

CB 11**DISEÑO DE UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA EN RELACIÓN AL ESTUDIO DIDÁCTICO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA CON DOCENTES DE UNA ESCUELA DE BIOLOGÍA MARINA****Valeria B. LEGUIZAMÓN, Julia CORRALES****Fundación YPF - Universidad Nacional de la Patagonia Austral - Unidad Académica
Caleta Olivia****Macacha Güemes 515 - Piso 25 - C.A.B.A. Ruta 3 Acceso Norte - Caleta Olivia
*vleguizamon177@yahoo.com.ar*****Palabras Clave:** función cuadrática, análisis didáctico, contexto real.**RESUMEN**

En este espacio de comunicación se pretende dar a conocer el proceso de construcción colectiva de una práctica áulica de matemática sobre el tema “Función Cuadrática”. Esta propuesta fue elaborada por docentes de distintas áreas de conocimiento pertenecientes a una misma institución, cuya orientación es Biología Marina. Las actividades que los docentes elaboraron para llevar al aula, fueron contextualizadas en relación a la orientación del establecimiento.

Se intenta recorrer algunos momentos del trabajo desarrollado por el equipo de docentes, en donde surgieron interrogantes de diversa índole y fue necesario tomar decisiones colectivas en pos de llevar una práctica áulica analizada desde distintos puntos de vistas.

INTRODUCCIÓN

Este proyecto de enseñanza se desenvuelve en la Escuela de Biología Marina y Laboratorista N° 1 de la localidad de Caleta Olivia, provincia de Santa Cruz, en el marco de la capacitación en el área de matemática, que desarrolla la Fundación Y.P.F. desde el Programa de Fortalecimiento de Escuelas Técnicas “Una escuela hacia el futuro”. La propuesta vinculada al área de matemática originariamente fue diseñada y coordinada por las Doctoras en Didáctica y Matemática; Patricia Sadovsky y Carmen Sessa, la coordinación del equipo de capacitación de la zona sur a cargo de la profesora Julia Corrales.

Durante el primer año de trabajo se develaron las ideas que los docentes tenían sobre cómo se enseña y aprende matemática u otras ciencias, analizando los desafíos actuales a los que nos enfrentamos como docentes; debido a que era un grupo integrado por distintas disciplinas. Se intentó dar respuesta a algunos interrogantes desde los distintos significados que cada uno posee debido a su formación específica; ¿cómo se desenvuelven los alumnos en la producción matemática a partir de las interacciones y de las actividades que se les proponen? ¿Cómo se vive en el aula la interacción con los alumnos y la de los alumnos con los saberes? ¿A partir de que tipos de tareas? ¿Cómo aprenden y generan un andamiaje útil para la construcción del conocimiento científico, el matemático y el lenguaje específico? (pregunta aportada por la docente de oceanografía).

Intentamos pensar y dar cuenta de ¿cuáles serían algunos indicadores del contrato pedagógico y de las negociaciones que ocurren en el aula entre los docentes y alumnos? ¿Somos conscientes de la distancia entre el saber específico, el conocimiento a enseñar y el enseñado? ¿Qué significado se le otorga a todo esto?

El grupo sostuvo reuniones semanales de tres horas con asistencia del coordinador que acercaba propuestas vinculadas al estudio sobre la problemática del álgebra en el nivel polimodal para ir dando significado desde el tratamiento de una temática matemática específica a algunos de los interrogantes anteriores, con el objetivo de aportar elementos de análisis didáctico-matemático para debatir tareas que logren involucrar a sus alumnos en los desafíos del aprendizaje algebraico.

En el segundo año se convocó a los docentes a pensar en el diseño de una propuesta que fuera innovadora, estudiándola y pensándola colectivamente para ingresar con ella en el aula, con el objeto de pensar en el tipo de trabajo que estaría a cargo de los alumnos y cuáles a cargo del docente que implementaría el proyecto en su aula. La temática elegida por los docentes fue “Función Cuadrática”, para un primer año del nivel polimodal, intentando vincularla a contextos que respondieran a la orientación de la institución.

