LA CONSTRUCCIÓN DE DEFINICIONES GEOMÉTRICAS

Cruz, María Florencia[1], Scaglia, Sara[2] y Esteley, Cristina[3]

[1,2] Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.
[3]Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.
[1,2] Ciudad Universitaria. Paraje El Pozo s/n. Santa Fe. Argentina.
[3]Av. Medina Allende s/n, Ciudad Universitaria. Córdoba. Argentina.

ma.florenciacruz@gmail.com; sbscaglia@gmail.com; esteley@famaf.unc.edu.ar

Categoría del Trabajo, Nivel Educativo y Metodología de Investigación: Reflexiones generales, educación secundaria y educación superior, educación continua de los docentes en los distintos niveles.

Palabras clave: trabajo matemático- modelización matemática – definiciones - poliedros

RESUMEN

En el presente taller se pretende reflexionar acerca del proceso de definir o de formular definiciones en matemáticas, en particular en el dominio de la geometría tridimensional. Se propone generar un entorno de trabajo en el cual se lleven a cabo diferentes actividades que forman parte del quehacer matemático como definir, validar y modelizar en instancias de producción dentro de una comunidad matemática.
Se espera reflexionar con docentes y futuros profesores en matemática acerca del trabajo geométrico que es posible desarrollar en clases de matemáticas de diferentes niveles del sistema educativo y del empleo del proceso de modelización matemática como abordaje pedagógico.

INTRODUCCIÓN

Itzcovich (2005) considera que el trabajo en el dominio geométrico ha perdido espacio y sentido en los diferentes niveles educativos. El autor destaca la importancia de que no se continúe con esta tendencia, dado que se priva el acceso a un modo de razonamiento que es propio de este dominio y tiene un alto valor formativo. Asimismo diversos autores (Guillén, 1997, 2005; Rodríguez y Gutiérrez, 2007 y Gutiérrez y Jaime, 2015) destacan la importancia del trabajo y reflexión en torno a las nociones de geometría tridimensional.
En la actualidad, diferentes perspectivas en educación matemática señalan la importancia de promover experiencias de aprendizaje en las que los estudiantes se comporten como verdaderos matemáticos (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Itzcovich (2007) plantea que el trabajo matemático "quedará evidenciado ante los ojos de los alumnos a partir de las propuestas que las instituciones educativas les hagas experimentar a lo largo de la escolaridad" (p.10).
Teniendo en cuenta los supuestos anteriores se considera que la modelización matemática constituye un abordaje pedagógico potente para generar ámbitos de trabajo que proporcionen a los sujetos la posibilidad de llevar a cabo algunas actividades que forman parte del quehacer matemático, como conjeturar, validar y generalizar.

En este sentido y con una visión epistemológica particular respecto del quehacer matemático, se resalta el trabajo de Bassanezi (1994), quien afirma que la utilización de la modelización matemática como abordaje pedagógico, permite desarrollar modos particulares de pensamiento y actuación vinculados con la producción de conocimientos, la realización de abstracciones y formalizaciones y la interconexión con fenómenos (de naturaleza extra o intra matemáticos) y procesos empíricos que se consideran situaciones problemáticas.
En este taller se proponen dos objetivos principales. En primer lugar se espera construir definiciones de ciertos objetos geométricos tridimensionales a partir de un trabajo relacionado con los procesos de modelización matemática. En segundo lugar se pretende analizar el propio proceso de modelización matemática llevado a cabo durante la construcción de definiciones. Más precisamente, se espera proporcionar un espacio que ofrezca la oportunidad para generar instancias de discusión con los docentes y futuros profesores en matemática en torno a "la definición" o al proceso de generar una definición de un objeto matemático en el marco de un proceso de modelización matemática. Se analizan con este fin las definiciones de algunos tipos de figuras tridimensionales cuyas caras son polígonos regulares.

APORTES TEÓRICOS

Esteley (2014, p.54) tomando aportes de Bassanezi (2002) presenta un esquema que sintetiza el proceso de modelización matemática como proceso matemático que luego es fuente de inspiración para el abordaje pedagógico.

