CB 31

LA GESTIÓN DE UN PROFESOR ANTE LA RESOLUCIÓN ARITMÉTICA Y ALGEBRAICA DE UN PROBLEMA

Irma SAIZ, Edith GOROSTEGUI, Diego VILOTTA

Universidad Nacional de Nordeste – Facultad de Ciencias Exactas, Naturales y Agrimensura
Avda. Libertad 5600 – Corrientes
irmasaiz28@gmail.com egorostegui40@hotmail.com vilottadiego@arnet.com.ar

Palabras Clave: Resolución de problemas, modelización algebraica, educación, praxeologías matemáticas y didácticas.

RESUMEN
En un marco constructivista de los aprendizajes concebimos la clase como un lugar de producción de conocimientos. Esto demanda una gestión particular del docente que en este caso incluye hacerse cargo del proceso de modelización desde los conocimientos aritméticos iniciales de los alumnos hasta la producción del modelo algebraico es decir una ecuación. En el marco de la investigación[1]: "*Procesos de modelización algebraica en Matemática y en la introducción a su estudio en clases ordinarias de secundaria y carpetas de alumnos*" daremos cuenta de la complejidad que involucra la gestión de la clase en este proceso. En él se producen conflictos de significados relacionados con la resolución aritmética y algebraica que circulan en esta clase a propósito de la resolución de ciertos problemas, conflictos que no se resuelven y de este modo el aprendizaje de los alumnos está básicamente centrado en la apropiación de un algoritmo sobre cómo escribir una ecuación y cómo resolverla, sin que el sentido y la pertinencia del uso de esta herramienta - en la resolución de los problemas – forme parte de las tareas planteadas.

INTRODUCCIÓN
Una de las primeras tareas desarrolladas en el marco del proyecto *"***Procesos de modelización algebraica en Matemática y en la introducción a su estudio, en clases ordinarias de Secundaria y carpetas de alumnos***"* corresponde al objetivo: Explorar y caracterizar las estrategias docentes que se despliegan en la introducción al álgebra en clases ordinarias. En este marco observamos y registramos clases de 2do año de Educación Secundaria donde se planteaban las primeras tareas algebraicas. En esta oportunidad nos referiremos a los fenómenos identificados en el aula, a partir del seguimiento, registro y análisis realizado de una secuencia de clases, cuya finalidad es el aprendizaje del uso de ecuaciones en Z para resolver ciertos problemas; también se realizaron un par de entrevistas al profesor: una previa al desarrollo de la secuencia de clases y otra posterior a la clase que se analiza en este trabajo.
El marco teórico de la investigación es la Didáctica Fundamental, en particular la TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas) y la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico), teorías que modelizan el conocimiento matemático como puerta de entrada a la comprensión de los fenómenos de producción, enseñanza y aprendizaje de la Matemática. A la vez

[1] Investigación aprobada y financiada por Ciencia y Técnica de la U.N.N.E. Res. F009-2011

contamos con aportes de otros autores como Duval (1.993), D´Amore (2.006), Bajtin (2006) y Bernié (2002).

ACERCA DE LA MODELIZACIÓN ALGEBRAICA

La Matemática al igual que todas las disciplinas se vale de un *género discursivo* (Bajtin, 2006) tanto para producir como para comunicar sus conocimientos. Podemos reconocer en los distintos campos (algebraico, geométrico, aritmético, etc.) diferentes registros semióticos que permiten *modelizar*[2] tipos de problemas. Así, en el campo del álgebra se utiliza un sistema de signos, símbolos y números que, a diferencia de la aritmética, "*ofrece un medio más potente…, esencialmente ligado al uso de las letras para designar las variables y a la posibilidad de calcular sobre las expresiones literales*" (Sadovsky, 2003).

La particularidad de la Matemática radica en que trata con objetos conceptuales a los que se accede a través de otros objetos que sirven para representarlos y que se inventan por fuera del lenguaje del que nos valemos para comunicarnos habitualmente. En situación de aprendizaje esto constituye una verdadera paradoja tal como señala Duval (1993) al preguntarse: "… *¿Cómo, sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable".* Para Duval (2006): "... *tener en cuenta la naturaleza semiótica de los objetos matemáticos implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran".* En este sentido plantea que los estudiantes "*…deberían ser capaces de reconocer el mismo objeto matemático de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos".*