SELECCIÓN Y ANÁLISIS DEL TEMA

Basados en un trabajo previo de análisis de registro de una clase de función lineal y lo planteado en el libro de Sadovsky y Sessa, nos preguntamos ¿Qué cuestiones se pueden dar en el aula? ¿Cómo vislumbramos a los alumnos para proponerles ésta forma de trabajar?

Teniendo en cuenta el momento del ciclo lectivo en el que desarrollábamos esta propuesta de trabajo y además, el programa vigente, optamos por trabajar con la siguiente temática: función cuadrática con un grupo que nunca había ingresado al estudio de la temática en cuestión; el interrogante que surge inmediatamente es ¿qué trabajar de la función cuadrática?

Primeramente nos invadió un torbellino de ideas, debatimos y luego decidimos que sería conveniente trabajar. En forma grupal se planteó el interrogante: ¿qué trabajo sobre funciones tienen realizado los alumnos? Si se trabajó sobre función lineal, ¿qué se sabe? ¿Cuáles son los puntos de referencia que pueden tomar los alumnos para abordar el tema?

Como punto principal de apoyo optamos por la función lineal; pero entendiendo que hay cuestiones que se pueden tomar de ésta, y que funcionan de igual forma en la función cuadrática, pero también ¿con qué cuestiones “rompe” la función cuadrática? ¿En dónde se puede generar conflicto?

De la puesta en común, por parte de los docentes, surge lo siguiente:

Función Lineal	Función Cuadrática
Definición de función	
Variables: x, y	
Ubicación en el plano	
Dominio	El dominio se mantiene
Codominio	Codominio depende del máximo y mínimo
Interpretación del gráfico (lectura)	Ya no existe recta se pasa a una parábola:
Confeción de Tabla (Registro tabular)	<ul style="list-style-type: none"> • Ramas hacia arriba • Ramas hacia abajo • Existencia de máximo o mínimo
Gráfica de la recta (registro Gráfico)	
Ecuación general: $f(x)=ax+b$	Aparece el término cuadrático ax^2
	$a>0$ $a\neq 0$
	$a<0$
Pendiente	El coeficiente cuadrático determina la dirección de las ramas de la parábola.
<ul style="list-style-type: none"> ↗ Positiva (>0) creciente → Constante($=0$) constante ↘ Negativa(<0) decreciente 	Aparece el eje de simetría (se lo puede reconocer en un registro tabular y gráfico)
Intersección con los ejes (Siempre existe)	
<ul style="list-style-type: none"> • Intersección con el eje y: ordenada al origen, siempre es única (en un solo punto) 	Se mantiene la ordenada al origen, siempre es un punto.

<ul style="list-style-type: none"> • Intersección con el eje x, raíz, es única, en un solo punto (salvo cuando $a = 0$ y la recta no es una constante distinta de cero) Conflicto → <p>Condición de Paralelismo y Perpendicularidad Construir la ecuación dados</p> <ul style="list-style-type: none"> · 2 puntos · 1 punto y la pendiente 	<p>Intersección con el eje x:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Uno • Dos • Ninguna <p>Existe:</p> <ul style="list-style-type: none"> • forma polinómica • forma canónica (depende del vértice y del coeficiente cuadrático) (x_v, y_v) “a” • factorizada (depende de la existencia de raíces y del coeficiente cuadrático) x_1, x_2, a
---	--

Podemos apreciar que hay muchas cuestiones a tener en cuenta, pero que es necesario hacer un recorte de todo lo que se ha detectado en cuanto a los temas analizados. ¿Qué de todo esto se pretende trabajar en la propuesta?

Se decide realizar una introducción al modelo cuadrático pensando en el “rompimiento de la linealidad” y en los sistemas de representación algebraica:

$$f(x) = ax^2 \qquad f(x) = ax^2 + c \qquad f(x) = ax^2 + bx + c$$

La intención es que los alumnos puedan reconocer distintas formas de escribir la fórmula de una función cuadrática, dando razones de las condiciones que determinan que se trata de una función cuadrática, y que cada una de ellas porta una información particular sobre su representación gráfica.

SELECCIÓN Y ESTUDIO UNA DE LAS ACTIVIDADES

En un primer momento los docentes extrajeron una actividad de un libro de matemática¹, distinguiendo en ésta, la generación de un modelo cuadrático pasando por el contexto geométrico, al calcular áreas de rectángulos y cuadrados. Además del objeto matemático que deseábamos construir, nos dimos permiso para pensar y debatir dónde se hace presente esta temática en la formación de los alumnos de la Institución.

