CB 30

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO Y CONOCIMENTO A ENSEÑAR: UNA RELACIÓN INTERPELADA EN UN ESPACIO DE LA FORMACIÓN INICIAL

Karina Vanesa NAHUIN, Silvia ETCHEGARAY

Universidad Nacional de la Patagonia Austral – Unidad Académica Caleta Olivia
Ruta 3 Acceso Norte - Caleta Olivia
karinanahuin@hotmail.com *setchegaray@exa.unrc.edu.ar*

Palabras Clave: Sistemas de prácticas, división de fracciones, significados personales.

RESUMEN

La finalidad de esta comunicación es compartir un proceso de desnaturalización de un saber matemático pensado como objeto a enseñar, a través del uso de herramientas didácticas esencialmente proporcionadas por el Enfoque Ontosemiótico, para el análisis del aprendizaje de las matemáticas. En particular, se trata de atrapar un proceso de construcción y reflexión de un Sistema de Practicas personal generado por una secuencia que moviliza pensar y decidir sobre "la división de fracciones". La división, en los distintos campos numéricos produce rupturas, como así también, señala características propias de cada campo, lo que es el objeto de estudio de esta secuencia. Esta experiencia se desarrolla actualmente en uno de los espacios optativos del 4º Año del Profesorado de Matemática, en la Universidad Nacional de la Patagonia Austral- UACO.

FUNDAMENTACIÓN DE LA PROPUESTA

El marco desde donde se propone analizar y reflexionar sobre el objeto matemático: LA DIVISION DE FRACCIONES, supone, a la "**actividad matemática** esencialmente como una actividad de resolución de problemas, mediatizada por un lenguaje simbólico y organizada lógicamente como un sistema conceptual". (Godino, 2002) y propone que todo estudio reflexivo ante un objeto pensado para enseñar nos debería ayudar a transitar el siguiente camino:*Analizar la actividad matemática producida en el aula de formación inicial de profesores para "pensar" sobre la enseñanza de la matemática.*Pensar los problemas como recurso para el aprendizaje.*Revisar la matemática que se conoce, integrarla y analizarla para construir matemática a enseñar.*Reconstruir un aparato teórico que permita volver a utilizarlos para resolver nuevas situaciones, producir nuevos modelos y más teorías a partir de la Resolución de Problemas.

DESARROLLO

La secuencia (Saiz, I, Etchegaray, S, 2008) que se anexa y en la cual está basado este trabajo de reflexión fue implementada en una clase de 4º Año del Profesorado de Matemática, en la Universidad Nacional de la Patagonia Austral- Unidad Académica Caleta Olivia, en una de las optativas de dicho profesorado. Lo que se pretende especialmente es compartir la producción de una alumna, que ayudada por herramientas de análisis del Enfoque Onto-semiótico de la Cognición Matemática puede reconocer y explicitar el avance en sus significados personales en torno a la operación división y en particular a la división de fracciones.

En este trabajo se recupera esa voz como representativa de este tipo de actividad que pretende avanzar en la construcción del significado de la tan mentada y compleja frase: *para enseñar bien hay que **saber** mucho de matemática.* Como formadores de futuros de profesores, nos cuestionamos ¿**qué** de matemática? con la intención del que el mismo impregne las prácticas de los futuros docentes.
Karina expresa:
Mi trabajo matemático y de posterior reflexión consta de tres partes:

- La primera parte intenta sistematizar el sistema de prácticas matemáticas puesta en juego al resolver las dos primeras situaciones, con el fin de objetivizar en qué sentido se avanza, con este contenido, con respecto a lo aprendido sobre la división de números naturales.
- La segunda parte, tiene como objetivo poder pensar en reglas, procedimientos o algoritmos para la división de fracciones determinadas con igual-distinto denominador estudiando su validez desde un significado disponible de la división. Cuando trabajaba en esta actividad no podía dejar de pensar en el ¿porqué, entonces, tenemos que conocer la "Técnica mágica" a la hora de dividir fracciones?
- La tercera y última parte nos enfrenta a la generalización de esa regla y nos permite pensar en las diferencias de las relaciones que se ponen a funcionar en esta última parte con respecto a la segunda.

