CB 17

IDONEIDAD EPISTÉMICA DE UN PROCESO DE INSTRUCCIÓN SOBRE EL TEOREMA DE BAYES

Stella Maris FIGUEROA, María Andrea AZNAR, Gloria PRIETO, Sergio ANCHORENA

Universidad Nacional de Mar del Plata - Facultad de Ingeniería
Juan B. Justo 4302
stellafigueroa@gmail.com maznar@fi.mdp.edu.ar gprieto@fi.mdp.edu.ar
pollo_mdp@yahoo.com

Palabras Clave: problemas bayesianos, idoneidad epistémica, enfoque ontosemiótico, función semiótica.

RESUMEN

La investigación que enmarca este trabajo tuvo por objetivo valorar un proceso de instrucción para la aplicación del Teorema de Bayes, bajo el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Para ello, se aplicó una estrategia didáctica durante dicho proceso a estudiantes que cursan la asignatura Estadística en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. El proceso instruccional implementado pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes al favorecer la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, en particular, en el coloquial y el simbólico.
El análisis realizado arroja como resultado una valoración alta en la dimensión epistémica de la idoneidad didáctica, pues se comprobó la presencia de los descriptores que permiten evaluar dicha dimensión.

INTRODUCCION

Las dificultades que se generan en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la probabilidad condicional han sido abordadas por diversos autores. Pollatesk y cols. (1987) analizan las causas que pueden influir en la comprensión de los problemas de probabilidad condicional. Estas causas incluyen la presentación de los enunciados y el contexto de los problemas, basados o no en el conocimiento de los alumnos sobre situaciones reales. Díaz y De la Fuente (2005) plantean que no es un tema sencillo, ya que los alumnos lo asocian con la problemática de la causalidad y temporalidad, teniendo dificultad en la percepción de los experimentos compuestos en el caso de situaciones sincrónicas. Por otro lado, estos autores manifiestan que los estudiantes confunden sucesos independientes con mutuamente excluyentes, cambian los términos de la probabilidad condicional, confunden ésta con la probabilidad conjunta y le asignan a esta última un valor más alto que el correspondiente a una de las probabilidades simples involucradas, error conocido como la falacia de la conjunción.
En un estudio exploratorio sobre las dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes, Díaz y De la Fuente (2007), compararon el desempeño de estudiantes de Psicología en esta tarea, antes y después de la instrucción, destacando los errores que cometen. Ordenados de mayor a menor frecuencia, detectaron: no identificación o identificación incorrecta de los datos, confusión entre probabilidad simple y condicional, error en la partición del espacio muestral, construcción incorrecta de diagramas de árbol, error

en la aplicación de la Fórmula de Bayes, fallas en el razonamiento proporcional y en las operaciones con fracciones, confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta, falacia de la tasa base (tendencia a ignorar la información que describe a la mayor parte de las personas), confusión de un evento con su complemento, confusión de una probabilidad condicional con su inversa; esto es, confundir P(A/B) con P(B/A) y error en el cálculo de la probabilidad total.

Luego de estudiar los problemas que involucran el Teorema de Bayes, estos autores concluyen que son de alta complejidad para los estudiantes y que "la estadística debiera enseñarse en conjunción con material sobre estrategias intuitivas y errores inferenciales de razonamiento" (Díaz y De La Fuente, 2007, p. 281).

Batanero, Fernández y Contreras García (2009), señalan que numerosas investigaciones muestran la existencia de intuiciones incorrectas en la aplicación de la probabilidad condicional, y la enseñanza formal es insuficiente para corregirlas. Para superar los errores identificados, surge la necesidad de que el alumno se haga consciente de estas dificultades, y para ello se piensa que el enfoque cognitivista puede contribuir en este sentido.