Estudio para la introducción al aprendizaje del tema como modelo contexto real.

Los docentes propusieron modificar la primera actividad, pensando en contextualizar la situación planteada en relación a una de las tareas que los alumnos llevan a cabo en la institución, vinculadas a su formación en biología marina donde utilizan, para los muestreos de organismos, el cálculo de distintas áreas en la costa de la localidad. En colaboración con una docente de Oceanografía perteneciente al grupo de trabajo, se generaron los siguientes interrogantes: ¿Qué es una muestra? ¿Cómo se hace un muestreo? ¿Existe una única forma de realizar un muestreo? ¿Dónde se realizan los mismos? ¿Cuáles son los organismos sobre los que se realiza el muestreo? Interrogantes que fueron contestados por la docente especialista del área, enriqueciendo al interior del grupo el modo de hacer y usar la matemática como herramienta desde la perspectiva de otras áreas de conocimiento.

¿Cómo modificar las actividades para que sea un problema real con sentido y posible de ser abordado por los alumnos? ¿Qué valores usar para “facilitar” al abordaje de la situación? Al modificar la actividad emergen nuevos cuestionamientos ¿qué unidad de medida elegir? ¿Qué valores son propios del contexto de la situación? ¿Utilizo sólo valores enteros? Es así que se

¹ SCHAPOSCHNIK (Coord.), GARAVENTA, LEGORBURU, RODAS, TURANO. *Cuadernillo de matemática de 9° año*. (Editorial Aique, Buenos Aires)

rescata la riqueza de la situación por el contexto numérico que permite abordar el modelo en su continuidad.

En una etapa intermedia se trataban de elaborar incisos que apuntaran a la secuenciación de la actividad con varios interrogantes siguiendo un camino que fuera real, en cuanto a las situaciones vividas en su salidas de campo, y a su vez garantizar que los alumnos se sintieran movilizados para abordar la situación desde lo que tenían disponible de sus saberes matemáticos con el objetivo final de encontrar un procedimiento general que permitiera producir la escritura algebraica.

Para ejemplificar lo realizado se presenta a continuación el diseño de la primera actividad:

Primera Actividad

Queremos realizar una salida de campo para analizar los organismos marinos que se encuentran en el Golfo San Jorge. En todos los casos de análisis la longitud es la mitad de la latitud. Las formas en las que se puede tomar un muestreo son: espiral, cuadradas, triangulares, etc.; en este caso se ha elegido un área rectangular.

- a) *¿Cuál será el área de análisis si la latitud es de 10 km?*
- b) *¿Cuál será el área de análisis si la latitud es de 15 km?*
- c) *¿Cuál será el área de análisis si la latitud es de 13,8 km?*
- d) *¿Cuál será el área de análisis para una latitud cualquiera?*

ANÁLISIS A- PRIORI

No fue tarea fácil, pero el trabajo realizado con los docentes durante el 2009 y el aporte de las docentes que son expertas en las salidas de campo, permitió agilizar esta tarea de anticipar, debatiendo qué puede surgir con cada consigna por parte de los alumnos. Cabe mencionar que no solo se pensó en los procedimientos que permitían arribar a la solución esperada, sino aquellas que podrían surgir a partir de poner en juego conocimientos disponibles, cuyas soluciones no fueran las pertinentes para la tarea demandada. Durante esta etapa se pone de manifiesto una constante preocupación, por parte de los docentes por el “poder hacer” de los alumnos; dudaban que ellos pudieran generar o llevar a cabo un trabajo autónomo para discutir, rehacer, cuestionar, resolver, criticar, aceptar, validar, en relación a las situaciones matemáticas que se estaban elaborando. Algunos docentes planteaban que esta manera de pensarse ellos en el aula y a este alumno haciendo solo, sin haber enseñado la teoría previamente, les generaba incertidumbre.

De este análisis surgen interrogantes tales como ¿qué resoluciones pueden realizar en los tres primeros incisos? ¿Cuáles serán los posibles errores de cálculo? ¿Qué elección de variables pueden generarse? ¿Qué modelos pueden producirse? ¿Cómo validar su equivalencia?

