

CB 24**CONSTRUYENDO Y EXPLORANDO TRIÁNGULOS CON GEOGEBRA****Marcela PLATERO, Verónica PAGLIACCIO****Escuela Cristiana Vida. Nivel Medio – CPEM N° 8 – CPEM N° 23 – Colegio Bautista
Nivel Medio – Neuquén***marcelaplatero26@gmail.com vpagliaccio@yahoo.com.ar***Palabras Clave:** triángulo, construcción, exploración, justificación, GeoGebra.**RESUMEN**

En el presente trabajo, nuestro objetivo es dar a conocer una experiencia de clase que nos permitió “dar vida” a las construcciones de triángulos en el aula. Esta secuencia didáctica estuvo basada en las dificultades clásicas que siempre ha tenido la Geometría, como por ejemplo: la falta de dinamismo, la dificultad en la construcción de las figuras, entre otras.

Por esa razón, es que destacamos, que el uso del GeoGebra permite abordar a la Geometría, a través de la experimentación y la exploración, desarrollando habilidades de visualización que, en otras oportunidades, han quedado relegadas al “ingenio” del docente frente a un pizarrón estático y, muchas veces, poco práctico para trabajar. Las construcciones realizadas son precisas y permiten, en forma sencilla, realizar complejizaciones y/o modificaciones posteriores, con solo “mover” los objetos libres.

INTRODUCCIÓN

¿Son las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's) un instrumento mediador en la clase de Matemática? Tradicionalmente, nuestros alumnos del Nivel Medio (alumnos de entre 13 a 18 años) conocen como única manera de presentación de contenidos, un pizarrón rígido, estático e inerte y como materiales de trabajo, el lápiz y el papel.

A partir de la incorporación de las TIC's se han ido modificando y redefiniendo las relaciones entre DOCENTE-ALUMNO-SABER. Convirtiéndose, para los educadores, en un nuevo desafío, ya que la incorporación de tecnología, no solo nos brinda una nueva forma de presentación sino que nos permite diseñar nuevas estrategias didácticas con diferentes grados de dificultad. Dándoles la posibilidad a nuestros alumnos de que “hagan matemática”, es decir exploren, jueguen, visualicen, elaboren conjeturas, analicen, verifiquen ideas, redescubran, construyan nuevos conocimientos.

El uso de programas educativos, en particular el GeoGebra, en las aulas de las escuelas medias está creciendo. Su influencia mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las construcciones en geometría se vuelven precisas y móviles, brindando la posibilidad de explorarlas y de realizar complejizaciones y/o modificaciones posteriores en forma sencilla y rápida.

Por todas estas razones, el conocimiento matemático que surge a través de la exploración de los objetos que se estudian asume características no tradicionales. Los software de geometría dinámica permiten experimentar y superar dificultades de la geometría clásica, como: la falta de dinamismo, la dificultad en las construcciones, la falta de visión del problema en su conjunto, sólo por mencionar algunos.

1. EXPERIENCIA DE CLASE

Como docentes nos planteamos la posibilidad de presentar los contenidos curriculares de manera que resultaran significativos para nuestros alumnos. El desafío principal, era incorporar las TIC's en el aula y revalorizar las construcciones de figuras geométricas, en especial, los triángulos. Las actividades, que seleccionamos, fueron pensadas para ser desarrolladas en 7 encuentros de clase de 80 minutos cada uno.

El trabajo relatado a continuación tuvo como propósito la construcción de triángulos a partir de determinados datos, teniendo en cuenta, solamente los conocimientos previos adquiridos durante la escolaridad primaria.

El mismo fue llevado a cabo en la Escuela Cristiana Vida-Nivel Medio de la ciudad de Neuquén Capital. Los alumnos con los que se realizaron las actividades pertenecían al Primer Año (13-14 años), división A. Quienes estuvimos al frente de la experiencia fuimos las Prof. Marcela Platero, docente a cargo del curso, y la Prof. Verónica Pagliaccio, como docente observadora.