Diferentes autores se han ocupado del tema de la enseñanza del álgebra en la escuela secundaria; se pueden citar los trabajos de Laborde (1990); Drouhard (1992,1995); Rojano (1994); Kaput (1987, 1996) (autores citados por Bolea, 2003); como así también los de Sadovsky (2003) y Sessa (2005). Estos autores han estudiado problemáticas didácticas como el pasaje del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico, la relación entre la semántica y la sintaxis del lenguaje algebraico y los conflictos de significados que se producen entre docentes y alumnos respecto de los objetos involucrados. En la mayoría de estas investigaciones se estudian las prácticas docentes a través de situaciones que diseñan los investigadores y cuyo funcionamiento se analiza en el contexto de las clases, sin que los docentes participen en la definición de las mismas, esto es en la línea de la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989). En nuestro caso estudiamos las prácticas docentes en clases ordinarias, en donde las actividades son diseñadas por los docentes que las gestionan y nuestro objetivo es el de comprender qué hacen los docentes, cómo lo hacen y por qué hacen lo que hacen.

Las investigaciones que se ocupan del estudio del pasaje del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico de alumnos de secundaria, entre las que se encuentran las citadas anteriormente, plantean que para la producción de las escrituras algebraicas es necesario considerar los conocimientos aritméticos anteriores de los alumnos. En esta perspectiva se trata de partir de la respuesta espontánea de los alumnos en la resolución de situaciones y hacerla evolucionar hacia los modelos algebraicos. El salto que implica esta última producción en la evolución mencionada se puede plantear en un momento de la secuencia de actividades mediante consignas específicas en las que ya no sea posible utilizar conocimientos aritméticos para resolverlas, pero que al mismo tiempo estos conocimientos les sirvan de control de sus producciones en el campo del álgebra. Se pueden citar aquí los problemas que demandan *encontrar una fórmula para el paso "n" de una cierta colección que se construyen*

---

[2] En matemática se habla de modelizar para referir al proceso por el cual se trata de "*…identificar un conjunto de variables sobre el sistema que se pretende estudiar, producir relaciones entre las variables tomadas en cuenta, transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico matemático que se usa para modelizar, con el objetivo de producir conocimiento sobre el sistema modelizado"* (Sadovsky,2003)

iterativamente según un proceso que guarda una regularidad definida de modo explícito (Sessa, 2005. p.75).
Sadovsky (2.003), siguiendo a Chevallard (1997) afirma que la particularidad de la actividad matemática es que *"reduce el espesor semiótico alrededor de códigos específicos y de esta manera gana en potencia"*. En la comparación que realiza entre aritmética y álgebra desde el punto de vista de los instrumentos semióticos señala: "*…en la aritmética se razona sobre lo oral y se le atribuye al cálculo un valor mecánico. El álgebra en cambio es sólo escritura, ella rompe la filiación del pensamiento a la palabra y de ésta a la escritura*".
En las clases que analizamos se trata de transformar una expresión lingüística (el enunciado del problema) en una escritura algebraica (ecuación). Para Duval (2006) esta transformación esconde dos requisitos específicos. Por un lado, que en la escritura algebraica se utilizan menos símbolos que objetos a los que alude el enunciado, dado que en su construcción se usan operaciones aritméticas y se explicita una relación que traduce el significado de la frase enunciada en un lenguaje natural mediante una ecuación. Es un primer salto -señala Duval (2006) - y de este modo no se obtiene *"...la misma segmentación semántica de datos problemáticos en la expresión lingüística y en la expresión algebraica"*. El segundo requisito o salto tal como lo designa Duval (2006) se halla en el tratamiento algebraico, para este autor *"…en el tratamiento algebraico los símbolos de las operaciones prevalecen sobre los símbolos que representan a los números"*. Por otra parte, señala que la resolución de ciertos problemas a través de la *conversión* de una expresión lingüística en otra algebraica y luego el *tratamiento* en el marco ya de esta última expresión, es de una complejidad cognitiva importante para los alumnos que no siempre se tiene en cuenta en la enseñanza.

ACERCA DE LAS CLASES OBSERVADAS

Los episodios que analizaremos corresponden a una clase en donde la tarea para los alumnos es averiguar en una serie de problemas si existe un número en el conjunto Z, que verifique ciertas condiciones. Los enunciados son los siguientes:

"*Resolvé las siguientes situaciones, justificando tus respuestas.*

1) ¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado -107?

2) ¿Existe algún número entero que sumado a -27 dé como resultado -107?