Todo este trabajo implicó anticipar y tomar decisiones.; a continuación se presentan algunas de ellas acerca de la primera actividad:

- ☞ Es necesario definir los conceptos de latitud y longitud. Esto no es sólo para clarificar los términos sino también para evitar errores de cálculo. Además se decide anexar una imagen del planisferio para apoyo visual.
- ☞ Se anticipa que los alumnos, en general, harán los procedimientos y cálculos esperados para contestar el valor de la superficie para latitudes determinadas. En cuanto al proceso de generalización y el uso de la variable “x” en el inciso “d” suponen que la mayoría de los alumnos llegarán a construir una fórmula, con un modelo que se corresponda con su forma de calcular en los incisos anteriores.
- ☞ Los docentes plantean hacer un corte después de las tres primeras consignas antes de pasar a la generalización, ya que en este último punto se trabajará con el objeto matemático nuevo disponible a partir de lo realizado. El trabajo desde su representación gráfica se decide plantearlo desde la gestión de la clase.

- ☞ Se anticipa que los casos posibles de generalización podrían ser los siguientes:

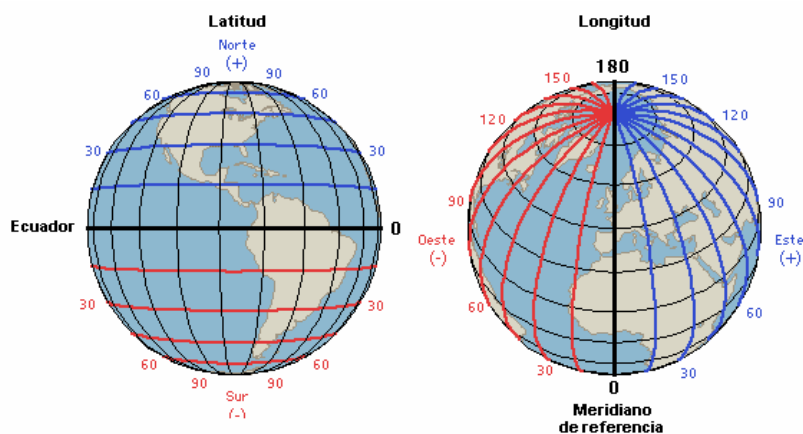
$$\frac{1}{2} x^2 = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = x^2 : 2$$

Pero entonces no se debe perder de vista que es necesario trabajar la equivalencia entre estos modelos que pueden emerger del trabajo sobre la situación; incluso si se utilizan distintas variables.

- ☞ ¿qué pasaría si alguno de los alumnos hace una tabla de valores con dos pares de puntos y traza una recta? Se reconoce que es muy probable que los alumnos se apoyen en lo que saben, podrían estar pensando en trazar una recta que pase por esos dos puntos encontrados. ¿Qué hacer si sucede esto? Los alumnos se podrían apoyar en la representación sintáctica de la función para descartar que sea lineal, aunque también lo podrían estar contrastando con distintas producciones que se generen en la puesta en común. Otra de las propuestas es dejar que grafiquen la recta y luego darles un valor que se encuentre entre esos dos puntos y analizar que éste no pertenece a la recta. Pero también se vislumbra que si se hace esto los alumnos pueden intentar trazar una poligonal. ¿Cómo romper con la linealidad? ¿cómo hacer emerger la curvatura? ¿qué hacemos desde la gestión de clase? Son interrogantes que se plantean como grupo. La intención es que los alumnos contesten que se trata de una “curva”, que ya no se tiene una recta. Se opta por trabajar este inciso en la gestión de clase, a modo de conclusión.
- ☞ La situación permite graficar solo una rama de la parábola, entendiendo que en el contexto de la situación las latitudes y longitudes consideradas deben ser positivas.
- ☞ Diseñamos posibles preguntas, que los docentes que ingresen al aula, pudiesen tener a disposición en momentos oportunos de la clase que colaboren con la gestión.

