Modelización Estocástica: ¿Cómo impacta la tecnología de la información y la comunicación (TICs) en la enseñanza de las ideas estocásticas fundamentales?

Adriana Magallanes[1]; Liliana Tauber[2] y Patricia Konic[1]

[1]Universidad Nacional de Rio Cuarto - [2]Universidad Nacional del Litoral
[1]Ruta Nacional 36, km 601 – [2]Bv. Pellegrini 2750
adriana.n.amagallanes@gmail.com,
estadisticamatematicafhuc@gmail.com,
pkonic@gmail.com

Propuesta didáctica, Educación Secundaria, Nuevas tecnologías y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática

Palabras Clave: *Educación estadística; Modelización estocástica; Uso de TIC's en la Educación Secundaria; Ideas Estocásticas Fundamentales, Razonamiento Inferencial Informal*

RESUMEN

El trabajo se centrará en el desarrollo de algunas ideas estocásticas fundamentales asociadas a la modelización de eventos aleatorios. Se pretende poner en práctica una propuesta didáctica centrada en el desarrollo de un juego que permite introducir y desarrollar algunas de las ideas fundamentales que son la base de la Inferencia Estadística Informal (IEI). Esta propuesta ha sido pensada para establecer conexiones entre estas ideas y los conceptos estadísticos asociados a ellas, entre otros: aleatoriedad, datos, modelos, distribución, variabilidad y resúmenes. Por otra parte, se presentan distintas maneras de utilizar diversos asistentes didácticos digitales los cuales propician el trabajo con estas ideas otorgándoles nuevos significados. Además, aportamos un análisis didáctico de dichas actividades de tal manera de poder reflexionar sobre los conceptos, sus propiedades y las relaciones que se pueden establecer a través de las mismas.

INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la enseñanza de probabilidad y estadística ha sufrido diversas transformaciones que han promovido modificaciones en las propuestas didácticas. Esto ha provocado diversos conflictos, ya que la mayoría de los docentes han recibido una formación estocástica puramente mecanicista, con escasa reflexión sobre las ideas estocásticas fundamentales y sus implicaciones didácticas. Con ello, se obstaculizan las transformaciones en nuevas propuestas para una educación estocástica que permita la problematización y resignificación de los conocimientos para la enseñanza.
Por otra parte, diversos estudios han analizado los sesgos en los razonamientos de los sujetos cuando deben poner en relación ideas fundamentales como las de aleatoriedad y modelo (Bakker, Derry y Konold, 2006; Tauber, 2014; Esteley, 2014).

Es así que, siguiendo a Pfannkuch (2007) y a Batanero y Díaz (2005), consideramos que la IEI debería centrarse en la construcción de las ideas de aleatoriedad y modelo a partir del trabajo con diversas propuestas didácticas centradas en el planteo de algunas preguntas que permitan la indagación, ya que ello posibilita contextualizar los contenidos en situaciones que pueden ser interesantes para el alumno y promueven razonamientos asociados a la modelización. Todo estas referencias nos han impulsado a pensar y a elaborar diversas propuestas para la enseñanza, una de las cuales, es la que a continuación se presenta.

HERRAMIENTAS TEÓRICAS

Existe un acuerdo entre los miembros de la comunidad científica en definir a la matemática como la *ciencia de los modelos* (Devlin, 1994; Davis y Hersh, 1989). Con ello se despliegan reflexiones tanto en relación a los procesos de modelización matemática para otras áreas de conocimiento (o fenómenos no-matemáticos o extra-matemáticos), como para la propia matemática (o fenómenos matemáticos o intra-matemáticos). Un interesante ejemplo de este último tipo de modelización lo representa el estudio de cuestiones geométricas apelando a modelos analíticos o lo que se denomina Geometría Analítica. Estas miradas y reflexiones tienen fuertes implicancias sobre la problemática de la enseñanza actual de la matemática. Por ejemplo, el trabajo con modelos matemáticos o la construcción de los mismos se encuentra como un requerimiento para las escuelas secundarias de diversas provincias, como lo son, particularmente, las de Córdoba y Santa Fe. Esto se hace evidente en los diseños curriculares para varias orientaciones en los que se recomienda trabajar con proyectos, en los que la matemática actúe como una herramienta útil para modelizar algunos aspectos de ciertos fenómenos en estudio.
Este hecho implicó que comenzaran a gestarse, en diversos países, un conjunto de experiencias áulicas relacionadas con la enseñanza de la matemática en escenarios de modelización (Esteley, 2014). El crecimiento de este modo de trabajo es tal que, en los ochenta se crea el ICTMA (sigla en Inglés de "The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Application"), un grupo vinculado con la Unión Matemática Internacional que se reúne periódicamente a discutir investigaciones y experiencias de enseñanza o aprendizaje de la Modelización Matemática y sus aplicaciones.
Tomando aportes generados en los avances de comunidad mencionada, en este taller cuando hablamos de "proyectos de modelización matemática para el aula" estamos pensando en un ambiente educativo en el cual los estudiantes, conformados como grupo, escogen un fenómeno (intra o extramatemático) de su interés para estudiar, plantear problemas relacionados con dicho fenómeno, seleccionar variables, generar hipótesis, diseñar experimentos (si es necesario), buscar información, recolectar y realizar tratamiento de datos, resolver el problema aplicando modelos matemáticos ya conocidos o generando nuevos, abrir instancias de validación del trabajo, escribir un reporte y comunicar sus resultados (Magallanes y Esteley, 2016). Se asume la noción de modelización como estrategia pedagógica y se toman los aportes de Bassanezi (2002) así como los aportes de Esteley (2014), Borba y Villarreal (2005).
En la modelización se produce un movimiento que va de la vida real a la matemática mientras que en la aplicación el camino es inverso. Por otra parte, en la visión de resolución de problemas desde la perspectiva de modelización, la información y la solución del problema son dinámicas. Pueden ser modificadas y reformuladas dependiendo de las condiciones de la situación o de las posibilidades de quienes estén involucrados en el proceso de modelización. Al hablar de modelización se hace referencia a un proceso que conectar ideas, hechos y actividades matemáticas que van modificándose sin seguir un orden lineal sino acorde a los productos alcanzados en cada momento del proceso.