Para una mejor comprensión del objeto matemático en cuestión, y sabiendo que las representaciones condicionan las prácticas matemáticas que conforman el significado de los objetos involucrados, es fundamental que el alumno pueda interpretar y articular dichas representaciones (Font, Godino y D'Amore, 2007). De ahí que uno de los objetivos que se persigue, al investigar cómo enseñar probabilidad condicional, sea explorar los significados que los alumnos tienen construidos en relación al uso de sus representaciones. En ese sentido, la Teoría de Representaciones Semióticas de Duval (2004), describe las características de los procesos cognitivos asociados al uso de representaciones. Variados trabajos usan este marco teórico para abordar problemas del aprendizaje en relación al uso de representaciones. Entre otros, el trabajo de Aznar, Distéfano, Prieto y Moler (2010) presenta un análisis sobre la conversión entre representaciones que, si bien son efectuadas para números complejos, se concluye que es necesario abordar sistemáticamente esta tarea de conversión para favorecer la coordinación entre diferentes registros y la conceptualización del objeto matemático en estudio, que, para este caso, es la probabilidad condicional.

El marco teórico y metodológico utilizado es el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Godino, Batanero y Font (2009). Esta teoría considera dos dimensiones de significado: el significado institucional propuesto por el docente y el significado personal elaborado por el alumno.

Este trabajo utiliza las herramientas que proporciona el EOS para valorar un proceso de instrucción diseñado para la resolución de problemas bayesianos. La valoración de este proceso de instrucción se efectúa a través de algunos de los criterios de idoneidad didáctica, entendida como el criterio sistémico de pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción al proyecto educativo (Godino, Batanero y Font, 2006; Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005).

En esta estrategia didáctica se propone una secuencia de procedimientos que pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes, es decir, a la construcción del significado de la probabilidad condicional, cuando la probabilidad del suceso que ocurrió (o suceso principal) es una probabilidad total.

Para ello, se procura favorecer la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, como el coloquial, el simbólico y el gráfico. En particular, se destaca la identificación del suceso principal en primer lugar y la representación de la probabilidad condicional en los lenguajes coloquial y simbólico como habilidades determinantes en la resolución de este tipo de problemas.

MARCO TEÓRICO

El EOS considera a la Matemática en su triple aspecto: como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual

lógicamente organizado. En este marco, una práctica matemática se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino, Batanero y Font, 2009).
A partir del concepto de práctica matemática, surge la noción de significado, definido como "el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas" (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). Para el EOS, la cuestión del significado de los objetos matemáticos es en esencia ontológica y epistemológica, puesto que se centra tanto en la naturaleza como en el origen de los mismos (Godino, Batanero y Font, 2009). En los casos en que el significado se atribuye a un individuo, se considera un significado personal, mientras que, si el significado es compartido por un grupo de individuos en el seno de una institución, se lo considera un significado institucional.
En este contexto, el aprendizaje es entendido como la apropiación de los significados institucionales por parte del estudiante, a través de su participación en las comunidades de prácticas (Godino et al, 2007; Godino, Batanero y Font, 2009). Dado que puede no existir concordancia entre los significados otorgados por los distintos actores que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje, se generan diferencias que dan lugar a lo que bajo este enfoque se denomina conflicto semiótico. Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones).
Debido al rol preponderante que juegan los objetos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos primarios, u objetos de primer orden, según Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), está constituida por:

- Situaciones-problemas: aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios.
- Elementos lingüísticos: términos, expresiones, notaciones, gráficos, en diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- Conceptos- definiciones: introducidos mediante definiciones o descripciones (recta, punto, número, media, función)
- Proposiciones: enunciados sobre conceptos.
- Procedimientos: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo.
- Argumentos: enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos (deductivos o de otro tipo).

Las seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las configuraciones, definidas por Godino, Batanero y Font (2009) como "las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos" (p. 8). En los casos en que estas redes se refieren a acciones representativas de la institución y acordes a ella, se denominan configuraciones epistémicas. Paralelamente, las configuraciones cognitivas, son aquellas que describen los sistemas de práctica personales (Godino, Batanero y Font, 2009). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones (epistémicas y cognitivas) se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, institucional y personal (Godino y Batanero, 1994).
Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de funciones semióticas.
Es relevante el proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una función semiótica. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia.