Como objetivos nos propusimos que los alumnos:

- Se familiaricen con el uso del software de manera que puedan intuir-inducir-deducir propiedades propias del objeto de estudio.
- “Den vida” a las construcciones geométricas en el aula.
- Apliquen estrategias en la resolución de problemas, que impliquen el uso de la intuición, la creatividad y todas las formas de razonamiento lógico, destacando el papel de la deducción en la prueba matemática.
- Formen una actitud crítica-constructiva sobre las producciones propias y ajenas estimulando el uso del razonamiento lógico para la identificación de resultados correctos e incorrectos y para la toma de decisiones.
- Incorporen y usen adecuadamente el lenguaje matemático.
- Cooperen y tomen responsabilidades basadas en el consenso y el respeto por las normas acordadas, que favorezcan el trabajo individual y común.

2. GUÍA DE ACTIVIDADES PRÁCTICAS

La guía de actividades que les presentamos a los alumnos fue la siguiente:

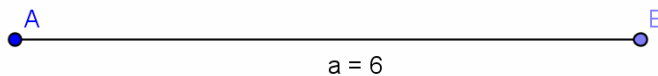
Escuela Cristiana Vida-Nivel Medio

Matemática 1° A

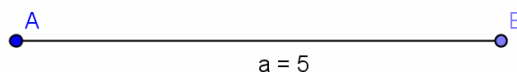
Trabajo Práctico: Construcción de triángulos

- 1- Construí, si es posible, un triángulo cuyos lados miden 6 cm, 5 cm y 4 cm. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan estas condiciones pueden construirse?
- 2- Construí, si es posible, un triángulo cuyos lados miden 6 cm, 1 cm y 4 cm. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan estas condiciones pueden construirse?
- 3- Un triángulo tiene lados de 8 cm, 5 cm y 3 cm. ¿Podés estar seguro, sin hacer dibujos, de si se puede o no construirlo?
- 4- Un triángulo tiene un lado AB de 5 cm y otro lado AC de 3 cm. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan estas condiciones pueden construirse?
- 5- Los puntos T y P están a 7 cm y son dos de los vértices de un triángulo. Encontrá un punto K que esté a 3 cm de T y a 5 cm de P a la vez. Uniendo los puntos T, P y K, construí un triángulo. ¿Es único el triángulo?
- 6- Un triángulo tiene un lado CB que mide 7 cm. El ángulo ACB mide 80° y el ángulo ABC mide 60° . Construí el triángulo. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan estas condiciones pueden construirse?

- 7- Un triángulo tiene un ángulo de 70° , otro de 20° y el tercero de 90° . Construí el triángulo. ¿Cuántos triángulos distintos que cumplan esta condición pueden construirse?
- 8- Éste es el lado de un triángulo rectángulo y mide 6 cm. El otro lado forma un ángulo recto en el vértice B y mide 3 cm. Construir el triángulo.



- 9- Construí un triángulo ABC que tenga un lado AB de 4 cm, la altura correspondiente a ese lado, de 3 cm y el lado BC, de 4 cm. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden construir?
- 10- Éste es el lado AB de un triángulo ABC. El ángulo CAB mide 45° . La altura correspondiente al lado AB es de 4 cm. Construí el triángulo.



3. DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

Les planteamos, que el nuevo contenido a desarrollar, se llevaría a cabo en la sala de informática, debido a que trabajaríamos con un software educativo llamado GeoGebra. Como la sala de informática contaba con 16 computadoras y 1º Año A estaba formado por 27 alumnos, les pedimos que conformaran 12 grupos de dos alumnos y uno de tres.

La primera clase, les presentamos el software, haciendo hincapié en que el mismo era libre y gratuito, sugiriéndoles que podían descargarlo en sus computadoras personales. Y dejamos que durante el resto de la clase exploraran las herramientas del programa.

En nuestro segundo encuentro, muchos ya lo habían descargado en sus casas, lo habían seguido explorando y, para nuestra sorpresa, nos propusieron si podían dibujar los logos de los diferentes stands de la Feria de Ciencias que, por primera vez, realizaba la escuela. En esta iniciativa, “descubrieron” una diferencia más que importante al dibujar, ya que cuando agrandaban o disminuían el dibujo, en algunos casos, éste perdía su forma original. En referencia a esto, Carrillo de Albornoz Torre (2010, p.202) expone: “*A partir de unos objetos básicos en el plano se irán estableciendo relaciones entre ellos que, cuando estén bien definidas, se mantendrán al cambiar las condiciones iniciales. Esta es una de las características de los programas de geometría dinámica que diferenciara entre dibujar y construir. Dibujar será trazar unos objetos junto a otros sin ninguna relación entre ellos y por tanto, al modificar las condiciones iniciales, al no existir relaciones, se perderán las relaciones que deberían existir entre ellos; sin embargo al hablar de construir estamos indicando que se han establecido relaciones matemáticas o geométricas entre los objetos que se mantendrán al cambiar las condiciones iniciales.*”

