

## El cálculo algebraico: una puerta de entrada a los números enteros

P. Detzel – R. Martinez – M.E. Ruiz – E. Issa Nuñez - L. Colipe  
J. Cumín – J. Zambrano – A. Petich – E. Barrio – R. Morari  
Facultad de Economía y Administración-Facultad de Ciencias de la Educación –  
UNComahue –IFD N° 12 Neuquén  
[pdetzel@gmail.com](mailto:pdetzel@gmail.com)

### Taller. Didáctica de la Matemática. Educación continua. Nivel Medio.

**Palabras claves:** modelización algebraica, significado de los signos “+” y “-“, multiplicación de expresiones algebraicas, cálculo algebraico, números negativos.

### RESUMEN

Este taller propone continuar el estudio de la problemática de la enseñanza de los números negativos en un entorno algebraico, iniciado en la VI REPEM 2016. En esta oportunidad se focaliza el trabajo en las razones de ser de los números negativos: el cálculo algebraico. Esta perspectiva busca una introducción escolar del álgebra como herramienta funcional que permite llevar a cabo una actividad de modelización matemática para introducir los números negativos. Este modelo asume, la ruptura epistemológica que supone el paso de la aritmética al álgebra. Para ello se toman grupos de problemas extraídos de la propuesta de Cid & Ruiz Munzón (2011) que plantean abordar los números enteros conjuntamente con el álgebra.

Se propone hacer un recorrido que retome el trabajo desarrollado en el Taller<sup>1</sup> anterior, en relación a la construcción de expresiones algebraicas, simplificación de las mismas, para hacer foco en el análisis y discusión, del grupo de problemas que involucran encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas y multiplicar expresiones algebraicas. Este recorte es parte de una secuencia más amplia que hace posible surgir la estructura de los números negativos al mismo tiempo que aparecen diferentes objetos algebraicos y se va poniendo de manifiesto las grandes diferencias existentes entre el quehacer algebraico y el aritmético.

**DESTINATARIOS:** Docentes, formadores de docentes y estudiantes del profesorado de matemática.

### FUNDAMENTACIÓN

En este Taller se comparte un tramo de la experiencia sobre la introducción de los números negativos en un entorno algebraico, en la enseñanza media, que se lleva a cabo desde el año

---

<sup>1</sup> Taller: “Una aproximación al estudio de los números negativos en un entorno algebraico” en VI REPEM 2016

2013. En esta línea, el equipo de investigación<sup>2</sup> decidió estudiar la propuesta de Cid y Ruiz Munzón (2011) cuyas actividades de estudio e investigación ofrecen una génesis escolar del número negativo en el contexto algebraico. En el proceso de investigación, estas actividades han sido adaptadas en forma colaborativa -entre docentes e investigadores-, e implementadas en dos colegios de la ciudad de Cipolletti, provincia de Río Negro. En esta adaptación, se incorporó al estudio el trabajo de tesis doctoral de Cid (2015) que posibilitó ir rediseñando el proyecto de enseñanza e ir reflexionando acerca de los aspectos centrales de esta problemática: la introducción escolar simultánea de los números negativos y del álgebra elemental. Con la intención de compartir estas reflexiones, en el año 2016, se realizó el Taller “Una aproximación al estudio de los números negativos en un entorno algebraico”, en el marco de VI REPEM, y en esta ocasión se espera profundizar en el análisis de esta propuesta abordando con más detalle parte de ese tramo del trabajo.

El fundamento del planteo, para la enseñanza de estos números, se apoya en la consideración que en el cálculo algebraico se encuentra la razón de ser de los negativos y de esta manera se plantea una oportunidad de construir un sentido ligado al quehacer en el álgebra. Este recorrido conlleva a reinterpretar significados de algunos objetos matemáticos, conocidos en el ámbito de la aritmética, que funcionan de manera diferente en álgebra. Uno de ellos es ampliar el significado aritmético de la resta como sustracción al significado algebraico de la resta como diferencia.

Se parte de considerar que los conocimientos disponibles de los alumnos son los números naturales y su operatoria. Los nuevos problemas a resolver van a llevar a que esos conocimientos no resultan eficaces para dar repuestas a las inquietudes y así surgirán nuevos significados dando lugar a ampliar la concepción de número (ya no pegada a la idea de medida) y a ampliar las reglas de cálculos (de sumando y sustraendo a operación de operación).