En síntesis por una parte, esta secuencia nos hizo "pensar" y "decidir" sobre el objeto: "División de Fracciones" y nos permitió reflexionar sobre los siguientes aspectos/elementos/ dimensiones de ese objeto en relación a otros:

- La fracción como un número, como un número racional, que funciona con propiedades particulares en diferentes contextos: Medida, Numérico, etc.
- La división en números fraccionarios: pensando en el sentido de usarlos y en los límites de aplicación de distintas acciones -no convencionales- para dividirlos .
- La división no sólo como un METODO, sino como un objeto que por detrás tiene una TEORIA, que la sustenta y que nos ayuda a su control en diferentes campos.

Y por otra parte me hizo pensar sobre mi propio "Quehacer Matemático", generándome nuevas preguntas/dudas ante situaciones que para mí eran incuestionables: ¿Tiene el mismo sentido la división en los diferentes campos numéricos?¿Qué ideas nuevas sobre la división emergen al pensar sobre la división de fracciones?¿Cómo producir este objeto?¿Cómo funcionan sus algoritmos?¿Cómo se validan?¿Qué elementos de control puedo disponer para asegurarme su buen funcionamiento?¿Con que otros contenidos se relaciona? Para ayudar a entender cómo llegué a pensar y construir, a partir de la resolución de la práctica dada, los interrogantes anteriormente detallados describo a continuación una configuración de cada parte, para luego reflexionar sobre la red de relaciones que pude desarrollar y que las mismas tratan de capturar:

LENGUAJE MATEMÁTICO
-NATURAL:
Se presenta la primera parte mediante un enunciado. Donde uno debía colocar si es verdadero o no las proposiciones dadas.
-GRAFICA:
La representación de una fracción desde el significado de área.
-SIMBOLICO
$\frac{a}{b}=\frac{numerador}{denominador}$

SITUACIÓN:
La primera situación: pensar en distintas formas de encontrar la mitad de un número fraccionario.
La segunda situación: pensar en relaciones entre los elementos que interviene en la división de fracciones

MOTIVAN

RESUELV

CONCEPTOS PREVIOS
Relación: la mitad de un número. Algoritmo de la división en Naturales. El denominador nos indica la cantidad que divido el entero y el numerador las cantidades que "tomo". La división como repartir en partes enteras iguales. El cociente siempre es mayor que el dividendo.

EXPRESA Y SOPORTA

ACCIONES:
1°) Al pensar en la mitad de un número: Divido en dos cada parte que tomo, eso implica que la cantidad que divido al entero se duplique, entonces me pregunto ¿Por qué?
2°) Al pensar en la relación entre diferentes elementos: Puede pasar que se piense como enteros cuantas veces entra el divisor en el dividendo, como ahora son fracciones, son partes de un todo que es una fracción lo que conlleva el pensar en un cambio de unidad. Esto también lleva a tener que pensar al revés ¿El dividendo cuantas veces entra en el divisor?

REGULAN EL USO

PROPOSICIONES EMERGENTES:
*Que producen rupturas con conocimientos de otros campos:
-La división no "achica" también puede "agrandar".-Cuanto menor es el denominador más me acerco al entero, en cambio cuanto mayor es el denominador más me acerco a cero.-Todo numero se puede dividir infinitamente.
- Aunque el dividendo sea mayor que el divisor, el cociente me dé una fracción mayor al dividendo y que divisor.
-Se puede realizar una división cuando el dividendo es menor que el divisor y el cociente me puede dar una fracción que está entre el dividendo y el divisor.
*Que plantean continuidades:
-El uno actúa como unidad de la misma forma que para números naturales.

JUSTIFI-CAN

ARGUMENTOS
"Si pienso a la fracción desde el significado de ÁREA, esas áreas deben ser iguales, por lo tanto, si las partes que tomo la divido en dos, cada parte se debe dividir en dos y eso hace que el denominador se duplique".
Se explica razonando por analogía con la división de números naturales pero en un marco de contexto de medición y se logran detectar diferencias y continuidades.

En síntesis, por un lado luego de haber resuelto y reflexionado en esta primera parte, desde este lugar, he logrado agudizar la interpelación de mi propia práctica. Así he podido desvelar los avances de mis significados, a través de relaciones matemáticas que se **producen**, a propósito de dicha situación, como las siguientes:

- Cualquier número fraccionario tiene su mitad.
- La mitad de la mitad permite pensar en infinitos "zoom".
- La propiedad de Densidad es **constitutiva** de los números Fraccionarios y marca una diferencia sustancial de **funcionamiento** con de los números Naturales.
- La relación entre los elementos que intervienen en la división de fracciones nos hace pensar en las relaciones todo-partes y partes-todo conjuntamente.
- La relación de equivalencia entre fracciones emerge del numerador y denominador por un mismo número.
- El dividir por un medio es duplicar las partes que tomo, es decir, duplicar el numerador.
- La multiplicación puede "achicar" y la división puede "agrandar".