3) ¿Es posible hallar algún número entero que multiplicado por -89 dé como resultado -5073?

4) Existe algún número entero que multiplicado por 74 dé como resultado -9475?

5) ¿Hay algún número entero que al dividirlo por 126 de como resultado -478?

6) ¿Existe un número entero que al multiplicarlo por -5 y sumarle 434 dé como resultado -772?"

Para resolverlos no es necesario recurrir al planteo de una ecuación, pueden utilizarse procedimientos aritméticos basados en las propiedades de las operaciones definidas en Z. De los seis problemas presentados, dos no tienen solución en Z lo cual justifica que se pregunte si existe un número entero. Sin embargo cabe señalar que cuatro de ellos (1, 2, 3 y 5) siempre tienen solución - independientemente de los números implicados – ya que la solución involucra operaciones cerradas en Z (suma y producto), los otros pueden tener o no solución en Z dependiendo de los datos dados.
En esta ponencia nos referiremos únicamente al primer problema y a la clase en la cual se lo resuelve y discute, dado que se presentan situaciones especialmente interesantes para analizar en relación con la gestión de la clase.
En una entrevista previa a esta clase el profesor afirma que anteriormente "repasaron" la operatoria con números enteros y trabajaron el uso de las ecuaciones en el conjunto de los números naturales y que en esta clase el objetivo es lograr que los alumnos amplíen sus conocimientos sobre las ecuaciones a partir de trabajar en otro campo numérico, el de los números enteros. Puede interpretarse a partir de esta entrevista que espera de sus alumnos el

planteo de ecuaciones para hallar el número buscado en los problemas, aunque el análisis en términos del contenido en juego permite concluir que es posible encontrarlo a través de un cálculo aritmético.

El análisis del registro audiovisual de la clase y su posterior transcripción, nos permitió identificar tres grandes segmentos en la gestión del docente, en relación con la resolución del primer problema:

1° segmento: El profesor solicita la resolución del problema, sin dar indicaciones sobre los procedimientos a emplear e insistiendo en que trabajen con sus compañeros. Este segmento tuvo una duración aproximada de 20 minutos.

2° segmento: El Profesor "negocia" la aparición de las ecuaciones como recurso de resolución de los problemas, con una duración de 5 minutos.

3° segmento: El profesor asume la responsabilidad de plantear la ecuación, de recordar la técnica de resolución y de formular una manera de validar el resultado. La duración de este segmento es de 10 minutos.

En cada uno de estos tres segmentos reportaremos los episodios más importantes, describiendo la gestión del profesor y las actuaciones de los alumnos.

1° segmento

En un primer momento de la clase la intención del profesor es que los alumnos resuelvan por sus propios medios sin aportar datos sobre los posibles procedimientos, a pesar de las insistentes demandas de ayuda por parte de los alumnos. El corrimiento del profesor ante las demandas de sus alumnos parece corresponder a una concepción de lo que debería ser su rol desde una perspectiva constructivista.

La siguiente intervención es un ejemplo del modo en que lo concibe en este primer momento de la clase.

> **P**: *¿Cuál era la pregunta? A ver, escuchamos…Dice: Resolver las siguientes situaciones, justificando las respuestas. Entonces la primera. ¿Hay algún número entero - o sea, nosotros estamos trabajando con números enteros, ¿está? - que sumado a 27 dé como resultado -107? bueno entonces, si hay, si encuentran, díganme cuál es, y si no digan por qué, o sea, eso significa que justifiquen, ¿está?*

Los alumnos parecen no comprender qué se espera de ellos y el profesor sólo se limita a la relectura de la consigna.

> A8: *Profesor, ¿cómo puede ser que hay algún número entero que sumado… que sumado a 27 de por resultado -107?*
> *(…)*
> A6: *¿Pero cómo puede ser sumado?*
> *(…)*
> A8: *No entiendo*
> A4: *Yo tampoco.*
> A5: *Muy difícil es*
> *(…)*
> A7: *Profesor no hay*
> A8: *Y no nos puede decir si hay o no, no más?*
> *(…)*

Los alumnos no pueden aceptar que sea posible sumar un "algo" a un número positivo (27) y que el resultado sea un número negativo (-107); esto los lleva a afirmar que no existe un número que cumpla con tales condiciones. Si bien puede suponerse que saben realizar las operaciones con enteros, lo que está en juego en esta primera parte, es una ruptura de las propiedades de la suma de enteros con respecto a la suma de naturales: la primera "no siempre agranda".