Para construir ese recorrido, dado que se dispone de las reglas de cálculos de *sumandos* y *sustraendos*<sup>3</sup>, será preciso ampliar el repertorio, pues la regla de supresión de paréntesis hasta el momento no se tiene. Este trabajo implica abordar la construcción de los medios para efectuar una operación de una operación, es decir, para este caso será la regla de cálculo para restar una resta (restar una resta equivale a restar el minuendo y sumar el sustraendo). Así, la resta entre expresiones debe ser entendida como la diferencia entre ellas y, la comparación de expresiones es la que dará lugar a ese proceso. Será entonces necesario reinterpretar la resta como “diferencia” y dejar de considerarla asociada con acciones de separar o quitar.

---

<sup>2</sup> El grupo de trabajo está constituido por docentes de FaEA, FACE, IFD N°12 y docentes de nivel medio. Participaron: R. Martínez, P. Detzel, M. Ruiz, J. Zambrano, J. Cumin, E. Issa, L. Colipe, A. Petich y E. Barrio.

<sup>3</sup> Un paso transitorio para avanzar con el cálculo algebraico se basa en la construcción de las reglas de sumandos y sustraendos para efectuar cálculos del tipo  $x - 9 + 2$ , y así surge una modificación del sentido del signo “-”, del de resta como operación binaria al de resta como operativo binario generalizado, Cf Detzel-Martinez, 2017.

Además, se aborda el producto de expresiones algebraicas. Discutir los problemas que involucran estas cuestiones llevan a dar sentido a los productos de sumandos y sustraendos asociados al cálculo de áreas de rectángulos y a sus variaciones en función de la variación de sus lados. Las reglas de cálculos inmersas en las resoluciones conducen a manipular expresiones que exigen gestionar el producto entre sumas y/o restas. En esa manipulación aparece la propiedad distributiva como necesaria para avanzar en el desarrollo algebraico que imponen la resolución de los problemas a discutir.

La manipulación de las expresiones algebraicas que se originan a partir de abordar los problemas de la propuesta posibilitan hacer un uso funcional del álgebra a través de enfatizar su sentido por sobre la puesta en marcha de las técnicas y la nomenclatura propia de ese ámbito. Interesa reflexionar sobre la elección pertinente de las variables para modelizar el problema de modo tal que ayude a obtener la mayor cantidad de información posible. Este trabajo va de la mano con el de hacer evidente algunas diferencias entre las técnicas del cálculo algebraico y las técnicas de cálculo aritmético. En ese sentido, se tratará de dar relevancia al trabajo algebraico involucrado a partir hacer foco en la reflexión y en la toma de decisiones que promueve un trabajo funcional de la escritura algebraica.

El cálculo algebraico involucrado surge a partir de evidenciar su economía y su funcionalidad. Además, la construcción de programas de cálculo avanza hacia la operatoria en términos de sumandos y sustraendos, hasta aceptar los nuevos números. El álgebra aparece como medio para obtener información, conservar una memoria de los datos y cálculos, mostrar la estructura del problema. Se analiza la complejidad y precisión de los códigos de escritura algebraica a partir del trabajo descontextualizado propio del trabajo algebraico en los que el control de los cálculos es sintáctico y no semántico como lo es en aritmética (Cid y Ruiz Munzón, 2011). La resolución de los cálculos -que no son algorítmicos- implicará reflexión y toma de decisiones que dependerá de su funcionalidad. Del mismo modo, se espera hacer evidente en qué medida los problemas a considerar ponen de manifiesto el principio de economía de gestión que rige el cálculo algebraico, a partir de del juego entre problemas contextualizados y descontextualizados.

## **OBJETIVOS**

Este taller se propone como espacio para discutir diferentes aspectos didácticos-matemáticos que se tornan relevantes a la hora de la enseñanza de los números negativos a partir de considerar la modelización algebraica. En particular se considerarán los fundamentos epistemológicos que sustentan dicha propuesta.

Son objetivos específicos:

- Reflexionar sobre la importancia del trabajo algebraico que conlleva la propuesta en cuestión para introducir los números negativos.
- Analizar, para cada grupo de problemas, las elecciones didácticas que sustentan la propuesta.
- Analizar los procedimientos puestos en juego en los diferentes problemas a la luz de los nuevos significados de los signos, de las operaciones, del tratamiento algebraico que se movilizan.
- Identificar los conocimientos que se producen a partir de la propuesta.

