

CB 35

ANÁLISIS DEL GRADO DE ALGEBRIZACIÓN EN UNA TAREA DE ÁLGEBRA LINEAL DE LA UNLPam

Marcelo LORENZO, Nora FERREYRA, Carlos PARODI

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UNLPam - Argentina

Facultad de Ingeniería – UNLPam - Argentina

mlorenzo@exactas.unlpam.edu.ar noraf@exactas.unlpam.edu.ar parodic@yahoo.com

Palabras Clave: algebrización, sistemas de ecuaciones, programa epistemológico.

RESUMEN

Este trabajo toma algunas situaciones puntuales de un proyecto más amplio que busca dar respuesta a preguntas del tipo: *¿Cómo hacer que el Algebra Lineal, como herramienta de modelización, permita cambiar la organización de saberes en función de los contenidos por una organización en función de problemas?, ¿Cuál es el grado de algebrización, acorde al trabajo de Bolea, que alcanza un alumno al finalizar el curso de Algebra Lineal?* Tratando de darles respuestas a estas cuestiones analizamos actividades propuestas a alumnos de la asignatura “Algebra Lineal”, incluida en el Profesorado de Matemática, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam (Argentina).

INTRODUCCIÓN

Las instituciones como la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), formadoras de Profesionales que ejercerán su tarea en ámbitos diversos, se enfrentan permanentemente a la cuestión de decidir acerca de *qué formación debe recibir un estudiante* de cara a su práctica profesional futura, problema complejo y difícil de abarcar en su totalidad. Este trabajo, en el cual tomamos algunas cuestiones puntuales, está enmarcado en un proyecto más amplio que busca dar respuesta a preguntas del tipo: *¿Cómo hacer que el Algebra Lineal, como herramienta de modelización, permita cambiar la organización de los saberes en función de los contenidos por una organización en función de problemas?, ¿Cuál es el grado de algebrización, en términos de los trabajos de Bolea, que alcanza un alumno al finalizar el curso regular de Algebra Lineal?* Para tratar de darles respuestas a estas cuestiones analizamos dos actividades propuestas a alumnos de la asignatura “Algebra Lineal”, correspondiente al primer año de las carreras: Profesorado y Licenciatura en Matemática, Profesorado y Licenciatura en Física y Profesorado en Computación de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam.

MARCO TEÓRICO

El análisis se realizó a partir de los fundamentos teóricos que provee el Programa Epistemológico en Didáctica de la Matemática, (Brousseau, 1986), en el cual se asume que todo fenómeno, cuestión o problema didáctico tiene un componente matemático esencial. Dicho de otro modo, que la *vía de entrada* al análisis de los problemas didácticos está en el propio conocimiento matemático, es decir que señala un vínculo permanente entre lo *didáctico* y lo *matemático*. El mismo autor postula, utilizando términos topológicos, *que lo didáctico es denso en lo matemático*.

En particular, dentro del programa epistemológico, nos centramos en la Teoría Antropológica de lo Didáctico, (TAD) (Chevallard, 1992), que utiliza el término Organización Matemática (OM) para describir la actividad matemática. Toda OM se compone de: tareas, técnicas, tecnologías y teorías, entendidas cada una de estas de la siguiente manera:

Tareas: En esta categoría se incluyen todo tipo de actividades que se consideren “matemáticas” en una institución. Por ejemplo, hallar una base de un espacio vectorial, hallar el rango fila de una matriz, etc.

Técnicas: Se definen de esta manera a las actividades sistematizadas que se utilizan para realizar una tarea. Toda tarea involucra una técnica, es decir, una forma organizada de trabajar que comparte con otras tareas y que depende de la institución en la que se realice la tarea considerada. Por ejemplo, hallar una base de un subespacio vectorial utilizando matrices.

La unión de la *tarea* y de la *técnica* se denomina bloque *práctico-técnico* que se compone de un tipo de tareas y una técnica dentro de la institución. Ellas constituyen lo que se denomina el “saber-hacer”.

Tecnología: Es un discurso requerido por el bloque *práctico-técnico* para describir y justificar la técnica y además poner en evidencia la pertinencia con las tareas para las que se destina. La tecnología sirve, además, para explicar la técnica, relacionarla con otras técnicas y producir nuevas técnicas. Por ejemplo, las filas de una matriz escalonada por filas son linealmente independientes, por lo que su uso para hallar una base puede quedar así justificado.