Concluimos esta clase abordando la diferencia entre dibujar y construir, remarcando que a partir de ese momento nos dedicaríamos a “construir”, es decir, a establecer relaciones geométricas entre los objetos.

En la tercera clase, le entregamos a cada alumno la fotocopia con las actividades que realizaríamos en los encuentros siguientes. Leímos la primera actividad, y les pedimos que intentaran resolverla. Para esto se les dio un tiempo de aproximadamente 10 minutos. Concluido el mismo, gran parte del grupo tuvo la idea sobre cómo realizar la actividad, algunos intentaron realizarla con el programa, pero no pudieron “trasladar” los segmentos dados.

Frente a este obstáculo, hicimos una intervención para toda la clase, para ello conectamos la computadora al cañón, de manera que todos pudieran observar lo que iba sucediendo.

Se realizó un bosquejo de la futura construcción en el pizarrón, donde se acordó que $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$, $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$ y por último $\overline{BC} = 4 \text{ cm}$.

En los párrafos siguientes daremos cuenta de los registros realizados por la profesora Pagliaccio a fin de mostrar cómo fue resuelta la dificultad planteada:

Docente: - De los tres lados del triángulo elijamos uno, en este caso el segmento de $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$. Parados en A, queremos dibujar el segmento $\overline{AC} = 5 \text{ cm}$. ¿Dónde podemos ubicar el punto C?

Alumno1: Ubicó un punto C. (Dibujó el segmento AC, y lo midió. Como la longitud del segmento era menor a 5 cm, comenzó a mover el punto C hasta lograr la longitud deseada).

Docente: (Interrogando a la clase) - ¿Es en el único lugar donde puedo ubicarlo? (Algunos contestaron que no y propusieron otras soluciones siguiendo esta metodología, por ejemplo los puntos D, E, F,...)

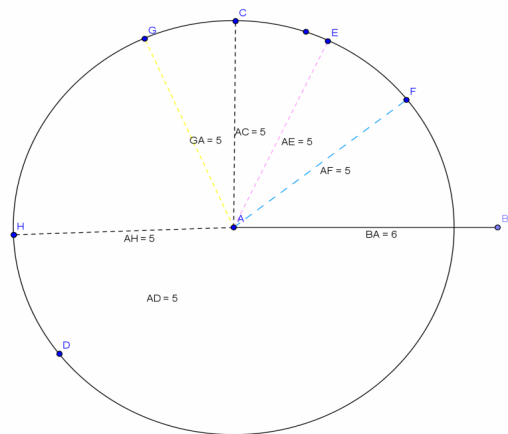
Alumno2: - Profe... ¿esos puntos no determinan una circunferencia de radio 5 cm? (Ricardo les mostró con la herramienta Circunferencia dados su Centro y uno de sus puntos el trazado de la misma.)

Docente: (Mirando al resto del curso) - ¿Qué les parece?

Resto de la clase: - Ahhhhhhhhh.... (En ese momento un par de alumnos comenzó a trabajar en sus máquinas siguiendo esa idea. Buscaron entre las opciones cómo dibujar la circunferencia con centro en A y radio 5 cm.)

Docente: - Bien, ¿y ahora cómo seguimos?

Alumno3: - Profe, si ya sabemos que para trasladar el segmento de 5 cm, dibujamos la circunferencia con centro en A y radio 5 cm, ¿Podemos usar la herramienta “Circunferencia dados su Centro y Radio”, para no tener que hacer todo el procedimiento anterior?



Docente: (Al resto de los alumnos) - ¿Qué les parece?

Alumno4: - Sí, de esta forma tenemos todo lo que necesitamos. Es más, el segmento BC lo trasladamos de esta forma.

