licenciatura en Administración sobre funciones de dos variables y curvas de nivel y se comparan estos resultados con los de dos años anteriores, donde los alumnos presentaron menores dificultades que las analizadas en este trabajo.

El análisis lo hacemos a través de un "problema" sencillo, es un problema económico al que se busca dar una interpretación matemática, como los que tienen en las clases prácticas, el cuál fue adaptado del libro Cálculo Aplicado de Warner Stefan (2002; 453). El tema de la actividad es sobre cuádricas y curvas de nivel correspondientes a la primera unidad de la asignatura.

El "parcialito" que se analiza es un problema con preguntas matemáticas que relacionan conceptos económicos como costos, producción, etc.

Aclaramos que la intención del problema no es que los alumnos comprendan económicamente, si no que se familiaricen con términos específicos de su carrera, y que utilicen la matemática como herramienta para su comprensión y resolución. Cabe destacar, que en los dos últimos años se fue incorporando mayor cantidad de problemas de aplicación en las guías de actividades prácticas, aunque sencillos, como el que presentamos, pero con el fin de que la función f(x,y), represente la función costo, productividad, demanda, etc. También se utilizaron situaciones problemáticas para introducir algunos conceptos, como por ejemplo el de integrales definidas, derivadas parciales, etc.

La actividad ("parcialito") analizada es:

El costo C en pesos para remodelar un bar se relaciona con la cantidad ***x*** de carpinteros y con la cantidad ***y*** de electricista contratados de acuerdo con:

$$C(x,y) = 50\,x^2 + 50\,y^2 + 15000$$

a) Grafique la función Costo.

b) De ser posible, grafique las curvas costo constante para C = \$25000 y C =\$ 3000. ¿Qué representa cada curva con respecto al costo?

El objetivo de la parte a) es analizar cómo los alumnos realizan la conversión del registro algebraico al gráfico. Antes de realizar dicho análisis observamos que ningún alumno tuvo en cuenta el dominio de la función, ya que todos consideraron el paraboloide completo y no el primer octante, lo que evidencia que solo dieron una interpretación matemática de los datos.
Las categorías de análisis con sus correspondientes porcentajes se detallan en el siguiente cuadro:

| | |
|---|---|
| Reconocen la función costo C como un paraboloide circular (completo) | 34 % |
| Grafican correctamente la función por el método de trazas | 13 % |
| Grafican el paraboloide con las ramas hacia arriba. | 30 % |
| Hacen la gráfica de la función a escala | 0 % |
| Identifican el punto de corte de la función con el eje z | 30 % |
| No realizan la actividad | 15 % |

Las observaciones del ítem a) son:
El 34 % de los alumnos que realizan la actividad reconocen la función de costo como un paraboloide circular, grafican el paraboloide con ramas hacia arriba.
Otros alumnos identifican la función C con un plano. Por lo que utilizan para graficar la expresión segmentaria del plano.
El resto de los alumnos solo esbozan dibujos no representativos al ejercicio. (Por ejemplo, una recta, parábola, un cilindro etc.).
El 30% de los estudiantes considera que el punto de corte en z es 15000. Esto no significa que identifican la función costo con un paraboloide, sino que muchos interpretan la ecuación como la de un plano, por eso los puntos de corte que consideran son z = 15000, x = -300 ,y = -300.
La mayoría de los alumnos dibujan los ejes sin referencia, además no expresan en el gráfico la escala que utilizan; por ejemplo, marcan 15000 sobre el eje z, sin ninguna unidad de medida.
Otro error, que se observa es que dibujan un paraboloide con vértice en el origen del sistema de coordenadas.
En muchos casos se visualiza un tratamiento algebraico correcto, sin embargo se observan errores en la conversión al registro gráfico.
Otro error que se comete es de no reconocer la función costo como una superficie, grafican en el plano una parábola centrada en el origen con las ramas hacia arriba. Tres alumnos hacen el gráfico con las ramas hacia abajo
El 15 % no realiza la actividad, solo dibujan el sistema de coordenadas en el espacio.
Análisis de las respuestas de los alumnos que intentan resolver el ítem b)

| | |
|---|---|
| Reconocen la notación $C(x, y)$ como la variable $z$ | 45 % |
| Identifican las curvas de nivel | 32 % |

| | |
|---|---|
| Grafican correctamente las curvas de nivel | 5 % |
| Reconocen que en C = 3000 no hay curva de costo constante | 28 % |
| Grafican las curvas de nivel en el plano | 50 % |
| No realiza la actividad | 25 % |