Teoría: Se trata de un segundo nivel de justificación que da sentido a los problemas planteados, posibilita la interpretación de las técnicas y fundamenta las demostraciones tecnológicas. La teoría y la tecnología forman el bloque *tecnológico-teórico*. Las mismas funciones que juega la tecnología con la técnica, lo hace la teoría con la tecnología, así como la articulación entre los diferentes marcos teóricos.

Por ejemplo: La teoría de espacios vectoriales o matrices para explicar la independencia lineal y el escalonamiento, respectivamente.

Con intención de examinar y resignificar la noción de “estudiar álgebra”, Gascón (1993) propone caracterizar el modelo del álgebra en una institución, tomar dicho modelo como objeto de estudio y aportar a lo que denominó “proceso de algebrización”.

Bolea (2003) luego de describir las características propias de una modelización algebraica se vuelca al modelo que se obtiene de aplicar tal modelización. Ya que define a una “*organización matemática algebrizada*” como el resultado de aplicar una *modelización algebraica a una OM* y dado que no se cuenta con un criterio absoluto que permita establecer una división estricta entre obras matemáticas algebrizadas y pre algebraicas, define *los indicadores del grado de algebrización* de una OM que es consecuencia de la naturaleza algebraica de la modelización.

Indicador del grado de algebrización 1 (IGA1): *Manipulación de la estructura global de los problemas.*

Una obra matemática nace como respuesta a cuestiones que dan lugar a diferentes tipos de problemas. Un indicador del grado de algebrización de una organización matemática tiene en cuenta la posibilidad de describir y manejar *la estructura global del problema*. Es decir, cuanto más algebrización exhiba la organización matemática, mayor tendencia se presenta a emplear tipos generales de problemas, y no sólo problemas aislados. Para esto, es preciso identificar previamente los parámetros que están en juego en el problema y que se presentan como conocidos, y poder manipularlos como si fueran desconocidos.

Indicador del grado de algebrización 2 (IGA2): *Tematización de las técnicas y nueva problemática a nivel tecnológico.*

Otro indicador del grado de algebrización de una obra matemática está dado por la *posibilidad de plantear y estudiar problemas que tengan que ver con la descripción, interpretación,*

justificación, producción y dominio de validez de las técnicas que se presentan. Esto incluye las técnicas que se deberían utilizar en la resolución y el alcance de éstas.

Es decir que una obra algebrizada debiera permitir describir los problemas resolubles con determinadas técnicas, integrándolos en tipos de problemas y no tratándolos como problemas aislados y decidir cuáles son las condiciones para tener una, más de una, infinitas o ninguna solución.

Es decir, va más allá de buscar la respuesta al problema, se refiere al planteo de las *condiciones de existencia de la solución.*

Indicador del grado de algebrización 3 (IGA3): *Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. Reducción de los elementos ostensivos.*

Este indicador está relacionado con el nivel de *unificación de los diferentes tipos de problemas* que forman parte de la organización, como así también de la *integración de las técnicas* y de los *elementos tecnológicos* asociados. La unificación implica disminuir los elementos ostensivos (Bosch, 1994).

Indicador del grado de algebrización 4 (IGA4): *Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.*

Aquí se presenta la *posibilidad de generar tipos de problemas cada vez más alejados del contexto del sistema cuyo modelo es la organización que estamos analizando.* Es decir, cuanto más algebrizada se presenta la organización, mayor es la probabilidad de alejarse del modelo.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

La primera actividad que se planteó durante el cursado de la asignatura fue una secuencia relacionada con un sistema de ecuaciones lineales que comienza con la aplicación de técnicas (resolverlo por el método que crea más conveniente), luego se planteó un sistema similar con el agregado de una variable α como coeficiente, pidiendo el valor de α para que el sistema tenga infinitas soluciones. En los ítems c) y d) se trabajó con el sistema homogéneo asociado y la escritura de sus soluciones como combinación lineal de una solución particular y de las infinitas soluciones del sistema no homogéneo. Finalmente, en un quinto ítem, se solicitó escribir el sistema en forma matricial y relacionar la cantidad de soluciones del sistema con propiedades de la matriz del mismo.

Cabe señalar que para este estudio, se tomaron las producciones de estudiantes cuyo desempeño se halla por encima de la media, esto es, todas las respuestas analizadas corresponden a estudiantes que aprobaron todos los exámenes parciales y en consecuencia la cursada de la asignatura.

Actividad 1

- a) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método que crea más conveniente:

$$\begin{cases} 3x + 6y + 5z = 10 \\ -2x - 5y + z = 1 \\ x + 8y - 6z = -6 \end{cases}$$

- b) Hallar el/los valores reales de α para que el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 6y + 5z = 10 \\ -2x - 5y + z = 1 \\ x + 2y - \alpha z = 10/3 \end{cases} \text{ tenga infinitas soluciones.}$$

- c) Usando alguno de los valores de α hallados en b), ¿qué soluciones tendría el sistema homogéneo asociado? Justificar.