Alumno5: - Profe ya lo hice, pero ¿dónde va a estar C efectivamente? ¿Dónde se “cortan” las circunferencias?

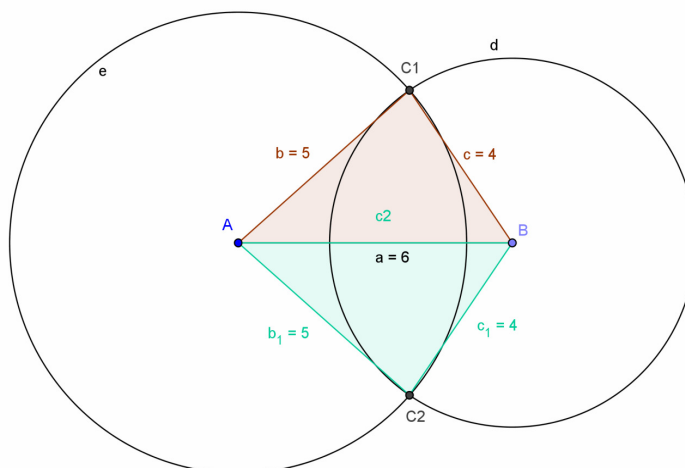
Alumno1: - Obvio!!!

Alumno5: - Pero se cortan en dos puntos, ¿cuál de ellos es C?

(Se les dejó un tiempo de discusión y concluyeron que los dos puntos de intersección podían ser el vértice C.)

Alumno1: - Entonces son dos los triángulos que se forman.!!!

Docente: - Muy bien, es cierto. Entonces podemos concluir que, en este caso, con los datos dados quedan determinados dos triángulos.



(Con esta deducción, se dio por finalizada la clase).

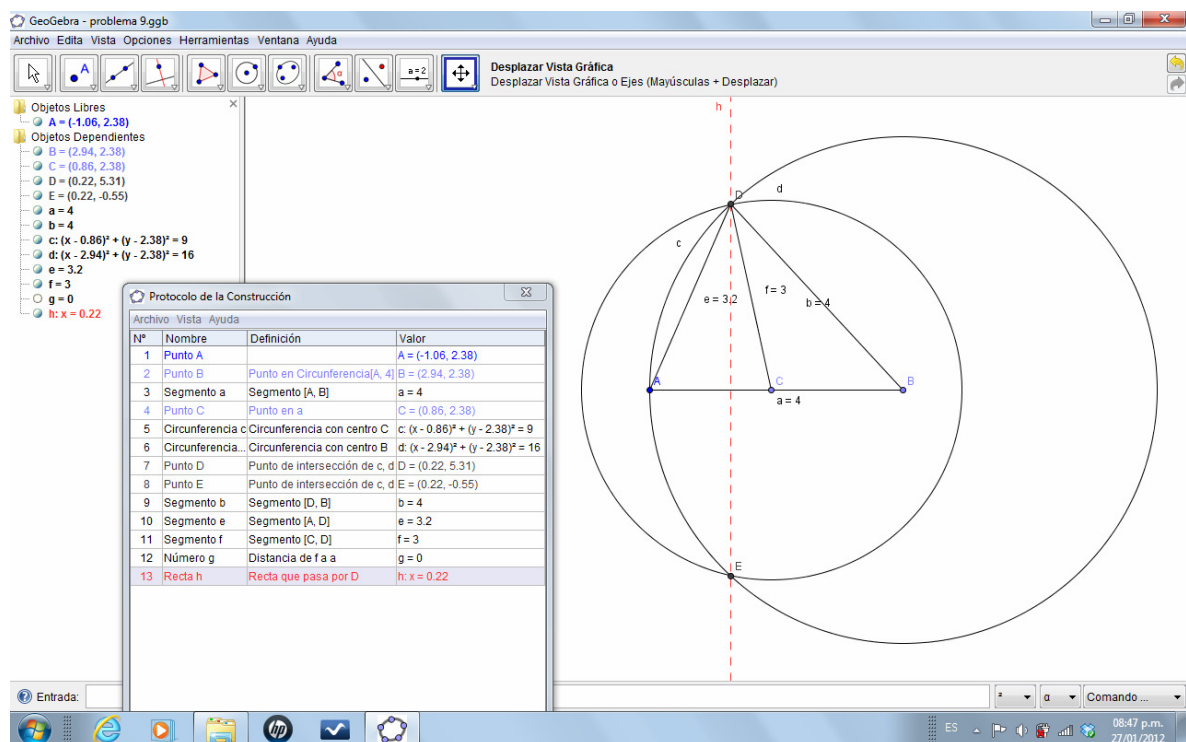
En la cuarta clase, nos encontramos con la sorpresa de que varios alumnos habían adelantado el práctico en sus casas y tenían algunas preguntas puntuales para formularnos. Fue necesario calmar esta “ansiedad”, para darles tiempo a aquellos alumnos que no habían desarrollado los ejercicios, para que pudieran hacerlo en ese momento.