Por otra parte, desde este uso de herramientas de análisis didáctico que me ayudan a pensar mi propia práctica matemática a cómo sostener futuras prácticas docentes sobre este tema, vale establecer las siguientes relaciones matemáticas que se podrían institucionalizar como emergentes de esta primera parte de la secuencia.
Primeramente, que la relación: "la mitad de un número fraccionario", no es acotada, pues este conjunto está regulado por la propiedad de DENSIDAD que lo hace diferente y nos amplia además el campo de relaciones que uno pueda detectar en él, como ser:

- Todo número tiene su mitad.
- El inverso de un número siempre existe.
- La mitad de un número fraccionario, es el producto de un número por ½.

En segundo lugar, que la división no siempre "achica" depende de si el dividendo es mayor o menor al divisor y que el algoritmo de la división en fracciones se puede trabajar desde el contexto de la MEDICIÓN. Y las relaciones de ida y vuelta entre los elementos que intervienen en la división de fracciones, nos hacen olvidar de la "técnica mágica" que se aprende como una receta, como cuando en realidad: ***la división entre dos números fraccionarios está definida como el producto de la primera por el inverso de la segunda.***

Ahora bien, el haber pensado y accionado sobre el tipo de situaciones que conforman la segunda parte de la secuencia y cuyos sistemas de prácticas generados por mis resoluciones son sintetizados en la siguiente configuración, es una forma de generar, darle sentido y controlar esta "Técnica Mágica".

SITUACIÓN:
Pensar la división como: el cociente es la "cantidad de veces" que el divisor "entra" en el dividendo.

MOTIVAN

RESUELVEN

CONCEPTOS PREVIOS
La relación de cuantas veces entra ¼ en 1/2, por ejemplo. Las partes que se interceptan en la técnica del rectángulo. El cambio de unidad dependiendo de qué fracción sea la mayor.

PROCEDIMIENTOS: a) Utilizando lo que venía trabajando anteriormente: 3/2 es mayor que ¼, entonces: En cada ½ tengo dos ¼ entonces si tengo 3/2, ¼ entra 6 veces.
b) Utilizando la situación 1, donde dividir por ½ es duplicar las cantidades que tomo: tendría 5 veces 6/4, pero como necesito saber, cuantos ½ entra en 5 ¾, entonces, por fracciones equivalentes 6/4 es igual a 3/2, en consecuencia, entra 15/2 veces ½ en 5 ¾ de fracción.
c) Como ¼ es menor que 3/2, entonces, sabemos por lo anterior trabajado que el resultado va hacer menor que ¼ porque 3/2 es mayor que uno. Si miro cuantos ¼ hay en ½ decimos 2, pero como son 3/2, decimos que hay 6 veces ¼, pero pensemos en la definición de división en realidad 3/2 entra 1/6 veces en ¼. Pero si realizamos la representación grafica tenemos que nos da una fracción equivalente 2/12 ¿Por qué?
d) Por lo anterior trabajado, sabemos que la división en este caso queda invariante, en realidad es pensar cuantas veces entra 8/7 en 1, si 7/7 es 1, entonces, entra una vez más 1/7, que da los 8/7.

e) 7/5 es mayor que 3/10, pero sabemos que la mitad de 1/5 es 1/10, si en un quinto entra dos veces 1/10 en 7/5 entra 14 veces, pero como los numeradores son múltiplos, se reduce a decir, que entra 14/3 veces 3/10 en 7/5.

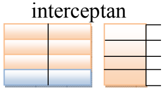
f) En este caso ¾ (azul) es mayor a 1/3 (rojo) pero como los denominadores no son múltiplos, utilizo el recurso grafico para dar respuesta: Cantidad de partes enteras pintadas 4 de 9, es decir, 1/3 en ¾ entra 4/9 veces.

PROPOSICIONES EMERGENTES:
El resolver una división de fracciones con distinto denominador, exige un cambio de unidad.
La fortaleza del registro grafico a través de "la técnica del rectángulo", en dialogo con el numérico, moviliza que se piense en el inverso multiplicativo.