INGRESO AL AULA

La puesta en práctica se realizó en dos 1° años de la Institución a cargo de dos docentes del área de matemática. En estas instancias los demás integrantes del equipo se encargaban de tomar registro de las clases. Los alumnos pasaron al pizarrón a exponer sus procedimientos. Como se esperaba no se presentaron errores de cálculo en los tres primeros incisos, pero dedujimos que tener clara las definiciones y el apoyo gráfico fue un elemento que consideramos apresuradamente “positivo” para que esto ocurra. Pero como no es posible anticipar “todo”, resultó ser que al representar la situación gráficamente, los alumnos lograron la parábola con dos ramas, ¿cómo ocurrió esto?: los alumnos argumentaban que “en la imagen aparecían signos negativos hacia el oeste y sur, por lo tanto era posible considerar latitudes negativas, ya que el área seguía siendo positiva: menos por menos más”. Aunque fue necesario trabajar esto en clase, los alumnos pudieron distinguir una disposición gráfica distinta a la recta que ya conocían, que decidieron llamar rápidamente “la sonrisa”, por la forma de la parábola con ramas hacia arriba, o concavidad positiva. Este trabajo no estaba previsto, la intencionalidad de la práctica era trabajar la completitud de la parábola desde un contexto intra-matemático, pero lo que al principio pareció obstaculizar el desarrollo de la práctica que los docentes anticipaban, terminó adelantando el trabajo.



En uno de los cursos hubo un solo caso en donde los alumnos generaron el trazado de dos rectas, pero no fue necesario un trabajo intenso de rompimiento con la linealidad, ya que al socializar producciones con el resto de sus compañeros, pudieron advertir que no se trataban de rectas, sino de curvas.

En relación a la equivalencia de expresiones, surgieron distintos tipos de escritura, coincidentes con aquellas que se habían anticipado, aunque en varios casos se utilizaron distintas variables, los alumnos pudieron validar la equivalencia sin dificultades apoyándose en propiedades matemáticas para generar la equivalencia entre distintas expresiones sintácticas. Sólo en un grupo de uno de los cursos, se presentó problemas en la escritura acerca de: ¿ $x \cdot x = x^2$ o $x \cdot x = 2x$? La docente en este caso lo trabajó específicamente con el grupo. (Esto lo pudimos registrar en uno de los audios)

Cabe mencionar que conforme se iba avanzando con la construcción del modelo cuadrático en sus distintas escrituras algebraicas, los alumnos no desechaban su primera generalización, sino que iban agregando los términos correspondientes a ésta primera construcción. Por ejemplo:

CONSIDERACIONES FINALES

Desde el equipo de capacitación compartíamos que construir una propuesta, análisis de las actividades, anticipaciones de su puesta en el aula pensando en los posibles procedimientos de los alumnos y las intervenciones docentes, no pretendía ser un guión acabado para que el docente se apropie de él y lo actúe.

Uno de los momentos más difíciles en el grupo fue imaginar posibles procedimientos de los alumnos y las interacciones a propósito de ello, pero a su vez éstos momentos fueron productores de conocimiento en torno a la temática, y a reconocer como la misma es una herramienta útil en distintas tareas prácticas que los alumnos llevan a cabo en otros espacios específicos que transitan en la institución.

Es importante destacar lo rico que fue la interacción, al permitir conocer, apropiarse de técnicas, conocimientos y posicionamientos de los saberes científicos y didácticos que circulan en las otras áreas específicas de la modalidad de la institución.

Se rescata la fortaleza y enriquecimiento del aporte de las distintas maneras de pensar, sobre todo por la participación de docentes que dictan las siguientes asignaturas en la Institución: Física, Laboratorio, Oceanografía, Bioestadística, Subproductos de Pesquerías y Matemática. Confiar; creer y valorar la posibilidad de que los alumnos que no hacen, cuando se los convoca desde otro tipo de tareas, participan y producen más de lo esperado.

Cabe mencionar que la Propuesta de trabajo de este grupo continuo con otros problemas que ofrecieron la posibilidad de dar tratamiento de la función cuadrática en un contexto intramatemático.