De esta manera, la función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que les causan equivocaciones no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009).
En cuanto a la valoración de cualquier proceso de instrucción, el EOS propone la noción de idoneidad didáctica. (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2006).La idoneidad didáctica se define como la pertinencia o adecuación de un proceso de instrucción. Para hacer operativa esta definición, se introducen seis criterios parciales de idoneidad atendiendo a las siguientes dimensiones que caracterizan y condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje: epistémica (relativa a los significados institucionales), cognitiva (significados personales), mediacional (recursos tecnológicos y temporales), emocional (actitudes, afectos, emociones), interaccional (interacciones docente – discentes), y ecológica (relaciones intra e interdisciplinares y sociales). Estos criterios son entendidos como reglas de corrección que surgen de la comunidad científica, cuando se pretende conseguir un consenso sobre lo que se considera como bueno o mejor (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).
La aplicación de los criterios de idoneidad a un proceso de instrucción consiste en la metodología que permite la guía, la valoración y la posible mejora de un proceso de instrucción y aprendizaje. Estos criterios pueden considerarse en dos momentos: “a priori” ¿Cómo se deben hacer las cosas? y “a posteriori” ¿Cómo se hicieron efectivamente? Para responder a estas preguntas, se cuenta con los componentes y descriptores de cada idoneidad. A continuación se detallan los descriptores que Godino (2011) propone para la valoración de la idoneidad epistémica.

Idoneidad epistémica

Es el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto de un significado de referencia. En la Tabla 2 se describen los componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.

Componentes	**Descriptores**
Situaciones-problemas	- Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. - Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguaje	- Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos. - Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige - Propuesta de situaciones de expresión e interpretación
Elementos regulativos (definiciones, proposiciones y procedi-mientos)	- Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo - Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas
Argumentos	- Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel

	educativo a que se dirigen. - Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	- Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Tabla 2. Componentes y descriptores de la idoneidad epistémica.
Fuente: Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007)

METODOLOGÍA

Se llevó a cabo una investigación de naturaleza descriptiva, en el sentido que pretendió analizar información que pudiera valorar un proceso de instrucción en la dimensión epistémica, sobre el Teorema de Bayes. Dicho proceso está dirigido a estudiantes de la asignatura Estadística, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata.

El proceso instruccional consta de varios elementos: una estrategia didáctica que conduce a los alumnos a la demostración del Teorema de Bayes, una metodología de resolución de los problemas donde se aplica este Teorema y la resolución de una guía de problemas bayesianos donde los estudiantes tienen la oportunidad de aplicar dicha metodología de resolución.

Estrategia didáctica implementada

Al diseñar esta propuesta didáctica se consideraron los conocimientos previos de los alumnos, sus experiencias y el contexto en el que están inmersos. Buscando satisfacer esta última consideración, se diseñó un problema introductorio vinculado a las carreras que cursan los alumnos presentes.

Como la asignatura Estadística es común a muchas carreras de Ingeniería, la profesora preguntó a sus alumnos a qué carrera pertenecen para involucrarlos y despertar su interés y atención. De esa manera, se identificaron los conjuntos que formaron una partición del espacio muestral. A continuación, se contaron los alumnos de cada carrera, obteniéndose así la frecuencia relativa de cada grupo, como la probabilidad empírica que tiene un estudiante elegido al azar, de ser de determinada carrera. Se verificó que la suma de las probabilidades fuera uno.

Luego se solicitó a los alumnos una estimación acerca de la probabilidad que tiene de aprobar estadística, un alumno elegido al azar de tal o cual carrera. Esta pregunta provocó la aparición del humor, dado que muchos alumnos sobreestimaron o subestimaron su rendimiento. Esta información podría obtenerse de los alumnos que cursaron en años anteriores, pero es mucho más interesante desde el punto de vista del docente conocer lo que piensan los alumnos en relación a su rendimiento a priori. En el pizarrón se expresaron simbólicamente las probabilidades condicionales con las estimaciones dadas por los estudiantes.

Posteriormente, la profesora pregunta: “En el supuesto caso que se elija un alumno al azar del cual no se conoce la orientación de su carrera, ¿cuál es la probabilidad de que dicho alumno apruebe Estadística?”. “¿Cómo se puede calcular dicha probabilidad si no se conoce a qué carrera corresponde el alumno?”.