JUSTIFICAN

ARGUMENTOS: Se trata de justificar una generalización sobre un proceso que se basa en el cambio de unidad.

LENGUAJE MATEMÁTICO
-NATURAL:
Se presenta la primera parte mediante un enunciado.
-GRAFICA:
La representación de la división-Regla del Rectángulo.
Para pensar ¼ :3/2
12 divisiones y 2 partes que se interceptan



EXPRESA Y SOPORTA

REGULAN EL USO

En efecto, la división de Fracciones siempre se va a poder obtener mediante la relación anteriormente planteada, lo que nos permite pensar sobre la 3ra.parte:

SITUACIÓN
¿Por cuánto hay que dividir 1/5 para obtener como cociente 2/15? ¿Qué número dividido por a/b permite obtener c/d? con a, b, c, d números enteros y b, d distinto de cero.

MOTIVAN

RESUELVEN

CONCEPTOS PREVIOS:

-La relación emergente en las situaciones anteriores: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$
-La propiedad de conmutatividad que tiene los números enteros.
-El producto definido en fracciones nos permite escribir:
$\frac{cab}{bda}=\frac{bca}{bda}=\frac{b}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{a}$

PROCEDIMIENTOS

Pensé en la relación de: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$ la pregunta es ¿Por cuánto hay que dividir 1/5 para obtener como cociente 2/15? O sea: $\frac{1}{5}:\frac{c}{d}=\frac{1\cdot d}{5\cdot c}=\frac{2}{15}$ Las relaciones que entran en juego son: Que número multiplicado por 1 da 2, como uno es la identidad en la multiplicación, deduzco que **d** es 2 y que número multiplicado por 5 da 15, rápidamente decimos 3, entonces **c** es 3.

PROPOSICIONES EMERGENTES:

-El número que permite obtener c/d al dividirlo por a/b es: $\frac{cab}{bda}$

LENGUAJE MATEMÁTICO
-NATURAL:
Se presenta la primera parte mediante un enunciado.
-ALGEBRAICA
La generalización de la técnica.
-SIMBOLICO
$\frac{k}{n}:\frac{a}{b}=\frac{k\cdot b}{n\cdot a}=$

EXPRESA Y SOPORTA

REGULAN EL USO

JUSTIFICAN

ARGUMENTOS
La demostración deductiva de la técnica a la que se arriba:
$$\frac{k}{n}:\frac{a}{b}=\frac{k\cdot b}{n\cdot a}=\frac{c}{d}$$

REFLEXIÓNES FINALES

En estas reflexiones se pretende compartir dos cuestiones fundamentales al pensar sobre el inter juego movilizado por la dialéctica reflexiva que circula en una clase de la formación inicial de profesores en Matemáticas. En este sentido se rescata la voz del alumno como productor de conocimiento, como la del docente en tanto regulador de tal dialéctica reconociendo así un escenario compartido de conocimientos didácticos y matemáticos, actuando en un plano horizontal de discusión.

La voz de la alumna:

En mi rol de alumna de un espacio de reflexión didáctico-matemático puedo decir que:
Este conjunto de situaciones, me plantearon en un principio un gran desafío y me motivaron las siguientes preguntas:

- ¿Por qué cuando dividimos sólo se dice que dejemos la primera fracción como está y la segunda la demos vuelta?
- ¿Por qué sólo esa "técnica mágica" lo dice?
- ¿Cómo le enseño a un alumno que esa es una técnica válida de dividir fracciones?
- ¿Cómo lo ayudo a partir de lo que sabe para validar esa técnica?