Las actividades propuestas no ofrecían mayor dificultad, ya que eran muy similares a la realizada en la clase anterior. El objetivo de las actividades 2 y 3, era mostrarles que no siempre es posible construir un triángulo conociendo los tres lados. (En esta oportunidad, no nos detuvimos en ofrecer la explicación formal a través de la Desigualdad triangular, ya que nuestro objetivo era específicamente geométrico).

La actividad 4, tuvo como objetivo mostrarles que existen infinitos triángulos que cumplen con las condiciones dadas, excepto que el vértice C se encuentre sobre la recta de acción que incluye al segmento AB. Para nuestra satisfacción, los alumnos trabajaron de manera entusiasmada, elaboraron conjeturas, anticiparon posibles respuestas. La clase era ordenada, nuestro rol fue más de observador que de docente a cargo.

En la quinta clase, continuamos trabajando en las actividades 6 y 7. En las mismas, el obstáculo que se les presentó era con respecto al sentido horario y antihorario de medición de los ángulos. Nuestra sugerencia fue que hicieran un boceto del triángulo a dibujar, así no se “mareaban” con el sentido de orientación de los ángulos que debían graficar. De aquí en adelante, se sumaron como imprescindible para la construcción de los triángulos pedidos, el trazado de rectas perpendiculares y paralelas, como así también el concepto de altura.

El desarrollo de la sexta clase fue en función de la actividad 9, donde el obstáculo se presenta al no reconocer el concepto de altura, dado que dos grupos consideraban la altura como lado del triángulo, otros directamente no lo resolvieron porque desconocían este concepto y un alumno (Ricardo) presentó el siguiente desarrollo:



Ricardo dibujó el segmento AB de 4 cm, sobre éste determinó un punto C, con centro en C y radio 3 cm construyó la circunferencia. Luego, con centro en B y radio 4 cm, construyó otra circunferencia. Señaló las intersecciones entre las mismas, determinando los puntos D y E. Trazó los segmentos DB de 4 cm y AD. Quedando, así, definido el triángulo ABD. Luego,

trazó el segmento DC de 3 cm interpretando que dicho segmento es la altura correspondiente al lado AB.

Frente a esta construcción, volvimos a trabajar con la computadora y el cañón para mostrarla al resto de sus compañeros y entre todos poder analizarla.

Una vez, que la posibilidad de que la altura sea un lado se descartara, comenzamos a indagar sobre lo que reconocían como “altura”. Para iniciar el debate, sugerimos que nos señalaran cómo harían para medir la altura de la sala de informática. El grupo en su totalidad respondió que era la distancia que había desde el techo al piso del aula.

Posteriormente, nos centramos, en cómo medir esa distancia. Para esto lo que nos sugirieron fue que eligiéramos un punto en el techo, otro en el piso y de esta manera obtendríamos la distancia que había entre ambos. Se generó una discusión, porque si dejábamos fijo el punto en el techo, según donde se ubicara el punto en el piso, la distancia variaría y sin embargo, la altura entre el techo y el piso es fija.

Siguiendo con lo anterior, preguntamos dónde deberíamos ubicar el punto en el piso para que la distancia entre éstos fuera mínima. Un grupo de alumnos respondió que los puntos debían estar “enfrentados”. Les pedimos que especificaran más con respecto a qué era estar “enfrentado”.