- d) Expresar las infinitas soluciones del sistema no homogéneo b) como combinación lineal de una solución particular y las infinitas soluciones del sistema homogéneo asociado.
- e) Escribir el sistema del apartado a) en la forma $A \cdot X = b$. ¿Qué relación existe entre la clasificación del sistema y la matriz?

Al finalizar el cursado se les propuso una segunda actividad, donde, considerando la actividad 1 (oportunamente retomada) respondiesen cuestiones del tipo: *¿Puede plantear un sistema que tenga la misma solución general que el apartado a) ó el apartado b)? ó: Analizando la resolución del apartado d), qué se puede conjeturar sobre la dimensión del espacio solución? ¿Podría de él extraerse una base?*

También se pidió, como actividad complementaria, la resolución de algunos problemas (transcribimos uno a modo de ejemplo):

Se tiene una pieza metálica construida con una aleación de cobre y plata que pesa 29,85 gramos y tiene un volumen de 3 cm^3 . Sabiendo que el peso específico del cobre es $8,95 \text{ g/cm}^3$ y el peso específico de la plata es $10,45 \text{ g/cm}^3$; determinar qué proporción de plata y cobre contiene. (Peso específico = peso / volumen).

Análisis a-priori de las posibles soluciones

Actividad 1

En el apartado a) “*Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método que crea más conveniente:*”, la resolución sólo requiere una tarea aritmética basada en las técnicas y tecnologías desarrolladas en el marco del estudio de los sistemas de ecuaciones, por lo cual se espera lo resuelvan mediante operaciones elementales entre filas o columnas para llegar a la matriz escalonada reducida (Gauss) o a la escalonada (Gauss Jordan).

En cambio, en el apartado b) “*Hallar el/los valores reales de α para que el sistema...*” se espera que puedan recuperar el trabajo realizado en a), puesto que se trata de una generalización de él y sería deseable que vean las modificaciones que sufre el último pivote y no que escalonen nuevamente toda la matriz.

En el inciso c) “*Usando alguno de los valores de α hallados en b), ¿qué soluciones tendría el sistema homogéneo asociado? Justificar,*” podría esperarse que los estudiantes utilicen resultados teóricos sobre la relación entre las raíces de un sistema no homogéneo y su sistema homogéneo asociado y no que resuelvan nuevamente el sistema, lo cual implicaría sólo un manejo de una técnica y no una modelización de un grado superior como se pretende con el planteo de esta actividad. En ese mismo sentido, el inciso d) “*Expresar las infinitas soluciones del sistema no homogéneo b) como combinación lineal de una solución particular y las infinitas soluciones del sistema homogéneo asociado*”, creemos resulta complementario del inciso c).

Finalmente en el inciso e) “*Escribir el sistema del apartado a) en la forma $A \cdot X = b$. ¿Qué relación existe entre la clasificación del sistema y la matriz?*” se espera nuevamente un trabajo a nivel de la Teoría, donde la respuesta provenga, por ejemplo, del análisis de los rangos de las matrices (de los coeficientes y su ampliada), lo cual se deduce a partir de la resolución de a).

Mediante estas actividades se puede analizar el grado de algebrización a través de los IGA 1 y 2, pudiendo considerarse el IGA 3 en los incisos d) y e), sin embargo al no proponerse la elaboración de nuevos problemas no tendremos referencias acerca del IGA4, por tal motivo surgió la necesidad de plantear la actividad 2.

Actividad 2

Consideramos que en esta actividad los alumnos recuperarán lo visto en la asignatura por lo cual se esperan resoluciones que permitan evaluar el IGA 3 y hasta el IGA 4, ya que pueden emerger nuevos problemas independientes del sistema modelizado (el del álgebra lineal). Por ejemplo, al resolver *Puede plantear un sistema que tenga la misma solución general que el*

apartado a) ó el apartado b)? se espera que el alumno unifique técnicas y teorías y haga una reducción de los elementos ostensivos.

En el segundo apartado: *Analizando la resolución del apartado d), qué se puede conjeturar sobre la dimensión del espacio solución? ¿Podría de él extraerse una base?* Se espera que la conclusión pueda emerger como nuevo problema independiente del sistema modelizado (sistemas de ecuaciones).