Algunos alumnos expresan que deberían hacer una operación con el número 27; el conflicto al que se enfrentan se relaciona con la ruptura mencionada anteriormente que no ha sido superada. No es posible para ellos imaginar una suma de 27 más un número negativo. Por

ejemplo un alumno plantea la disyuntiva: *¿Qué tengo que hacer? ¿Sumar* (ya que la consigna dice: …**sumado** a 27*) o que el resultado sea -107?*
Esto suscita el siguiente diálogo:

P se acerca a una pareja de alumnos A_1 y A2.

El alumno identificado con A_1 mostrando su producción pregunta al P: *¿Cuál es? ¿La suma de todo o la suma que hay que hacer?*

P: *Te tiene que dar la suma. ¿Cuánto te da la suma?*

A_1: *161* (Este número surge de la suma de 27 más 134; el origen de este último número no fue registrado)

P: *Entonces no cumple lo que está diciendo*

A_1: *No, pero le digo, ¿le pongo el resultado que me da la suma?*

P: *¿Cuál hiciste? ¿Cuál es tu número… ?*

A_1: *134*

P: *Que sumado a 27 te da por resultado -107?*

A_1: *ajam…*

P: *Y bueno, entonces si vos decís que si hacés la suma no te da -107...*

A_1 : *Si, me da...*

P: *Bueno, entonces por qué me decís si ponés...*

A_1 : *No, yo digo la suma de 134 + 27 me da 161. Pero la suma original sería si es menos, entonces me da -107.*

P: *O te da -107 o te da 161*

A_1: *-107*

P: *Y entonces la otra suma por qué…*

A_1: *No, la otra suma es sin el menos*

A_2: *Acá le sumó y acá le restó*

A_1: *La otra suma es sin el menos*

P: *Ah, y ¿cuál es la diferencia?*

A_1: *El menos... la suma con el menos*

P: *Entonces qué es... ¿cuál es tu conclusión?*

A_1: *Que me da -107 pues…*

P: *Entonces cumple...*

Una cuestión importante de mencionar es el conflicto de significados que se puede percibir en este episodio. Un par de alumnos ha encontrado el número 134 como posible respuesta y argumentan: *Si se **suma** 134 a 27 da 161, si se quiere que dé -107 hay que restar* (no sumar un negativo) *o sea 134 - 27.* No pueden concebir que a 27 se sume un negativo: -134, mientras que el profesor pretende comunicar que pueden decidir por sí solos verificando si al realizar la operación indicada obtienen efectivamente el resultado -107. Esto es lo que muestra las preguntas del profesor: "*cuánto te da la suma*" o "*cuál es tu número*" o "*...si haces la suma te da -107*?". Intenta que los alumnos verifiquen si el número corresponde a una cuenta que aún no han logrado identificar claramente.

En la confrontación de los procedimientos el Profesor plantea:

P*: A ver, vamos a empezar a ver, para ayudarle a algunos de los chicos que todavía no están encontrando. A ver quién me puede decir... pasá. Bueno, Maxi, pasá a hacer el primero. Vamos a ver lo que hace Maxi y vamos a preguntarle lo que no hace.*

A3: *Yo ya encontré*

P: *¿Hay algún número entero que sumado a 27 dé como resultado -107?*

(Maxi termina de escribir en el pizarrón 134-27=-107)

A8*: Ese es profesor*

P: *¿Cuál es?*

A8*: 134*

P: *Bueno, la mayoría de los que encontraron, encontraron ese número. Hay gente que todavía no encontró. ¿Cómo llegaste a ese?*

A8: *Haciendo la suma profesor*

P: *Haciendo la suma... pero cómo fuiste buscando*

A8: *Me fui fijando qué número sumado a -27 da 107*

P: *¿Cuánto te tienen que dar?*

A8: *107*

P: *-107*

A3: *-107*

Se advierte el esfuerzo de este alumno en compatibilizar sus conocimientos sobre la resta en N (minuendo mayor que el sustraendo) con que el resultado tiene que ser -107.

2° segmento:

En el primero – transcurridos 18 minutos de clase - pocos alumnos han encontrado el número -134 como respuesta del problema y en el pizarrón ha quedado la escritura incorrecta: 134 – 27 = -107. Algunos hablan de 134, pero no de -134, como si se pudiera separar el signo de la cantidad, o más bien como si el signo no tuviera la misma importancia que el número.