Para visualizar la situación, se graficó en el pizarrón el suceso A: “Aprueba Estadística” dentro del espacio muestral y sobre los conjuntos determinados por las cuatro carreras que intervienen en este caso: B_1, B_2, B_3 y B_4 donde cada B_i representa una carrera, tal como se muestra en la Figura 1.

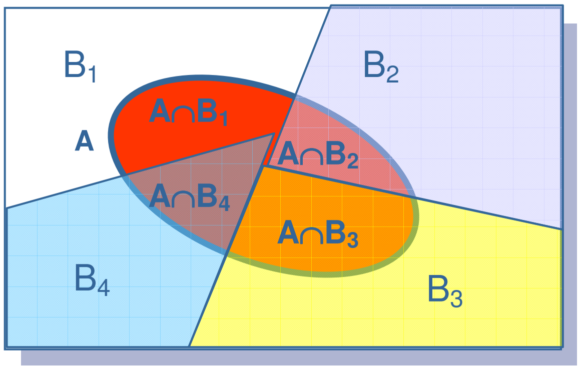


Figura 1. Representación gráfica del suceso A, donde cada B_i representa una carrera.

Al no saber la orientación profesional del estudiante elegido al azar, se asumió que podría ser de cualquier carrera. Por lo tanto, se expresó el suceso A: “Aprueba Estadística”, como unión de sucesos mutuamente excluyentes, con las intersecciones determinadas por dicho suceso con cada carrera. Luego se expresó simbólicamente esta unión de sucesos: $A=(A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup(A\cap B_3)(A\cap B_4)$

A continuación, la profesora preguntó a los alumnos: “¿Cuál es la probabilidad del suceso A?” Para averiguarlo les propuso aplicar probabilidad miembro a miembro: $P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+P(A\cap B_3)+P(A\cap B_4)$. Los alumnos respondieron aplicando propiedades previamente estudiadas y de esta manera emergió el objeto *fórmula de la probabilidad total*: $P(A)=\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A/B_i)$ que forma parte del significado de la fórmula del Teorema de Bayes.

Luego se planteó otra situación: la profesora informó a la clase que un alumno elegido al azar, aprobó estadística. Se destacó que esa información corresponde a que *ocurrió el suceso A*. Les pidió luego calcular la probabilidad de que el alumno haya sido de ingeniería química (B_2), por ejemplo.

En esta instancia, se esperaba que los alumnos reconocieran que la probabilidad pedida es una probabilidad condicional, e identificaran el suceso que ocurrió, para expresar simbólicamente la probabilidad solicitada: P (B_2/A). Efectivamente así lo hicieron.

Luego aplicaron la definición de probabilidad condicional para calcular: $P(B_2/A)=\dfrac{P(B_2\cap A)}{P(A)}$

La profesora formuló preguntas orientadoras para que los alumnos advirtieran que la probabilidad del suceso que ocurrió ya fue calculada con la probabilidad total.

A partir de allí expresaron la probabilidad pedida: $P(B_2/A)=\dfrac{P(B_2)P(A/B_2)}{\sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A/B_i)}$

Finalmente, se generalizó lo desarrollado durante la clase para su institucionalización:

1) Se parte de sucesos B_i que forman una partición del espacio muestral S, para un subíndice i desde uno hasta n.
2) Se expresa al suceso A que ocurrió (o suceso principal) como intersección con alguno de los B_i.
3) Se expresa la probabilidad del suceso principal.
4) Se señala que la probabilidad condicional pedida, consiste en volver a estimar la probabilidad de algún B_i (probabilidad conocida) pero ahora con una información adicional: *ocurrió el suceso A.*
5) Se reemplaza en la fórmula de la probabilidad condicional: en el denominador, la fórmula de la probabilidad total, y en el numerador, el término de la sumatoria de la probabilidad total del B_i elegido.
6) Se presenta la fórmula obtenida como la tesis del Teorema de Bayes.