En cuanto a encontrar la curva de costo constante para C =$ 25000:
Si bien sólo el 45% de los alumnos reconoce la función C con la variable z, como los ejercicios hechos en la práctica, muchos reemplazan la función C por la constante y al hacerlo cometen errores de operación o desconocen la curva obtenida, obteniendo como curvas de nivel rectas.
Una observación interesante es que algunos de los alumnos encuentran analíticamente la circunferencia como curva de nivel, pero al graficarlas consideran mal el valor del radio (toman r = 10000 o r = 200).
Muy pocos alumnos tuvieron en cuenta el dominio de la función, y consideraron la figura completa y no el primer cuadrante .Dos alumnos grafican las curvas de nivel en el espacio y no en el plano.
Para encontrar si es posible la curva de costo constante C = $3000, únicamente, reemplazando C(x,y) por 3000 y operando algebraicamente hasta llegar a -12000 = $50x^2 + 50y^2$ les permitió a los alumnos darse cuenta que no existe la curva de nivel. Ninguno de ellos visualiza gráficamente que el plano C = 3000 no corta a la función de costo y por lo tanto no hay curva de costo constante. Tampoco expresaron en lenguaje coloquial que con $ 3000, no alcanzan a cubrir el costo fijo de $15000.
Ningún alumno trata de realizar una interpretación del problema. Si bien todavía no poseen demasiados conocimientos de conceptos económicos, se esperaba que el alumno hiciera una relación lógica de los datos con la situación real planteada, como por ejemplo considerar valores de x y de y mayores que cero al tratarse de carpinteros y electricistas y así considerar un cuarto de circulo y no la circunferencia completa.

Comparación del ítem a)

| | 2012 | 2011 | 2010 |
|---|---|---|---|
| Reconocen que superficie es la función producción P (x, y) | 34 % | 60 % | 51,6 % |
| Grafican correctamente la función por el método de trazas | 13 % | 50 % | 3,2 % |
| Hacen la gráfica de la función a escala | 0 % | 23,3 % | 35,4 % |
| Identifican los puntos de corte de la función con los ejes coordenados | 30 % | 10 % | 29 % |
| No realiza la actividad | 15 % | 13,3 % | 16 % |

En el 2010 se dio una actividad similar donde la función costo era *C(x,y) = 240000 + 4000x + 6000y*. La mitad de los alumnos no reconocieron la función C(x,y) como un plano. Hubo problemas de pasajes de términos, por lo que no graficaron correctamente la función. Los que dibujaron correctamente utilizaron la ecuación segmentaria del plano. En el 2011 se les dio la función producción $P(x,y)= 24 - x^2 - y^2$ en esta oportunidad utilizaron el método de trazas pero no encontraron las intersecciones de la función con los ejes *x* e *y*. En este año se dio la misma superficie pero con las ramas hacia arriba, los resultados fueron inferiores a los obtenidos los años anteriores. Gran parte de los alumnos se olvidaron que tenían las variables *x* e *y* elevadas al cuadrado y dibujaron un plano. La mayoría usó la ecuación segmentaria;

incluso se puede observar en los desarrollos presentados por los alumnos que la variable $z$ desaparece como “por arte de magia”; escribían $-\frac{x^2}{300}-\frac{y^2}{300}=1$.

Consideramos que la representación grafica es una habilidad que tiene que ser aprendida y practicada por los alumnos, además de ser una herramienta muy útil en la resolución de problemas. A veces la representación gráfica de los datos de un problema pueden sugerirnos las estrategias para encontrar su solución.