Reproducimos ahora el diálogo que se suscita posteriormente que muestra claramente el abandono de las producciones de los alumnos y su intención de lograr que sean ellos mismos los que decidan plantear una ecuación.

P: *Bien. ¿Hay alguna otra manera de hallar más fácil esto?* ***(*)***

As (varios): *no*

A*: No, Profesor no hay, para mí…*

P: *Y ¿cómo vamos a hacer?*

A: *¿Eh?*

P: *¿Cómo vamos a hacer? Cada vez que necesitemos ¿tenemos que buscar como hicieron?*

A: *Y yo busqué.*

Otro*: Y no va a venir solo el número corriendo, Profesor. Hay que buscar nomás…*

P: *Pero yo vi que alguien estaba haciendo de otra manera. ¿Vos querés demostrar cómo estabas haciendo?* ***(*)*** (el alumno no accede al pedido del profesor)

P: *Pero además estos problemas no vinieron así porque sí hoy, no más cayeron... Tiene que ver con lo que venían trabajando. ¿Qué venían trabajando?* ***(*)***

A1: *Números*

A5: *Ecuaciones*

P: *Ecuaciones. Entonces ¿se puede plantear una ecuación acá?(*)*

(Algunos alumnos dicen sí, otros no)

P: *A ver, ¿cómo plantearíamos la ecuación?*

(...)

P: *Hacé Maxi, cómo plantearías la ecuación*

A8: *No sé profesor, si yo hice de esa manera*

P: *Bueno, piensen Uds…*

Como puede observarse el profesor plantea preguntas cada vez más enfocadas a obtener la respuesta "ecuaciones". Una vez obtenida solicita su escritura.

3er segmento

En relación al planteo de la ecuación el P retoma su posición inicial de respeto al trabajo de producción de los alumnos:

P: *Ahora lo que van a hacer es buscar cómo podemos escribir eso, o sea, ¿cómo podemos plantear la ecuación para encontrar la manera más fácil de resolver. ¿Está? Dale, escribimos.*

A6: *¿Y qué escribimos?*

P: *Lo que vamos a hacer en el punto uno es tratar de plantear una ecuación, buscando una manera más fácil, es decir, una expresión que nos permita hallar ese valor más fácil.*
Luego de la espera de algunos minutos, dejados para el trabajo de los alumnos, las intervenciones del profesor muestran que decidió asumir bajo su responsabilidad las distintas tareas relativas al planteo de una ecuación, a la técnica de resolución y a la verificación de la solución, si bien las realiza en el marco de un diálogo con los alumnos. El siguiente pasaje es elocuente en ese sentido:

P: *...cuando yo digo hay algún número, ¿qué estamos diciendo ahí?*
As (varios**)**: x.
P: E*stamos buscando un valor de x. O sea, a ese que no sabemos le llamamos x.*
As (varios): S*í.*
P: *Y después dice "que sumado a 27"...*
A (varios): M*ás 27.*
P: *Más 27... dé como resultado, dé como resultado...*
A10: *-107.*
P: *-107* (**P** escribe en el pizarrón: x+27= -107).
P: *Bueno, entonces, lo que hay que hacer ahora ¿qué es?*
A6: *Despejar*
A6: *Pasar*
P: *¿Qué hago?*
A6: *Pasar*
A10: *Más 27 al menos*
P: *O sea, pasá... pasá Miriam*
A10: *Usted me ayuda profesor*
(Escribe -27 al lado del -107 y encierra estas dos cifras en un círculo)
(...)
P: *Bueno, hacé.*
(Mira la pizarra, buscando una solución. Los compañeros le gritan 134 y 80)
A10: *Bueno, cállense*
En el pizarrón escribe la siguiente cuenta: x + 27 = -107 de esta manera:

$$
\begin{array}{ccccccc}
x & + & 27 & = & -107 & - 27 \\
 & & & & \underline{27} & \\
 & & & & 80 &
\end{array}
$$