Luego de lo desarrollado en la clase, la profesora negoció con los estudiantes los pasos necesarios para la resolución de este tipo de problemas:
- La detección del suceso principal, a través de las expresiones coloquiales del problema.
- La identificación del resto de los sucesos intervinientes, cuyas probabilidades suman 1.
- Las transformaciones respectivas del registro coloquial al simbólico de dichos sucesos y de las probabilidades correspondientes. En particular, la identificación de la probabilidad pedida y de las probabilidades condicionales presentadas como los datos del problema.
- La expresión del suceso principal como unión de sucesos mutuamente excluyentes.
- El cálculo de la probabilidad del suceso principal (probabilidad total).
- La aplicación de la fórmula del teorema de Bayes reemplazando la probabilidad pedida por lo calculado en la probabilidad total.

Configuración epistémica

Se realizó una configuración epistémica de los Problemas 1[1] y 2, enunciados en la Tabla 5. La configuración epistémica del Problema 2 es similar, por eso no se explicita.

OBJETOS PRIMARIOS	Objetos matemáticos y significados en la situación
Situación-Problema 1 (Al comienzo del proceso de instrucción Situación–Problema 2 después del proceso de instrucción	*Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Hubo un testigo del accidente. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?* *Una persona se somete a una prueba para detectar cierta enfermedad. Si la persona está enferma, el test será positivo con 96% de certeza. Si la persona está sana, el test será negativo con 94 % de certeza. Se sabe también que 1 de cada 100 personas de esta edad está enferma. El test resulta positivo. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma?*
Lenguaje	- Coloquial o verbal: enunciado del problema. - Gráfico: Representación de los sucesos que forman una partición del espacio muestral. Representación del espacio muestral. Representación del suceso que ocurrió. - Simbólico: Expresión de cada suceso. Expresión de la probabilidad de un suceso y de la probabilidad condicional de sucesos. Numérico: probabilidades o porcentajes de ocurrencia de sucesos.
Conceptos (definiciones)	- Experimento aleatorio: *Ejemplo: Tomar un taxi de un determinado color. Identificar correctamente el color del taxi.* - Sucesos que forman una partición del espacio muestral: *Ejemplo: Tomó un taxi Verde o tomó un taxi Azul.* - Espacio muestral: Los dos resultados posibles del experimento aleatorio. - Intersección de sucesos: parte común de un conjunto de sucesos. - Unión de sucesos: Conjunto que tiene los sucesos de uno u otro conjunto. - Sucesos mutuamente excluyentes: Son los sucesos que no se pueden dar simultáneamente. Su intersección es vacía. - Probabilidad clásica: proporción entre el número de casos favorables y el número de casos posibles. - Axiomas de probabilidad. - Probabilidad condicional: proporción de cada suceso respecto al total de veces que ha ocurrido otro suceso. - Regla del Producto: Probabilidad conjunta. Dependencia. - Probabilidad Total: *Ejemplo: Probabilidad de identificar el taxi de color azul.*
Propieda-	- Relación entre probabilidad condicional y probabilidad simple: restricción del espacio

[1] Tversky, A. y Kahneman, D. (1982a, citado en Díaz y De la Fuente, 2007).

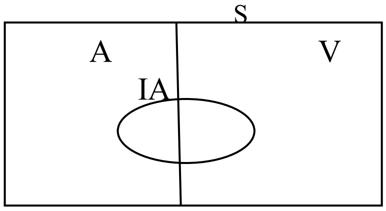
des	muestral. - Teorema de la probabilidad Total. - Axioma de la Unión: probabilidad de la unión de dos o más sucesos mutuamente excluyentes, es la suma de cada una de las probabilidades de dichos sucesos.
Procedi-mientos	- Identificación del suceso que ocurrió en el problema y su representación simbólica. - Interpretación en forma coloquial y simbólica de cada suceso simple y sus probabilidades respectivas, cuya suma es 1. - Interpretación de la probabilidad condicional pedida en forma coloquial y simbólica: *La probabilidad de que el taxi sea Azul sabiendo que el taxi fue Identificado Azul* $P(A/IA)$ - Interpretación de las probabilidades condicionales dadas en forma coloquial y simbólica: - *La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es Azul* $P(IA/A)$ - *La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es verde* $P(IA/V)$ - Representación gráfica del espacio muestral S, de los sucesos que forman una partición del mismo y del suceso que ocurrió en el problema.  - Expresión simbólica del suceso que ocurrió como unión de sucesos mutuamente excluyentes. $IA = (A \cap IA) \cup (V \cap IA)$ - Aplicación de probabilidad a ambos miembros y axiomas de la teoría de probabilidades. $P(IA) = P[(A \cap IA) \cup (V \cap IA)]$ $P(IA) = P(A \cap IA) + P(V \cap IA)$ - Cálculo de la probabilidad de la intersección de los sucesos. $P(IA) = P(A).P(IA/A) + P(V).P(IA/V)$ - Cálculo de la probabilidad total del suceso que ocurrió. *P(IA)* = 0,15 . 0,8 + 0,85. 0,20 = 0,120 +0,170 = 0,29 - Cálculo de la probabilidad condicional pedida. $P(A/IA) = \frac{P(A \cap AI)}{P(IA)} = \frac{P(A).P(IA/A)}{P(A).P(IA/A) + P(V).P(IA/V)} = \frac{0{,}120}{0{,}29} = 0{,}4137$
Argumen-tos	Razonamiento deductivo para la resolución del problema. Se aplicaron los axiomas de probabilidad referidos a la probabilidad del espacio muestral S, a la probabilidad de la unión de sucesos mutuamente excluyentes y a la regla del producto. Se aplicó la fórmula de la Probabilidad Total y el Teorema de Bayes.