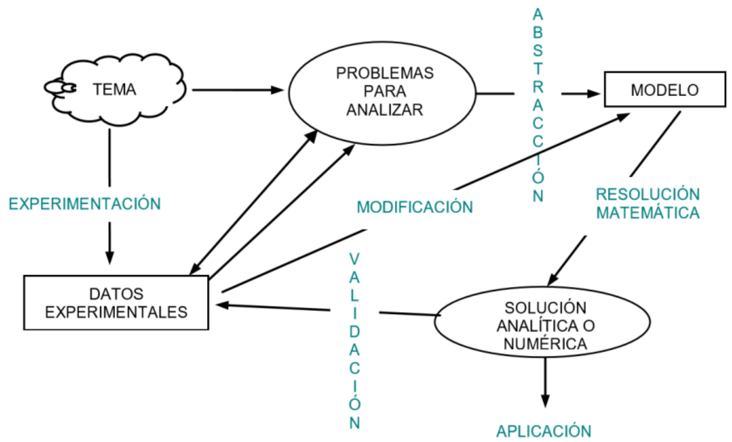


Imagen 1: Esquema de proceso de modelización matemática (Esteley, 2014)

Partiendo de una visión de la matemática que incorpora o reconoce el proceso de experimentación como medio para producir matemática, podemos indicar que, en términos generales el proceso de modelización se inicia con la recolección de datos experimentales que favorecen la comprensión del problema o su modificación. En segunda instancia se lleva a cabo la identificación y selección de variables que se tendrán en cuenta para la elaboración del modelo. Posteriormente se elabora un primer modelo que responde el problema y que se valida mediante la comparación entre los resultados obtenidos a partir del modelo y los datos experimentales. En esta instancia el modelo puede ser modificado, en cuyo caso se inicia nuevamente el ciclo (Bassanezi, 2002). Cabe reconocer que este proceso no sigue un desarrollo lineal sino que las diferentes fases se modifican de acuerdo a los resultados alcanzados en cada momento del proceso (Esteley, 2014).
El esquema presentado se utilizará como medio para abordar la cuestión de generar una o varias definiciones (que pueden ser calificadas como provisorias) de figuras tridimensionales. Freudenthal (1983) afirma que se pueden organizar diferentes fenómenos matemáticos y/o del

mundo real a partir de conceptos, estructuras e ideas matemáticas. “Por medio de las figuras geométricas, como triángulo, paralelogramo, rombo o cuadrado, uno tiene éxito organizando el mundo de los fenómenos de los contornos” (p.28). De modo similar se considera que las figuras poliédricas permiten organizar los fenómenos de los objetos tridimensionales que guardan ciertas características.

Dado que se centra el proceso de modelización matemática en torno a la definición de figuras poliédricas cabe realizar algunas consideraciones respecto a la definición. Sanchez Mármol y Pérez Beato (1961) afirman que “definir un concepto representado por una palabra o símbolo, quiere decir, expresar su significado mediante otras palabras o símbolos cuyo valor se conozca” (p.3).

Borel (1962) considera que una de las características que se espera de una definición es que dos personas diferentes, al interpretarla, piensen en el mismo objeto. Refiriéndose a la definición de un número afirma: "Por mi parte, no puedo considerar a x como bien definido cuando, si hablo de x con otra persona, no puedo estar seguro que nos entendemos bien, es decir que hablamos del mismo número" (Borel, 1962; p. 31).

Winicki–Landman y Leikin (2000) destacan principios lógicos que se deben cumplir al definir un concepto matemático:

> - “Definir es dar un nombre. El nombre del nuevo concepto es presentado en el enunciado usado como una definición y aparece una sola vez en el mismo.
> - Para definir el nuevo concepto, sólo conceptos definidos previamente pueden ser usados.
> - Una definición establece condiciones necesarias y suficientes para el concepto.
> - El conjunto de condiciones debe ser mínimo.
> - Una definición es arbitraria” (p.17).