A pesar que los alumnos realizaron ejercicios similares al analizado, se equivocaron al considerar que las variables pueden tomar cualquier valor y no consideraron valores positivos. Como son alumnos de primer año, tienen pocos conocimientos de economía, lo que se trata con este tipo de ejercicios es mostrarles que las matemáticas son útiles para su carrera y responder a las preguntas que se hacen con frecuencia ¿para qué sirve esto?, ¿donde lo voy a aplicar?¿para que estudio esto?

Vemos que los alumnos, presentan dificultades en visualizar y representar gráficamente las distintas superficies en el espacio tridimensional, a pesar de que en las clases prácticas ellos utilizaron los softwares Derive y Matlab para tener una representación visual de las superficies. Pensamos que se debe a que en el secundario ven poca geometría (por comentario de los propios alumnos) lo que dificulta a los alumnos para trabajar con superficies.

Comparación del ítem b)

| | 2012 | 2011 | 2010 |
|---|---|---|---|
| Reconocen la notación *C(x,y)* como la variable *z* | 45 % | 76,5 % | 76,9 % |
| Identifican las curvas de nivel | 32 % | 76,5 % | 38,4 % |
| Grafican correctamente las curvas de nivel | 5 % | 63 % | 15,4 % |
| Reconocen cuando no existe la curva de nivel | 28 % | 66 % | 30,8 % |
| Grafican las curvas de nivel en el plano | 50 % | 90 % | 53,8 % |
| No realiza la actividad | 25% | 13 % | 36 % |

En el 2010, los errores que cometen los alumnos son similares a los analizados en el 2011, pero en menor escala. Tuvieron dificultades al despejar las variables y simplificar las ecuaciones. Los resultados de este año muestran que los alumnos presentaron mayores dificultades con respecto a los años anteriores como se observó en el cuadro anterior.

Aunque este año los resultados fueron más bajos, lo positivo de la implementación de la evaluación continua es que, cuando se hace la devolución de los parcialitos a los alumnos ellos dicen “ahora caigo” en lugar de decir “ahora entiendo” haciendo referencia a los distintos errores que cometen en cada una de las evaluaciones. De esta forma se le brinda al alumno una instancia de reflexión y/o corrección de sus errores o “baches” conceptuales.

Suponemos que una de las causas de estos resultados, es que es un “parcialito” y por lo tanto no le dedican tanto tiempo a estudiar ni se sienten con la misma presión como lo hacen cuando preparan un examen parcial. Este estudio se continuará desarrollando con el análisis de los resultados de los exámenes parciales, que nos brindarán una visión mayor acerca de la eficacia de las instancias de evaluación que se vienen sumando año a año.

Como docentes intentamos mostrar al alumno que la Matemática es relevante y cargada de significado y sentido para su formación profesional. Uno de los objetivos esenciales y al mismo tiempo una de las dificultades principales de la enseñanza de la Matemática en las Ciencias económicas es articular los contenidos disciplinares con las aplicaciones en el campo profesional.

El empleo de las herramientas matemáticas permite obtener una solución al problema que es válida en el mundo de las matemáticas. Corresponde ahora interpretar dichos resultados a la luz del contexto del problema, es decir, a la luz de la situación problemática que pertenece al mundo real, y al mismo tiempo evaluar su consistencia. Lo que se busca es que cada una de las situaciones planteadas adquiera sentido en la medida en que el estudiante comprenda la relación entre las Matemáticas y las Ciencias Económicas, de manera que éstas se conviertan en actividades que generen aprendizaje; y al mismo tiempo, construcción de conocimiento tanto matemático como económico.

## REFLEXIONES FINALES

✓ Del análisis efectuado sobre las tareas solicitadas, concluimos que los alumnos deben aprender a realizar conversiones en distintos registros como una actividad necesaria, por lo que la coordinación entre dichos registros es de vital importancia para el desarrollo del pensamiento. Dado que, entre las habilidades matemáticas necesarias para resolver un problema, se combinan generalmente, tratamientos y conversiones, la diferenciación de registros de representación y la coordinación entre ellos son puntos importantes para el desarrollo del aprendizaje.