Tabla 5. Configuración epistémica del Problema 1

En la configuración epistémica anterior pueden observarse múltiples expresiones a las que es necesario dotar de significado mediante el establecimiento de funciones semióticas. La estrategia didáctica implementada tuvo como objetivo señalar la secuencia de procedimientos destinados a favorecer el establecimiento de tales funciones semióticas, descriptas en la Figura 2.

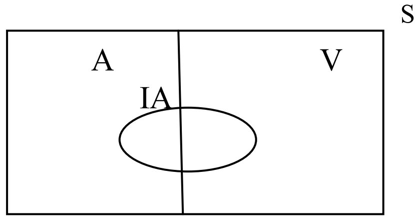
ANTECEDENTE		CONSECUENTE
“Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul.”	$\xrightarrow{F_1}$	Suceso que ocurrió (IA)
“Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules.	$\xrightarrow{F_2}$	Sucesos que forman una partición del espacio muestral cuyas probabilidades suman 1. El taxi pertenece a la compañía **A**zul (A) *P(A)* = 0,15 El taxi pertenece a la compañía **V**erde (V) *P(V)*= 0,85
“Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?”	$\xrightarrow{F_3}$	Probabilidad condicional pedida. La probabilidad de que el taxi sea Azul si el taxi fue Identificado Azul $P(A/IA)$ $P(A/IA)=\dfrac{P(A\cap AI)}{P(IA)}$
“…llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. “	$\xrightarrow{F_4}$	Probabilidades condicionales dadas en forma coloquial. Probabilidades condicionales dadas en forma simbólica La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es Azul $P(IA/A)$ La probabilidad de que el taxi sea Identificado Azul si el taxi es verde $P(IA/V)$
Gráfico de los sucesos que forman una partición del espacio muestral y del suceso que ocurrió.	$\xrightarrow{F_5}$	
Suceso que ocurrió expresado como unión de sucesos mutuamente excluyentes	$\xrightarrow{F_6}$	$IA=(IA\cap A)\cup(IA\cap V)$
Probabilidad Total	$\xrightarrow{F_7}$	Valor numérico resultante del cálculo $P(IA)=P(A).P(IA/A)+P(V).P(IA/V)$
Teorema de Bayes	$\xrightarrow{F_8}$	Valor numérico resultante del cálculo $P(A/IA)=\dfrac{P(A\cap AI)}{P(IA)}=\dfrac{P(A).P(IA/A)}{P(A).P(IA/A)+P(V).P(IA/V)}$

Figura 2. Funciones semióticas que favorecen la resolución del Problema 1

RESULTADOS OBTENIDOS

La valoración de la Idoneidad Epistémica del proceso de instrucción implementado, se presenta en la Tabla 6, de acuerdo a la descripción de los componentes con sus descriptores correspondientes.