P: *A ver, ella dice que es 80, que 80 es el valor de equis. Quiere decir que yo lo reemplazo acá y te tiene que dar ¿cuánto? te tiene que dar -107 y ¿80+27 te da -107?*
A (varios): N*o*
A8: *Sí, le da 107 pero positivo profesor*
P: *Me da 107 positivo, o sea que 80 no puede ser.*
A8: *134 es el número*
P: *O sea, ¿qué está pasando?*
A8: *La hizo mal, porque tenía que pasar al de la suma, tenía que sumar los dos negativos, y ahí tenía que sumar y le da 134.*
P: *¿Entendés lo que te dice él?*
A10: *No*
A (varios): *Yo tampoco*
P: *Lo que él te dice es que estás sumando mal esto: -107 -27*
A8: *Estás sumando mal, le tenés que cambiar el más.*
A11: *Ah, hay que sumarle*
A10: *Son dos negativos...*

A8: *Si pero …*
A11: *Hay que sumarle esos dos pero es resultado positivo. Es más*
A8: *Menos, menos... o sea, - 107 - 27 te da todo negativo...*
A11: *107…*
A6: *-107+27 ahí te da*
A8: *-107-27* (se ríen)
A10: *-107... y después?*
A8: *-27*
P: *Es lo que te quedó acá*
A8: *Y bueno, ahí tenés que sumarle. Y eso es. ¿O no es así?*
P: *¿Es igual a 134?*
A8: *Y sí, así tiene que ser*
A11: *-134*
A8: *Ah, sí, -134*
P: *Bueno, ahora, si ponemos acá -134 + 27 tiene que ser igual a -107. ¿Cumple o no?*
A (varios): *No*
P: *¿No?*
A (varios): *Si*
P: *Sí me dicen de los dos lados. Sí, éste es el valor al que habíamos llegado...*
Bueno, ahora vamos a hacer el segundo problema.

Este último diálogo muestra que a pesar de un proceso, aparentemente fácil para los alumnos, de planteo de la ecuación, su resolución hace aparecer nuevamente las dificultades de comprensión de los números enteros y de la operatoria con ellos. Si bien el P planteó la verificación de que -134 era el número buscado, no se puede afirmar que la mayoría de los alumnos haya comprendido que ese es el número solución ni que se obtiene del cálculo -107 - 27.

DISCUSIÓN DE LOS DATOS

La clase observada y analizada, se inicia con la presentación del problema y tal como anticipamos el profesor espera que los alumnos resuelvan por sí mismos y más aún, que recurran a plantear y resolver una ecuación. Sin embargo, el problema plantea una pregunta de existencia, no saben si el número existe o no y solicitan la aclaración del profesor (*¿y no nos puede decir sí o no, nomás?*). A pesar de que consideran que no existe un número que sumado a 27 dé un negativo, la afirmación de un compañero de haber encontrado el número, los impulsa a tratar de determinarlo.
Rápidamente, se enfrentan a un conflicto ya citado: ¿sumar como indica el enunciado o restar para obtener 107? El Profesor – tal vez sin comprender este dilema – explicita que para saber si el número encontrado es o no correcto, deben controlar que al reemplazarlo da efectivamente el resultado de una cuenta. Se trata de una cuenta que los alumnos no han escrito aún y de este modo difícilmente puedan identificar qué se debe reemplazar y dónde.
Desde los primeros momentos de la clase, uno o dos alumnos mencionaban 134 sin el signo correspondiente y el Profesor no pone a discusión si se trata del número buscado. En ningún momento de la clase se retoman las reglas de la operatoria con enteros.
En el segundo segmento, las frases marcadas con (*) muestran la negociación "a la baja" del docente, para obtener la mención de las ecuaciones por parte de los alumnos. Se trata del ya famoso efecto Topaze identificado por Brousseau en los años 90. Como no "puede" ni "quiere" decir directamente el recurso que espera usen sus alumnos, es decir las ecuaciones, "sugiere" la respuesta disimulándola bajo *códigos didácticos cada vez más transparentes* (Brousseau, G. 1990*)*. Pero de esta manera, el problema ha cambiado totalmente. Ante los fracasos repetidos - los alumnos no dicen "ecuaciones" - el Profesor *mendiga una señal de*

adhesión y negocia a la baja las condiciones en las cuales el alumno terminará por decir "ecuaciones".

El derrumbamiento completo del acto de enseñanza está representado por la simple orden: "*traten de escribir una ecuación"*; el Profesor termina por tomar bajo su responsabilidad lo esencial del trabajo. La respuesta que debe dar el alumno está previamente determinada. Evidentemente los conocimientos necesarios para producir esta respuesta cambian también su significación. Planteando preguntas cada vez más fáciles, el Profesor trata de obtener la máxima significación para la mayoría de los alumnos. La conservación del sentido a través de los cambios de preguntas está bajo el control de los conocimientos del profesor.