Las respuestas de los estudiantes

Actividad 1

En el apartado a) la resolución fue acorde a lo esperado, utilizando todos el Método de Gauss. En cambio, en el apartado b) ninguno recuperó el trabajo realizado previamente por lo cual volvieron a aplicar la técnica utilizada en a). Creemos que esta resolución doble puede estar ligada a los efectos del contrato didáctico, ya que podría suceder que al tratarse de otro inciso supongan que tienen que comenzar una resolución desde el principio.

En el inciso c), sólo uno de los estudiantes utilizó los resultados teóricos esperados como única justificación, el resto, en la mayoría de los casos aplica nuevamente la técnica para responder y otros, mencionan la propiedad pertinente pero pareciera que ésta no es suficiente como justificación y necesitan verificar analíticamente en el ejemplo.

El inciso d), fue resuelto por todos, acorde a lo esperado, ya que consistía sólo en reunir información obtenida en los apartados anteriores.

Finalmente el inciso e) requiere explícitamente exhibir la relación entre la matriz y las soluciones del sistema, cuestión que ya está resuelta al haber encontrado la matriz escalonada reducida en a). Sin embargo sólo uno de los alumnos justifica de esta manera mientras que el resto, calcula el determinante de la matriz antes de responder.

Mediante estas actividades se puede analizar el grado de algebrización a través de los IGA 1 y 2, pudiendo considerarse el IGA 3 en los incisos d) y e), aunque al no proponerse la elaboración de nuevos problemas no tendremos referencias acerca del IGA 4, por tal motivo surgió la necesidad de plantear la actividad 2.

CONSIDERACIONES FINALES

En el marco de la TAD, "*analizar*" una organización matemática o didáctica significa poder describir sus componentes y las relaciones dinámicas entre ellas y poder describir las condiciones de existencia en el marco institucional.

En el caso del Álgebra Lineal, específicamente en el estudio de sistemas de ecuaciones lineales, las actividades propuestas, además de explorar el manejo de las relaciones mencionadas, se centran en el análisis de los indicadores IGA1 e IGA2 pero, creemos, muy débilmente en el IGA3.

La predominancia de aspectos vinculados a estos primeros indicadores nos lleva a reflexionar sobre la importancia de plantear explícitamente la unificación de técnicas y tecnologías asociadas a determinados tipos de problemas y el análisis de problemas generales, cada vez más alejados del contexto inicial, cuya resolución se identifique con el modelo algebraico estudiado.

Consideramos que, en la mayoría de los desarrollos, el uso de una tecnología es a los efectos de justificar los pasos técnicos utilizados pero sin que predomine un mayor desarrollo tecnológico-teórico.

El esfuerzo central de la TAD radica en cristalizar elementos teóricos que permitan liberar a los saberes de las evidencias y de los efectos de naturalidad que tienden a imponer las instituciones, que hacen indiscutibles los saberes tradicionales. En este trabajo nos permitimos poner a discusión el Álgebra que se aborda en la formación universitaria.

Este marco asume como postulado básico la existencia de un conjunto de nociones e ideas dominantes a nivel institucional respecto de la matemática y su enseñanza que se proyectan en

el accionar de los docentes, lo cual queda de manifiesto no sólo en las respuestas de los estudiantes sino también en los problemas propuestos.

El análisis de las actividades planteadas, nos permite formular hipótesis vinculadas a una escasa manipulación de la estructura global de los problemas, evidenciando inconvenientes para interpretar y permitirse intercambiar los roles de parámetros e incógnitas.

El hecho de haber desarrollado este estudio en función de las respuestas de los estudiantes que mejor se han desempeñado en la asignatura no constituye un detalle menor, ya que creemos que es una muestra de aquellos estudiantes que más relaciones deberían haber construido en torno al tema.

Los resultados, aunque señalan un escaso nivel de algebrización, brindan por un lado, la posibilidad de fijar objetivos acordes a lo que podría esperarse en torno a una modelización algebraica y por otro, repensar cómo desarrollar el tratamiento de problemas que engloben algunos aspectos centrales de la asignatura y de este contenido en particular.

BIBLIOGRAFÍA

- BOLEA CATALÁN, P. 2003. *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Monografías del seminario matemático. Prensa Universitarias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza.
- BOSCH, M. 1994. *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*, Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.
- BROUSSEAU, G. 1986. *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Traducción realizada en FAMAF- Univ. Nac. de Córdoba.
- CHEVALLARD, Y. 1992. “Le caractère expérimentale de l’activité mathématique”, *Petit x*, 30, 5-15.
- GASCÓN, J. 1993. “Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis síntesis a la génesis del lenguaje algebraico”, *Recherches en didactique des mathématiques*, 13-3, pp. 295-332.