Componentes y sus descriptores	**Valoración del proceso de instrucción**
Situaciones- problemas 1. Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación del significado de referencia. 2. Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización)	Tanto en el desarrollo teórico como en la guía de trabajos prácticos, se proponen problemas extramatemáticos por lo que se desarrollan prácticas de contextualización. En el proceso de instrucción implementado, se destacan dos objetos primarios: la situación problema y la secuencia de procedimientos para su resolución. En el conjunto de prácticas matemáticas que se genera con esta propuesta didáctica, la situación problema corresponde a uno de los problemas bayesianos, que forman parte de las situaciones que se presentan en el significado de referencia y se encuentran en los libros de probabilidades sugeridos para el nivel universitario. La secuencia de procedimientos comprende la identificación y representación simbólica de cada uno de los sucesos involucrados en el problema, identificados en un cierto orden. La misma es aplicable a la resolución de cualquier problema bayesiano. Una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación, incluidas en el significado de referencia, se presenta con la guía de trabajos prácticos de la asignatura, donde se propone la resolución de este tipo de problemas.
Lenguaje 1. Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico), traducciones y conversiones entre los mismos. 2. Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige 3. Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.	El uso de diferentes modos de expresión es parte de la estrategia implementada, junto a las situaciones de interpretación. El hecho de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros (coloquial, simbólico y gráfico) dirigidas a alumnos universitarios, permite afirmar que los descriptores del lenguaje son considerados en esta propuesta.
Elementos regulativos (definiciones, proposiciones y procedimientos) 1. Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen 2. Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo 3. Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.	El proceso de instrucción del Teorema de Bayes, comienza con el planteo de un problema extraído del contexto de los alumnos, se parte de su experiencia y de sus conocimientos previos. Los alumnos identifican los objetos matemáticos que aparecen y se los representa simbólica y gráficamente. Se negocia una notación adecuada que resuelva las dificultades y los errores cometidos en la notación de la probabilidad condicional y su confusión con la probabilidad conjunta. Se identifica con claridad la probabilidad condicional pedida. Se expresa el suceso que ocurrió como unión de sucesos mutuamente excluyentes para justificar la fórmula de la probabilidad total, se aplican propiedades de la probabilidad, se efectúan los cálculos correspondientes a la probabilidad total y se resuelve el problema. Luego se le informa al alumno que esa probabilidad condicional así calculada, donde la probabilidad del suceso que ocurrió es una probabilidad total, corresponde a la fórmula del Teorema de Bayes. Posteriormente, se destacan los objetos intervinientes para el enunciado del Teorema y su presentación, se formalizan dichos objetos enunciando las hipótesis del teorema y demostrándolo. El hecho de haber planteado un problema en el contexto de los alumnos, en cuya resolución se dedujo la fórmula de dicho Teorema, es una situación para la generación y negociación de reglas. En este caso, la regla es la fórmula mencionada. Podemos afirmar entonces, que los elementos regulativos son considerados en esta propuesta.

Argumentos 1- Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen. 2- Se promueven momentos de validación.	El hecho de relacionar la teoría de conjuntos con la teoría axiomática de probabilidades, permite visualizar y expresar en forma gráfica y simbólica, la ocurrencia de un suceso dado por algún otro, en términos de operaciones entre conjuntos. La aplicación de las propiedades de la probabilidad de la unión para sucesos mutuamente excluyentes y de la intersección comprueba la fórmula de la probabilidad total. La definición de la probabilidad condicional aplicada al suceso que ocurrió, permite validar la fórmula del Teorema de Bayes. Todas estas argumentaciones son adecuadas al nivel universitario al que se dirigen, ya que representan los significados institucionales implementados (o pretendidos) respecto del significado de referencia.
Relaciones (conexiones, significados) 1- Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.	Este proceso de instrucción pretende contribuir a la construcción del significado de la fórmula del Teorema de Bayes al favorecer la habilidad de efectuar transformaciones entre representaciones realizadas en distintos registros, en particular, en el coloquial y el simbólico. El suceso que ocurrió se detecta en primer lugar, a través de las expresiones coloquiales del problema, luego se identifican el resto de los sucesos intervinientes y se efectúan las conversiones respectivas en los registros simbólico y gráfico. El hecho de expresar al suceso que ocurrió con operaciones entre conjuntos y aplicar las propiedades de la probabilidad, argumenta la fórmula de la probabilidad total, que junto a la aplicación de la definición de probabilidad condicional, permiten la argumentación de la fórmula del teorema de Bayes.