✓ Algunos beneficios de utilizar la enseñanza basada en la resolución de problemas están relacionados con la motivación de los alumnos, en tanto propicia una contextualización de las situaciones, próxima a lo que podría encontrarse en el mundo real, siendo esto un intento por superar la ruptura que suele producirse entre las experiencias mundanas de los alumnos y las prácticas universitarias. Por otra parte, este enfoque promueve un pensamiento de orden superior, la cooperación y la autonomía, que propicia que el alumno asuma el desafío de encontrar un camino de resolución sin partir de un modelo estandarizado.

✓ Es frecuente observar que una vez resuelto el problema matemático no interpretan económicamente los resultados obtenidos, algo en lo que seguramente debemos seguir trabajando.

✓ A pesar de ser alumnos de Análisis Matemático II, que ya poseen un entrenamiento en asignaturas anteriores, se observan errores en despejes y simplificación de ecuaciones.

✓ Creemos que al evaluar debemos tener en cuenta lo que Eduard Suchman (1965) afirma: "un evaluador debe utilizar todo tipo de técnicas para evaluar".

✓ La evaluación es inherente a la enseñanza. Siempre es posible mejorar y ampliar las estrategias para que la evaluación contribuya con el desarrollo de los alumnos y con la mejora de la enseñanza misma.

✓ La evaluación debe servir para reflexionar, hacer un control de calidad sobre lo que se hace, analizar, tomar decisiones. Una de ellas, en el caso del aprendizaje, sería calificar al alumno. Pero no debería ser la única ni la más importante.

✓ La evaluación de los aprendizajes es un proceso formativo, que permite al alumno ampliar el conocimiento de si mismo, sirviéndole para mejorar sus propias capacidades.

## BIBLIOGRAFÍA


- BOLÍVAR, ANTONIO. 2002. "Compromiso de la evaluación educativa". Pearson Prentice Hall
- CHANAY, ROLAND. 1994. *Aprender (por medio de) la resolución de problemas.* En Parras C& Saiz, I. (Comp) Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones. Capítulo III. Paidos.
- CONTRERAS, LUIS. Marco teórico sobre el papel de la resolución de problemas en el aula. Capitulo 3. Disponible en http:// www.uhu.es/tesistexto/luis.contreras/cap3.htm

- DUVAL, R. 1998. *Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.
- KILPATRICK, J. 1985. A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In E.A. Silver, Teaching and Learning mathematical problem solving: multiple research perspectives, pp1-16 Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- MAY, GLADYS y OTROS. 2008. "*Un problema de economía y su resolución matemática"*. Actas de II Reunión Pampeana de Educación Matemática. La Pampa.
- MAY, GLADYS y OTROS. 2011. *"Utilizar la resolución de problemas como una estrategia de enseñanza*" Actas de XXVI Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de la Facultad de Ciencias Económicas y Afines.
- PEREZ, JAIME, NUCAMENDI, ANDRES. 2002. *Problemario de matemáticas para administración y economía*. Editorial Thomshon.
- PERKINS, D. 1995. *"La enseñanza y el aprendizaje. La teoría I y mas allá de la teoría".*capitulo 3, Pág. 70- Barcelona. Gevisa *"*
- PERKINS, D. 1999. "*La enseñanza para la comprensión: guía para el docente*.".Buenos Aires. Paidos.
- PIAGET. 2002.
- SANJURJO, LILIANA, VERA, MARÍA TERESA. 2006. Aprendizaje significativo y enseñanza en los niveles medios y superior .Ed. Homo sapiens.
- SCHOENFELD, ALAN H. 1985. Ideas y Tendencias en la resolución de Problemas. OMA.
- WANER, STEFAN, COSTENOBLE, STEVEN R. 2002. Cálculo Aplicado. 2º Edición. Editorial Thomson.