Una vez más, se originó un debate; pero, como del mismo no surgió el concepto de altura y aprovechando que estábamos en la sala de informática y que la misma posee internet, les sugerimos que “googlearan” altura de un triángulo. Con la definición obtenida en distintos sitios de la red y las imágenes donde se marcaban la altura de un triángulo, concluyeron que lo que les estaba faltando era la condición de perpendicularidad. Una vez institucionalizada dicha definición se les propuso que retomaran la actividad 9.

Seguidamente, retomamos la construcción de Ricardo. Trazamos una recta perpendicular al segmento AB que pasara por el punto D y les mostramos que el punto C debe ser parte de esta recta perpendicular. Trabajamos sobre esta resolución que era la que más se aproximaba a la definición de altura. Luego, pedimos que resolvieran este problema a partir del concepto de altura que, ahora, todos conocían.

En la séptima clase, hicimos el cierre de la propuesta, con una síntesis de los conceptos trabajados, las propiedades aprendidas, las clasificaciones de los diferentes triángulos que fueron construyendo, la aprehensión de vocabulario específico y una evaluación de lo que significó para ellos trabajar con el software GeoGebra.

CONSIDERACIONES FINALES

Concebimos la enseñanza de la Matemática partiendo de la resolución de problemas y de las ideas previas de cada alumno para la construcción de los conocimientos. Es por esto, que en las clases intentamos fomentar la discusión colectiva, incluir métodos de razonamiento y formas de comunicación, validación de estrategias y resultados.

Este tipo de propuestas de trabajo, donde los alumnos construyen, discuten, toman decisiones, reconocen la existencia y/o unicidad de la figura, como dice Itzcovich (2005, p.21) “*prepara el terreno para la entrada de los alumnos en producciones más argumentativas.*”

Elegimos “construcciones geométricas”, ya que somos conscientes de que la Geometría en la escuela media en general, no está ocupando el mismo espacio que tal vez le dedicamos a la parte aritmética, algebraica y funcional de la Matemática. Esto también se ve reflejado en los libros de textos disponibles en el mercado.

La escasez de actividades de construcciones geométricas en los libros de texto, dificultó la selección y organización de las actividades que les planteamos a nuestros alumnos. Es por este motivo, que ninguna de las actividades que desarrollamos está contextualizada.

Esta ausencia de la geometría no es sólo un problema del nivel medio, sino también del nivel primario, lo que nos obliga a hacer un trabajo más detallado de supuestos contenidos que

deberían estar ya apropiados. Como un ejemplo de esto, el desconocimiento del concepto de altura de un triángulo, el no reconocimiento de la desigualdad triangular.

El GeoGebra nos permitió “darle vida” a las construcciones geométricas, muchas de éstas ausentes en nuestro hacer diario, por el “inconveniente” que ocasiona trabajar con un pizarrón estático. Esto motivó a los alumnos a construir el conocimiento y por lo tanto, este aprendizaje fue mayor y más significativo.

La incorporación de tecnología los predispuso a trabajar de otra manera. El clima en el aula fue totalmente diferente a lo que estamos acostumbradas a presenciar. La generación de debate era casi espontánea y muy participativa. Es por esto, que consideramos que los objetivos propuestos fueron alcanzados. Creemos que debemos seguir apostando al diseño de secuencias didácticas donde el GeoGebra sea una herramienta para acercarse más a la apropiación de los contenidos.

BIBLIOGRAFÍA

- BECERRIL, M. M.; GRIMALDI, V.; PONCE, H.; URQUIZA, M. 2008. *Estudiar Matemática 8º*. Buenos Aires, Ed. Santillana.
- BROITMAN, C.; GRIMALDI, V.; PONCE, H. 2007. *Estudiar Matemática en 7º*. Buenos Aires, Ed. Santillana.
- CARRILLO DE ALBORNOZ TORRES, A. 2010. *GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas*. UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 23, pág 202-210 en http://www.fisem.org/web/union/revistas/23/Union_023_020.pdf (última visita 28/04/2012)
- CHARNAY, R. 1997. *Aprender (por medio de) la resolución de problemas*, en *Didáctica de matemáticas. Aporte y reflexiones*. 5ª. Edición. Buenos Aires, Paidós Educador, pág 51-63.
- ITZCOVIVH, H. 2005. *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires, Libros del Zorzal.