Tabla 6. Valoración de la idoneidad epistémica del proceso de instrucción

CONCLUSIONES

En este análisis se detallaron las funciones semióticas establecidas entre los datos del problema y los sucesos involucrados en el mismo, con sus probabilidades respectivas.

Se destaca el valor que tienen las herramientas de análisis proporcionadas por el EOS, tales como la configuración epistémica y las funciones semióticas. Las mismas revelaron los principales factores que contribuyen a la resolución de problemas bayesianos, posibilitando el diseño de una estrategia didáctica que procura disminuir los conflictos semióticos potenciales asociados a los errores mencionados en la introducción.

En cuanto al análisis de la idoneidad didáctica en la dimensión epistémica, del proceso de instrucción implementado, ha permitido concluir que el proceso de instrucción tiene un alto grado de idoneidad epistémica a priori, por hallarse presentes los descriptores de cada componente en esta idoneidad analizada.

Quedan por efectuar otros análisis para las restantes idoneidades, en particular, la idoneidad cognitiva, que permitirá conocer la disparidad de significados institucionales y personales, y de esta forma obtener conocimiento sobre el aprendizaje efectivamente constatado de los alumnos durante el proceso instruccional.

REFERENCIAS

- AZNAR, M. A., DISTÉFANO, M. L., PRIETO, G. y MOLER, E. 2010. Análisis de errores en la conversión de representaciones de números complejos del registro gráfico al algebraico. *Revista Premisa* 12(47), 13-22.
- BATANERO, C., FERNÁNDEZ, J. y CONTRERAS GARCIA, J. 2009. Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas. *Revista Suma*. pp 11-18
- Contreras García, J (2009) Recursos en internet para la enseñanza de la probabilidad condicionada. Trabajo de Investigación Tutelada. Tutora: Carmen Batanero Bernabeu
- DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, I. 2005. Razonamiento sobre Probabilidad Condicional e implicaciones para la enseñanza de la Estadística. *Epsilon*, 2005, 59, 245-260.

- DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, I. 2007. Dificultades en la resolución de problemas que involucran el Teorema de Bayes. Un estudio exploratorio en estudiantes de psicología. *Educación Matemática*, 18(2), 75-94.
- DÍAZ, C. y DE LA FUENTE, I. 2007. Validación de un cuestionario de razonamiento probabilistico condicional, *Revista Electrónica de Metodología Aplicada.* Volumen 12(1), pags.: 1-15.URL:http://www.psico.uniovi.es/REMA/v12n1/a1/ Lectura del artículo en formato: PDF (77 Kb) 2007, Vol.12 nº 1, pp. 1-15
- DUVAL, R. 2004. *Semiosis y pensamiento humano*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- FONT, V., GODINO, J. D. y D'AMORE, B. 2007. Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática. En M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), Temas de Didáctica de las Matemáticas (pp. 1-20). Mendoza: Universidad Nacional de Cuyo.
- GODINO, J. D. y BATANERO, C. 1994. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14(3), 325-355.
- GODINO, J. D., BENCOMO, D., FONT, V. y WILHELMI, M. R. 2006. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma* XXVII (2), 221-252.
- GODINO, J. D., BENCOMO, D., FONT, V. y WILHELMI, M. R. 2007. Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funcionessemioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf
- GODINO, J. D., BATANERO, C. y FONT, V. 2009. Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- GODINO, J. 2011. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. (CIAEM) 26-30 junio. Recife, Brasil.
- LEÓN GÓMEZ, NELLY A. 2008. Errores y dificultades en la resolución de problemas verbales inherentes al Teorema de Bayes. Un caso con futuros profesores de matemática. *PARADIGMA,* Vol. XXIX, N0 2, diciembre de 2008 / 187 - 219
- POLLATSEK, A., WELL, A. D., KONOLD, C. y HARDIMAN, P. 1987. *Understanding Conditional Probabilities. Organization, Behavior and Human Decision Processes*. 40, 255 – 269.