Por último, resultó significativo y enriquecedor para el equipo de este Programa escuchar las voces de los docentes participantes de esta capacitación, para reconocer como han vivido los procesos de construcción, implementación y reflexión de la propuesta de este proyecto de enseñanza, para identificar qué nuevos conocimientos sobre el análisis de sus propias prácticas ellos han identificado como sobresalientes y como aportó al fortalecimiento de la interacción y el trabajo con sus alumnos, desde una participación muy activa y responsable de los docentes de distinta formación al involucrarse en el hacer matemático en forma colectiva que para la mayoría era novedoso en el espacio de la institución, sumándose a procesos de producción escrita, de observación y revisión:

[haciendo referencia al momento del diseño de la propuesta] todos los interrogantes que se planteaban, los aportes de cada profe, sus experiencias frente a los alumnos fueron un aprendizaje muy grande para mi formación inicial; (...)sin darme cuenta utilizaba términos o ideas que leíamos en los textos que nos proporcionaron en esta capacitación...

Hasta que llegó el momento de llevar al aula las actividades planificadas, tuvimos que observar las clases, en la cual surgieron cosas que habíamos previsto y otras que no, pero se pudo llegar a lo esperado.

Y la última etapa... teníamos que desgrabar, resaltar las intervenciones de los profes, de los alumnos; para mí fue un poco tediosa, pero igual todos los encuentros fueron amenos.

Docente de Física

De toda esta situación rescaté que es favorable dejar que los alumnos sean creadores de su propio conocimiento y que el docente sea solo un guía. Lo que si no es muy favorable cuando el tiempo apremia, porque para desarrollar este tipo de clases lleva su tiempo, y sobre todo si los alumnos no están muy acostumbrados a desarrollar situaciones problemáticas para descubrir un tema nuevo. Con la experiencia vivida trataré de incorporar en mis clases situaciones que les aporte algo significativo a los alumnos, como así también aprendí a no tener que enseñarles todo acerca de un tema, sino, darle las herramientas justas y necesarias para que él solo piense como usar lo que tiene para vencer el obstáculo que se le presente en cada situación.

Docente que llevo la practica al aula

Haber participado de encuentros con visiones diferentes del abordaje de la resolución de problemas matemáticos me generó un replanteo en mi forma de organizar las clases, que por cierto no son de matemáticas sino de Subproductos de Pesquerías, donde las matemáticas son una herramienta necesaria fundamentalmente en los trabajos de laboratorio.

Docente de Oceanografía

Toda esta experiencia fue muy enriquecedora, en lo personal me gustó ya que entablamos una muy buena relación con los profes integrantes del grupo, desde el principio el grupo se formó con integrantes de diferentes áreas, como ser profes docentes de matemática, física y una profe oceanógrafa y dada la diversidad de pensamientos, cada situación se trabajó de varias maneras y formas que a mí sinceramente nunca se me hubiesen ocurrido.

En cuanto a la situación planteada (Actividad que llevamos al aula) fue muy trabajada, bastante trabajada diría yo, reformulada varias veces; pero siempre queda algo que no se previó, como por ejemplo los gráficos de los globos terráqueos que pusimos en la actividad para explicar los conceptos de latitud y longitud, ya que tenían signos + y – en los polos, esto llevó a la conclusión de que la latitud sí podía tomar valores negativos, pero bueno... estas cosas resultan interesantes para el debate en clase, de todas las veces que nos juntamos a reformular el ejercicio no nos percatamos de ese pequeño gran detalle.

Docente que llevó la práctica al aula

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Cuadernillo Matemática, Programa FET. Disponible en el siguiente enlace: http://www.fundacionypf.org.ar/archivos/Cuadernillo_MAT_final.pdf.
- ILLUZZI, SESSA, LAMELA, OTROS. *Matemática - Función cuadrática, parábola y ecuación de segundo grado. Aportes para la enseñanza. Nivel medio.* (Ministerio de Educación, Gobierno de la ciudad de Buenos Aires) Disponible en el siguiente enlace: http://dmat.exa.unrc.edu.ar/Cursos_posgrado/cur1/cur5/rep1/MatematicaFuncionCuadratica.pdf
- SADOVSKY, P. 2005. *Enseñar Matemática Hoy.* (Libros del Zorzal, Buenos Aires)
- SEGAL, S. y GIULIANI, D. 2008. *Modelización matemática en el aula.* (Libros del Zorzal, Buenos Aires)
- SESSA, C. 2005. *Iniciación al Estudio Didáctico del Álgebra.* (Libros del Zorzal, Buenos Aires)