El problema puede ser resuelto con recursos aritméticos y por lo tanto el planteo de la ecuación no aparece como necesario. De esta manera la nueva herramienta - para los alumnos - puede convertirse en una complicación innecesaria. Sin embargo en la clase observada, plantear y resolver una ecuación puede aparecer– y el Profesor así lo expresa - como un procedimiento de uso más fácil que otros (tanteo, resolución aritmética,…) que en realidad nunca fueron formulados explícitamente.

¿Por qué los alumnos podrían en esta clase llegar a esa conclusión?

En **primer lugar** porque se está trabajando con enteros y los conocimientos de los que disponen son muy frágiles; incluyen en el mejor de los casos reglas para operar con enteros, pero no propiedades de las operaciones, ni comprenden la diferencia entre el signo de la sustracción y el signo de un número.

En **segundo lugar**, porque cuando el profesor propone un trabajo algebraico, la mayoría de los alumnos aún no ha podido resolver el problema con otros recursos.

En **tercer lugar** porque las características del problema, formulado en un contexto matemático, permiten que el profesor haga aparecer el planteo de la ecuación (o la modelización) como si fuera una "simple" traducción del enunciado a símbolos, libre de toda complejidad.

Y en **cuarto lugar** relacionado con el anterior, porque es justamente el Profesor quien asume la responsabilidad de conducir el proceso de planteo, resolución y validación de la ecuación.

Sin embargo, la letra x ¿porta para los alumnos efectivamente los significados presentes en el texto? Se trata de una pregunta de existencia sobre un número que debe cumplir ciertas condiciones. No se sabe si el número existe o no y menos aún cuál es en el caso en que existiera. Todo eso debe quedar representado en la letra x, con la cual además, se debe poder operar: sumar, restar, multiplicar, etc.

Está claro que esta representación, reduce visiblemente el espesor semiótico de la frase: *¿Hay un número que…?* tal como señalamos en el apartado sobre modelización algebraica**.**

Desde la perspectiva teórica asumida a partir de los planteos de Duval (2006), que mencionamos en el apartado sobre modelización algebraica, consideramos que escribir la ecuación como procedimiento de resolución de un problema que se intenta solucionar, no es más fácil que realizar un cálculo aritmético, tanto desde el punto de vista disciplinar como desde los conocimientos disponibles por estos alumnos; efectivamente es de gran complejidad.

Al plantear la ecuación ¿ha disminuido la dificultad de los alumnos de operar con los números enteros? En un principio, la dificultad había aparecido - podríamos decir - en el primer miembro de la ecuación, en sumar 27 más un número desconocido. Al escribir x + 27 como "traducción" del enunciado, esa dificultad ha sido ocultada porque no es necesario explicitar el signo de x y porque el "despeje", tal como se presenta, no se basa en propiedades de las operaciones en Z. La dificultad se ha trasladado al segundo miembro de la ecuación, para realizar la operación -107 - 27 que permitiría obtener el valor x.

Nos podemos preguntar qué significado pueden atribuir los alumnos a la escritura -107 - 27. ¿Se trata de una suma de dos números negativos, o tal vez de una resta de un negativo menos un positivo? En el estado actual de los conocimientos de estos alumnos si se trata de una suma debería estar presente el signo más.