## PROPUESTA DE ACTIVIDADES

A partir de la resolución de un conjunto de problemas se espera promover un análisis de los mismos que lleve a discutir y reflexionar sobre los aspectos centrales que caracterizan la propuesta en cuestión. Se propone el análisis y discusión de tres grupos de problemas:

### **Primer grupo: Construir y simplificar expresiones algebraicas.**

Se trata de enunciados de problemas que permitirán recuperar las ideas centrales que abordan la construcción y simplificación de expresiones algebraicas y las reglas de cálculo, ideas discutidas en el Taller desarrollado en la VI REPEM 2016.

Surgen los programas de cálculos a partir de modelizar situaciones en la que la falta del dato inicial o de uno de los datos intermedios impide llevar a cabo el programa de cálculo aritmético necesario para obtener la solución numérica. Para dar una solución al problema se necesita recurrir al uso de la letra y así se da lugar a las expresiones algebraicas aditivas (la “fórmula” que soluciona el problema) donde la letra asume un papel de parámetro o variable. La simplificación de expresiones algebraicas aditivas lleva a mostrar la economía que propicia la búsqueda de formas sencillas de hacer los cálculos y destacar un trabajo puramente algorítmico. El trabajo con la simplificación habilita a reinterpretar las operaciones aritméticas de suma y resta como composición de traslaciones que tiene “buenas” propiedades: asociativa, conmutativa, existencia de elementos neutro y opuesto, lo que ahonda en una mayor economía de gestión y justificación del cálculo algebraico.

Para el desarrollo de este apartado se tomará enunciados como:

#### *Actividad de tablets y celulares*

Un vendedor tiene celulares y tablets. Luego compra 21 celulares y 57 tablets. Después vende 30 celulares y 70 tablets. Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas:

N° inicial celulares	N° inicial tablets	N° inicial artículos	N° final celulares	N° final tablets	N° final artículos
80	150				
			65	120	
50					

El objetivo de esta actividad es que los alumnos resuelvan problemas mediante un programa de cálculo aritmético. La falta del dato inicial de celulares o de tablets impide llevar a cabo el cálculo aritmético necesario. Dar una solución al problema lleva a la utilización de la letra y se da lugar a la aparición de expresiones algebraicas aditivas donde la letra asume un papel de parámetro o variable. De esta manera el estudio de estas

expresiones, que modelizan los programas de cálculo aritmético y que dan solución al problema, van a permitir operar en términos de sumandos y sustraendos. Es decir, se trata de una actividad que exige la manipulación de varias fórmulas que corresponden a un mismo tipo de problema.

En las dos primeras filas de la tabla, los signos “+” y “-” son signos que intermedian entre dos números -signos operativos binarios-, mientras que en las filas restantes son signos que afectan a un solo número para indicar su papel como sumando o sustraendo -signos operativos binarios generalizados-. Por ejemplo:

Nº inicial de cel.	Nº inicial de tab.	Nº inicial de art.	Nº final de cel.	Nº final de tab.	Nº final de art.
50	t	50 + t	50+21-30 41	t+57-70 t-13	41+t-13 t+37

A medida que se pasa de un significado a otro se van construyendo las reglas de cálculo que son necesarias para dar respuesta al problema. En la fila citada para responder el Nº final de tablets se involucra expresiones del tipo  $t + 57 - 70$ , entendiendo que *a t le tenemos que sumar 57 y después restar 70 lo que equivale a restar 13* y, por tanto:  $t + 57 - 70 = t - 13$ .

Será necesario reflexionar sobre el trabajo algebraico involucrado en la resolución dado el interés de hacer vivir la necesidad de este funcionamiento en vista del camino iniciado en relación a los nuevos objetos que emergen. Por ejemplo, para la cantidad final de tablets representada por  $t - 13$ , que indica que la cantidad final de tablets es 13 menos en comparación a la cantidad que se tenía en el inicio, cuál es la relación entre esa expresión y los cálculos involucrados en la primera fila. Responder a esta cuestión puede llevar a discutir y así poner de manifiesto el funcionamiento algebraico de los cálculos, pues la relación entre 150 y 137 (en la primera fila a completar), está dada por “13 menos que la cantidad inicial”. Más aún, se podrá hacer notar el vínculo entre el cálculo  $150 + 57 - 70$ , para centrar la atención en que ese “13 menos” de la relación, surge al pensarlo como  $+57 - 70$ , pues sumar 57 celulares y resta 70 es lo mismo que restar 13. De esta forma se empieza a concebir los signos de una forma diferente a como se concibe en el cálculo aritmético, ya no se asocia a la suma/resta entre dos números positivos, si no que indica si es una cantidad que suma o que resta. Esta intervención es necesaria para hacer visible diferentes funcionamientos de los signos y construir el sentido del número negativo. Se discutirán problemas descontextualizados para este grupo. Un análisis didáctico matemático del conjunto de problemas llevaría a dar cuenta de aspectos y/o objetivos relevantes que aportan elementos a la hora de concebir la enseñanza en un aula de la escuela secundaria.