A partir del trabajo matemático realizado pude apreciar las herramientas con la que yo contaba para abordar las situaciones y los límites de éstas a la hora de querer generalizar, obligándome a tomar decisiones en el momento que tuve que indagar, explorar, analizar.
Pude reconstruir el significado de división de fracciones desde la resolución de esta secuencia y la relación con las prácticas de mis compañeros; regulada por las intervenciones de la docente de la asignatura. Logré identificar relaciones y tensiones con la división en el conjunto de los números naturales y cómo funciona la división -como operación- en el conjunto de los números fraccionarios.
Por último, como docente novel puedo suponer/ imaginar, que esta experiencia de aprendizaje en mi formación inicial, produce un gran aporte para mi futuro profesional:
En efecto, ante la producción de matemática de mis alumnos puedo pensar que es posible re crear los conocimientos matemáticos a partir de las intervenciones que puedo hacer con ***sentido*** **(**Sadovsky, P. 2005**)**, sin olvidar un necesario trabajo previo de anticipación. Esto es: identificar los diferentes conocimientos involucrados para poder ayudar a los alumnos con mayor soltura, indagando, observando, interpelando. Colaborar con la construcción de una posición de autonomía intelectual, a partir de que los mismos posean herramientas que les permita control sobre sus producciones. Para ello he podido identificar, con estas prácticas, una manera posible: que los alumnos puedan desarrollar una actividad matemática personal siendo consientes de los objetos puestos en juego con sus limitaciones de significados sujetos a diferentes contextos. Pero tal manera de posicionarnos ante lo que significa "hacer matemática" y enseñar a "hacer matemática" implica para el docente un análisis y una reflexión constante sobre la variedad de sistemas de prácticas que generan nuestros alumnos.
La voz de la docente:
"El conocimiento producido a priori -tanto matemático como didáctico- (en la elaboración de la propuesta) ubicado en su situación contextual, (en la clase de la Optativa), resulta ser tanto una *exigencia cognitiva* (Guyot, 2011) como epistémica durante la gestión, que me permite pensar en procesos duales inherentes al acto de enseñar. En efecto, éste es un conocimiento didáctico emergente de una práctica docente que "obliga" al mismo tiempo pensar sobre la relación entre el "particular" planteado por el alumno con el "general" previsto desde mi propuesta , la "parte" seleccionada para la exploración "singular" de cada estudiante con el "todo" sintetizado desde el saber matemático. En otras palabras el conocimiento didáctico-matemático puesto en contexto (el aula) es el que permite "poner en acto" los procesos duales que hacen al pensamiento complejo y que regulan una práctica de conocimiento basada en una dialéctica operativa y reflexiva".

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- GODINO, J D. 2002. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. Recherches en Didactique des Mathématiques 22 (2-3), 237-284.
- GODINO, J D., FONT, V. 2006. "La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores"
- GUYOT, V. 2011. Las prácticas del conocimiento. Un abordaje epistemológico. Lugar Editorial.
- SADOVSKY, P. 2005. "Enseñar Matemática Hoy". Buenos Aires. Editorial el Zorzal.

ANEXO. SECUENCIA: DIVISIÓN DE FRACCIONES
IRMA SAIZ - SILVIA ETCHEGARAY (2008)

1º PARTE

Situación nº 1: Para encontrar la mitad de un número fraccionario se puede:

- Dividir el numerador por 2 y se deja el mismo denominador.
- Dejar el mismo numerador y dividir el denominador por 2.
- Dividir el numerador y el denominador por 2.
- Dividir la fracción por un medio.
- Dejar el mismo numerador y calcular el doble del denominador de la fracción.
- Multiplicar la fracción por un medio.

a) ¿Cuál o cuales de estos procedimientos son los correctos? Argumente su decisión.
b) Si representa simbólicamente cada uno de ellos ¿Qué reflexión puede compartir?

Situación nº 2: En una división de fracciones:

a) ¿Puede ser el cociente mayor que el dividendo?
b) ¿Se puede anticipar sin realizar el cálculo si el cociente será mayor, menor o igual que el dividendo?

Situación nº 3: Tratar de sistematizar el sistema de prácticas matemáticas, puestas en juego y validadas en las dos situaciones anteriores con el fin de decir en qué "sentido" se avanza, con este contenido, con respecto a lo aprendido sobre división de números naturales

2º PARTE

Situación nº 4: Usando que en una división el cociente es la cantidad de veces que el divisor entra en el dividendo, graficar y resolver las siguientes divisiones de fracciones:

a) 3/2 : ¼ =

b) 5 ¾ : ½ =

c) ¼ : 3/2=

d) 8/7 : 1 =

e) 7/5 : 3/10 =

f) ¾ : 1/3 =

g) 2/3 : 5/4 =

Situación nº 5:

a) Establecer una regla para dividir fracciones con igual denominador.
b) La regla que encontró ¿Es aplicable para fracciones de distinto denominador?

Situación nº 6: ¿Cómo puede justificar el algoritmo Qué usted conoce para dividir fracciones?

3º PARTE

¿Por cuánto hay que dividir 1/5 para obtener como cociente 2/15?
Describa todas las relaciones que pone en juego para poder solucionar la cuestión planteada.
¿Qué numero dividido por a/b permite obtener c/d? con a, b, c, d números Z y b, d distinto de cero.