La igualdad -107 + (-27) = -107 – 27 está lejos de poder ser establecida por estos alumnos. Por otra parte, sumar el número (-27) a ambos miembros, que permitiría justificar la técnica, saldría del marco aritmético en el cual se ubican los alumnos; el número -27 no forma parte de los datos del problema.
La alumna que escribe en el pizarrón -107 - 27 = como resultado de "pasar" 27 restando al segundo miembro, escribe sin embargo, en forma vertical la cuenta 107 – 27 = 80 si bien, el signo que hace corresponder a una resta es el del número -107.
Otros alumnos afirman que el resultado es 134. El profesor sólo cuestiona el resultado 80, aceptando en cierto modo que 134, aún si el signo correspondiente, es más aceptable que el primero.
Se advierte en el último tramo de la clase, una posición más confortable del profesor al gestionarla, en relación con los momentos iniciales cuando los alumnos trabajan en el marco aritmético. Interpretamos que la falta de intervención del profesor para encauzar el trabajo de los alumnos en los segmentos 1° y 2° podría deberse a que no dispone de una organización tanto didáctica como matemática en el marco de la aritmética. No parece disponer de una serie de pasos, preguntas, discusiones, representaciones posibles, justificaciones, formas de recolección de información sobre las producciones de los alumnos, que le permitan tomar decisiones y gestionar la resolución de los problemas en ese marco.
Si bien la tarea dada a los alumnos está clara, nunca se habla de cuál sería la técnica aritmética de resolución, basada en alguna tecnología como por ejemplo: *la resta permite encontrar uno de los sumandos cuando se conoce el resultado de una suma y el otro sumando*. La técnica resultante consistiría en restar el sumando al resultado.
Se puede observar que incluso sus expresiones verbales, aluden a una resolución algebraica no a una aritmética, como cuando expresa: "*Entonces, cumple*" o ... *"Satisface la ..."* e interrumpe la frase.
Si aceptamos la hipótesis de que el aprendizaje depende de una negociación de significados entre el alumno y el profesor para compartirlos, en un espacio socio-discursivo, en esta clase, como hemos visto, la gestión del profesor no parece colaborar con esa construcción. Las posibilidades reales de los alumnos de apropiarse de las maneras de pensar, hablar y actuar más cercanas al género discursivo de la disciplina –en particular del álgebra- se ven ampliamente recortadas por las características de enseñanza planteada en esta clase.
Los alumnos de esta clase están ingresando a la *comunidad discursiva "*clase de algebra", tal como designa Bernié (2006); sin embargo no se ha propiciado un proceso de recontextualización de sus respuestas iniciales en el marco aritmético, que permita afirmar que están en camino hacia la apropiación de un modo de pensar y actuar relacionado con las escrituras algebraicas de las que se tienen que apropiar, si bien el problema seleccionado no es el más pertinente para que esto suceda.

REFLEXIONES FINALES

En cierto modo, lo que estuvo en juego en esta clase se puede describir en términos de "pasajes":

- Para los alumnos: de los naturales a los enteros y desde la Aritmética al Álgebra
- Para el profesor: desde una enseñanza "tradicional" aunque dialogada, a una enseñanza "constructivista".

Estos pasajes plantean dificultades, rupturas y conflictos a sus protagonistas, y en general son escasamente aclarados o superados.
En particular en relación con el profesor, hay evidencias de la tensión que se genera entre su propósito de asignar importancia a la producción matemática de los alumnos y la falta de una organización matemática y didáctica para gestionar la clase en ese contexto de producción. A la larga la tensión entre esas dos posiciones, especialmente cuando las respuestas no son las

anticipadas, lo lleva al abandono de su intento inicial y opta por un rol que lo ubica como único responsable del trabajo matemático en el aula.
Finalmente, queremos señalar que actualmente muchos profesores se encuentran en mayor o menor medida, transitando este pasaje y no siempre cuentan con los conocimientos y herramientas didáctico-matemáticos necesarios para un tránsito exitoso.

BIBLIOGRAFÍA

- BAJTIN, M. 2006. *El problema de los géneros discursivos,* en Estética de la creación verbal. Bs As: Editorial siglo XXI.
- BERNIE, J.P. 2002. L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de «communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ? *Revue Française de Pédagogie*, 141, 77-88.
- BOLEA, P. 2003. *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tesis doctoral. Departamento de matemáticas. Universidad de Zaragoza. España.
- BROUSSEAU, G. 1990. *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. FAMAF Córdoba traducción de D. Fregona y F. Ortega.
- BROUSSEAU, G. 2007. *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Traducción: D. Fregona. Bs As: Libros del Zorzal.
- CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M. y GASCÓN, J. 1997. *Estudiar matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Editorial Horsori.
- D´AMORE, B. 2006. *Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido*. Relime, Número Especial, pp. 177 a 195.
- DUVAL, R. 1993. *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, ULP, IREM Strasbourg.
- DUVAL, R. 2006. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la RSME*, Vol. 9.1.
- SADOVSKY, P. 2003. *Condiciones didácticas para un espacio de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas*. Tesis doctoral. Facultad de Filosofía y letras. Universidad Nacional de Buenos Aires. Argentina.
- SENSEVY, G. y MERCIER, A. 2007. *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Rennes: PUR. Cap. 1. Categorías para describir y comprender la acción didáctica, pp 5-34. Traducción: J. Duque y R. Rickenmann
- SESSA, C. 2005. *Iniciación al estudio didáctico del algebra*. Bs As: Libros del Zorzal.