### **Segundo grupo: Comparar expresiones algebraicas y encontrar su diferencia**

La comparación permite la utilización de paréntesis y la aparición del sentido operativo unario de los signos + y -, sentido del signo vinculado a la construcción de los negativos en un contexto algebraico. Los problemas de este grupo, consisten en enunciados en los cuales se desconoce algunos de los datos, surgen expresiones las cuales serán objeto de comparación, para establecer un orden de las mismas y luego calcular diferencias. Este último requerimiento (el de calcular la diferencia) conlleva a concebir un nuevo significado a la resta como diferencia. Es decir, la resolución de estos problemas permite pasar del

significado aritmético de la resta como sustracción al significado algebraico de la resta como diferencia. En álgebra frecuentemente no se puede establecer de antemano cuál de los términos es mayor y por eso es fundamental entender las “restas” como “diferencias” porque, en tal caso, una diferencia negativa tiene sentido: nos cuantifica la diferencia entre dos cantidades y nos dice también que el primer término es menor que el segundo.

La comparación y la obtención de la diferencia entre dos expresiones algebraicas hace necesario el uso de paréntesis y de nuevas reglas de cálculo. Se inicia el cálculo de las diferencias con signo y su interpretación. Por un lado, el valor absoluto cuantifica la diferencia y, por otro lado, el signo (positivo o negativo) indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo.

Se propone analizar problemas del tipo:

Carlos tiene 6 bolitas más que Javier y Enrique 10 bolitas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más que Enrique, ¿cuántas más tiene?

Javier:	
Carlos:	
Marcos:	
Enrique	
Dif. Entre Javier y Marcos:	
Dif. Entre Carlos y Enrique:	

La resolución implica tratar con expresiones de dos variables que representan las cantidades a comparar. Discutir la complejidad que reviste esta elección del mismo modo que analizar por qué se propone completar una tabla, permitirá concebir cómo hacer viable un trabajo con este problema que lleve a hacer foco en el tratamiento de las expresiones. Expresar la diferencia entre:  $x + 6$  e  $y - 10$  (expresiones con letras diferentes) favorece discutir la pertinencia del uso del paréntesis  $(x+6) - (y-10)$ . Se pone en juego también, el registro de la diferencia entre expresiones. Se pone de manifiesto a través de la escritura otro sentido del signo “-”, hay que asociar que una diferencia se registra como una resta. Si se pretende priorizar el cálculo (porque en ese juego es donde se manifiesta la razón de ser de los enteros), entonces la comparación debe ser insuficiente y, para que esto ocurra, se involucran dos variables. Así, como la comparación no es eficaz, entonces para efectuar la diferencia se avanza en el cálculo de una resta. La significación de la resta, más allá de concebirla solo como una sustracción, se amplía al relacionarla con la diferencia. Un análisis que permita reconocer la relevancia del uso de más de una variable, la sintaxis de las expresiones y la necesidad inevitable del uso de paréntesis, abona fertilidad al pensar un funcionamiento posible en el aula.

### **Tercer grupo: multiplicar expresiones algebraicas**

La multiplicación de expresiones aparece para dar sentido a los productos de sumandos y sustraendos. Para ello se proponen cálculos de áreas de rectángulos donde uno de los lados es desconocido y con la comparación entre áreas cuando los lados de los rectángulos sufren aumentos o disminuciones. Dado que un lado es desconocido, la comparación de las áreas llevará a gestionar una operación entre paréntesis multiplicados por un sumando o un

sustraendo. Este trabajo está pensado para dar lugar a establecer las reglas de los signos correspondientes al producto de sumandos y sustraendos y así poner de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva en el cálculo algebraico. En esta etapa los números ya no son cardinales, sino que representan medidas de longitud, aunque el dominio continúe siendo el de los números naturales.