Los autores recién mencionados también agregan que:

> “cada definición determina un conjunto de objetos que cumplen con las condiciones de la definición. Estos objetos se dice que ejemplifican el concepto. Si dos enunciados diferentes definen dos conceptos y sus conjuntos correspondientes de objetos que los ejemplifican no son disjuntos, entonces las siguientes relaciones entre las definiciones son posibles: pueden ser equivalentes, una de las definiciones puede seguir de la otra, o las definiciones pueden competir” (p. 18)

A continuación se describen brevemente cada una de las posibilidades planteadas en el párrafo anterior:

1- Dos definición son equivalentes sí y sólo sí el conjunto de objetos sobre el que se discute es el mismo para ambas.

2- Dos definiciones son consecuentes cuando un conjunto de objetos es subconjunto propio del otro, razón por la cual el conjunto de condiciones que definen a estos conceptos se relacionan por una inclusión propia en sentido opuesto. Por ejemplo los poliedros y los prismas, dado que el prisma es un tipo particular de poliedro.

3- Dos definiciones son definiciones en competencia cuando los conjuntos de objetos se intersecan pero no son iguales. Hay condiciones o propiedades que comparten y otras que los diferencian.

Los aportes teóricos anteriores permiten encuadrar algunas de las discusiones que esperamos se generen durante el desarrollo del taller.

MODALIDAD DE TRABAJO.

El trabajo en el taller se llevará a cabo en equipos conformados por cuatro o cinco asistentes. Luego de la resolución de cada consigna se realizan puestas en común en las que se darán espacios para que los diferentes grupos expongan sus producciones y reflexionen colectivamente acerca del proceso llevado a cabo.

Primer encuentro

En el primer encuentro se trabaja con las siguientes consignas:

a) Determinar familias de poliedros no dicotómicas con el universo dado de figuras tridimensionales cuyas caras son polígonos regulares. Establecer una definición (que llamaremos Definición Nº 1) para cada familia que no contenga afirmaciones negativas.
b) Compartir con el resto de la clase la producción propia.

Materiales: Para la puesta en juego del primer encuentro se cuenta con representaciones planas de las figuras tridimensionales, construcciones en polydron[1] y en cartulina e imágenes de objetos de la vida real. A continuación se incluyen algunas de las imágenes que se utilizarán.

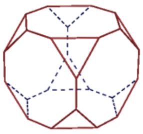
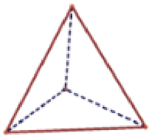
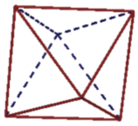
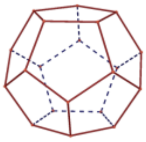
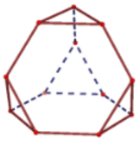
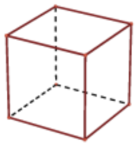
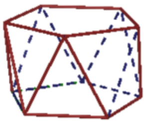
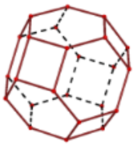
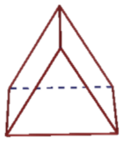
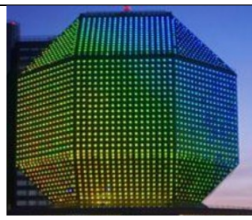
		
		
		
 [2]	 [3]	 [4]

Imagen 2: Imágenes y representaciones de figuras poliédricas.

[1] Polydron consiste en un conjunto de polígonos realizado en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (dos tamaños), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares y octógonos regulares.

[2] Obtenidos de http://matemolivares.blogia.com/2016/052113-los-poliedricos-relojes-de-sol-del-museo-galileo-en-florencia..php

[3] Obtenidos de: https://www.google.com.ar/search?q=mate+icosaedro&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwi75Ye3joPaAhUIl5AKHRfrA3cQ_AUICigB&biw=1067&bih=487&dpr=3#imgrc=H48EPf_8-rIf_M:

[4] Obtenido de: https://www.google.com.ar/search?q=biblioteca+con+forma+de+poliedro+arquimediano&tbm=isch&tbs=rimg:CeoNN9-az_174Ijj_1dtk_1UQkj1FUe3CxSiIiucWybQRZL9zVlDHGhdTkicxf2OGniUXwU7XO5YJ0VuiLvJhMPCyzEyyoSCf922T9RCSPUETRQtnBIrpMUKhIJVR7cLFKIiK4Ra6nZpRTR7agqEglxbJtBFkv3NRHAY7aiFc0HeSoSCWUMcaF1OSJzEZZlJr7jT3fYKhIJF_1Y4aeJRfBQRTyl7MpDkjd0qEgntc7lgnRW6IhE_1yyeWaivGNyoSCe8mEw8LLMTLEU1GowliAfx6&tbo=u&sa=X&ved=2ahUKEwiPxbOpj4PaAhUEF5AKHbsdBaMQ9C96BAgAEBg&biw=1067&bih=487&dpr=3#imgdii=Kr9cQ6MHoSV13M:&imgrc=ZQxxoXU5InNC5M:

Segundo encuentro

a) Analizar definiciones en libros de texto para el nivel secundario, libros de geometría o información presente en internet. Estudiar la equivalencia de estas nuevas definiciones con la Definición Nº 1 construida en el encuentro anterior.
b) Revisar las definiciones establecidas para cada familia. Enunciar una definición que resulte del análisis realizado en el punto a), que llamaremos Definición Nº 2
c) Compartir con el resto de la clase la producción propia.

Materiales: Representaciones planas de las figuras tridimensionales, construcciones en polydron y en cartulina e imágenes de objetos de la vida real utilizadas en el encuentro anterior así como otras diferentes. Libros de texto en los que figuren definiciones de diferentes tipos de poliedros: poliedros regulares, prismas, pirámides, antiprismas, poliedros arquimedianos, entre otros. Dispositivos para acceder a Internet (optativo).

Tercer encuentro

a) Escribir un relato acerca de los diferentes momentos transitados para lograr la construcción de las definiciones que caracterizan a cada familia de poliedros.
b) Analizar y comparar el relato con el esquema de modelización de Bassanezi (2002).

Materiales: Producciones de los asistentes de los encuentros anteriores y documento impreso sobre modelización matemática.

ALGUNAS REFLEXIONES

A continuación se presentan algunas cuestiones que se espera discutir durante el desarrollo del taller, que resultan de interés para reflexionar con los docentes y futuros profesores en matemática acerca del trabajo geométrico que es posible desarrollar en las clases de matemática en los diferentes niveles del sistema educativo.

Entre los aportes teóricos se plantean algunas características específicas de las definiciones matemáticas. Surgen algunas preguntas que pueden servir como disparadores de la discusión:

- ¿Cuál es el papel de la definición en el trabajo matemático?
- ¿Hasta qué punto es pertinente y conveniente atender los principios lógicos (Winicki–Landman y Leikin, 2000) de las definiciones con los estudiantes de matemática de distintos niveles?
- ¿Es pertinente plantear la construcción de definiciones en el marco de procesos de modelización matemática?

En relación con los procesos de modelización matemática se propone poner especial atención en la reflexión acerca de la utilización de los mismos como estrategia que potencia los procesos de enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos.

REFERENCIAS

- Bassanezi, R, (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Matehematicas*. 14 (2) (31-35).
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem con modelagem matemática: uma nova estratégia*. San Pablo, Editora Contexto.
- Borel, E. (1962). La definición en Matemáticas. En F. Le Lionnais (ed.): *Las Grandes Corrientes del Pensamiento Matemático* (pp.: 25-35). Buenos Aires: Eudeba.

- Chevallard Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Barcelona: Horsori.
- Esteley, C. (2014). *Desarrollo profesional en escenarios de modelización matemática: Voces y Sentidos*. Córdoba: Filosofía y Humanidades/UNC.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Guillén Soler, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid. Síntesis.
- Guillén Soler, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, 17 (2), 117-152.
- Gutiérrez, A y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9(2)*, 53-83.
- Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Zorzal.
- Itzcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar.* Buenos Aires: Aique.
- Rodríguez, F. y Gutiérrez, A. (2007). Análisis de demostraciones en entornos de Lápiz y Papel y de Cabri por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo; Mª T. González (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*, (pp. 31-40). Tenerife: CajaCanarias.
- Sanchez Mármol y Pérez Beato (1961). *Geometría métrica, proyectiva y sistemas de representación*. Madrid: SAETA.
- Winicki–Landman, G y Leikin, R. (2000). On Equivalent and Non-Equivalent Definitions. Part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20 (1), 17-21.