Se planteará problemas tales como:

*i) Dibuja un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm. Si el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm obtenemos un nuevo rectángulo. Dibuja este segundo rectángulo. Expresa la longitud de los lados de los dos rectángulos.*

*ii) ¿Qué pasará con el área del segundo rectángulo?, ¿disminuirá o aumentará respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?*

*iii) ¿Qué longitud tiene que tener el lado desconocido para que los dos rectángulos tengan la misma área?*

El objetivo en este problema es la comparación de áreas usando la diferencia: si la 1º expresión es mayor que la 2º entonces la diferencia es positiva por lo que el área de la primera es mayor que la segunda; si la 1º expresión es menor que la 2º entonces la diferencia es negativa, con lo que el área de la primera es menor que la de la segunda; y si al calcular la diferencia queda otra expresión, no se puede decidir cuál de las áreas es mayor o menor.

Se pretende efectuar un análisis didáctico matemático que lleve a develar en qué sentido este problema promueve un trabajo que lleve a gestar la regla de los signos correspondientes al producto de sumandos y sustraendos, vinculado con la disminución, aumento o mantenimiento de áreas. El dibujo de los rectángulos cobra relevancia como medio para abordar la validez y la equivalencia de expresiones, para luego centrar el trabajo en el cálculo y así las reglas tienen su lugar. El uso de la propiedad distributiva es la que se sitúa en el seno del cálculo. Nuevamente la sintaxis está presente en este trabajo. Se tratará de discutir qué despliegue algebraico es posible dimensionar que ayude a favorecer la aceptación de los números enteros como sumandos y sustraendos, donde la decisión de presentarlos en un contexto algebraico se debe a que fue este contexto el que permitió la aceptación de los números negativos y determinó su manipulación. Además, se analizará el rol que juegan las actividades contextualizadas y descontextualizadas.

**Finalmente**, en el desarrollo del Taller se dará lugar a discusiones e intercambios con los profesores participantes que amplían y enriquecerán las reflexiones. Se posibilitará un espacio de construcción de conocimiento didáctico en términos de conocer un modo de abordar el tránsito del paso del cálculo aritmético al algebraico en vísperas de llegar al número negativo, considerando características que destacan el trabajo algebraico. En ese sentido, ahondar en la comprensión de la naturaleza de la actividad matemática implicada, en la posibilidad de intercambio de miradas, de reconstrucción de ideas, nos posiciona en mejores condiciones para llevar adelante la enseñanza de esta temática.

**REQUERIMIENTOS:** se requerirá de un cañón para facilitar el planteo de actividades de trabajo y las circulaciones de las producciones de los grupos de participantes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- CID, E. (2015), *Obstáculos Epistemológicos en la enseñanza de los números negativos*. Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, España.
- CID, E. & RUIZ MUNZÓN (2011), *Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. En Bosch, Gascón, Ruiz Olarría, Artaud, Bronner, Chevallard, Cirade, Ladage & Larguier (Eds.) (2011), *Un panorama de la TAD* (pp. 579-604). CRM Documents, vol. 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.
- CID, E. Y BOLEA P. (2007). *Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico*. En Bronner, Larguier, Artaud, Bosch, Chevallard, Cirade & Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autressavoirs) comme outils de connaissance et d'action*. Ville :Maison d'édition.
- CID, E. (2002). *Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos*. Actas de las X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, vol. 2, 529-542, I.C.E. Universidad de Zaragoza.
- CID, E. (2000). "Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos." *Boletín SI-IDM*, 10, 1-15.
- CHEVALLARD - BOSCH - GASCÓN, J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.
- DETZEL, P. MARTINEZ, R. (2011), "El docente: su proyecto de enseñanza y la producción de sus alumnos", comunicado en IV Jornadas de Educación Matemática y I Jornadas de Investigación en Educación Matemática, U.N.Litoral, Santa Fe, 11 de agosto.
- DETZEL, P., MARTINEZ, R. (2017), *Cálculo algebraico. Un escenario fértil para la construcción del sentido del número negativo*. En revista *Novedades Educativas* Centro de publicaciones educativas y material didáctico. SRL. 2017 vol.nº29. p 63 - 66. Buenos Aires, Argentina.