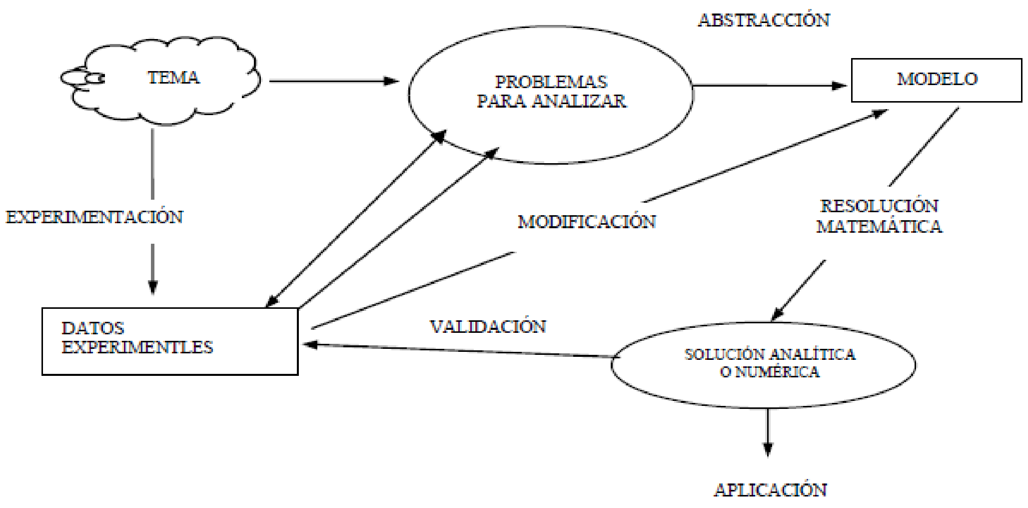

Figura n°1: Proceso de Modelización

Con la inclusión de la experimentación se enfatiza un movimiento que va del mundo real a la matemática, con lo cual, es posible superar una visión internalista de la matemática.
Por otra parte, es importante diferenciar un proceso de modelización determinista de uno estocástico. En la siguiente tabla se muestran algunas de las características de cada uno:

Modelo Determinístico	**Modelo Estocástico**
Se utilizan en experimentos o fenómenos determinísticos	Se utilizan en experimentos o fenómenos aleatorios.
Datos con el mismo valor para la variable independiente tienen necesariamente el mismo valor para la variable dependiente	Datos con el mismo valor para la variable independiente pueden tener distintos valores para la variable dependiente
Las relaciones entre las variables se analizan generalmente por medio de funciones matemáticas	Las relaciones entre las variables se analizan generalmente por medio de funciones probabilísticas

Tabla n°1: Modelo determinista versus Modelo Estocástico

El objetivo general del taller consiste en recurrir a un experimento estocástico como recurso para:

- Operativizar la noción de modelización como estrategia pedagógica y,
- Dar emergencia al concepto de probabilidad

Objetivos específicos:

I) Experimentar el proceso de recolección de datos mediante la utilización de un recurso interactivo.

II) Poner a funcionar las etapas del proceso de modelización descripto para la construcción de un modelo estocástico pertinente para esta situación.

III) Significar algunas ideas estocásticas fundamentales vinculadas a la noción de probabilidad, a partir del proceso realizado.

METODOLOGÍA DE TRABAJO

El inicio de un proceso de modelización comienza con la definición del tema y del problema. Si bien, desde una perspectiva crítica esta es una etapa del proceso en la que es posible abrir un espacio para que sean los mismos estudiantes los que puedan formular temas que sean de interés; por las características del taller y los objetivos formulados; en esta ocasión se sugiere centrar el trabajo en un juego interactivo: “la carrera de camellos”. Esta carrera se puede simular a partir del uso de un applet disponible en el sitio web http://www.matemath.com/azar/flash/camellos.html

Planteo del Problema: En el juego seleccionado, se tienen 12 camellos enumerados del 1 al 12. Para avanzar se tiran dos dados equilibrados. Se suman los puntos que salen en los dados y avanza un casillero el camello que tenga el número que corresponda a esa suma.

Gana el camello que primero logre avanzar 9 casilleros.

¿A quién apuestas?¿Podrías decir con un número cuál es la chance que tiene de avanzar el camello nº6?

¿Cuáles son las características de la distribución del n° de veces que avanzó cada camello en cada grupo?

A partir de este problema se presenta la siguiente consigna de trabajo. Se solicita dividir al curso en grupos de manera que queden al menos 5 grupos diferentes en total. Cada grupo tiene que repetir el juego por lo menos 4 veces y realizar un resumen de los datos.

Una de las posibles maneras de realizar este resumen podría ser, por ejemplo, a través de la construcción de una tabla (como la Tabla 2) o de algún resumen gráfico.

Camello	Veces que avanza en la carrera 1	Veces que avanza en la carrera 2	Veces que avanza en la carrera 3	Veces que avanza en la carrera 4	Suma de avances en todas las carreras
1					
2					
3					
….					
12					

Tabla 2: Tabla a completar durante los juegos

Comienza el juego, se realizan algunas partidas hasta que se comprenda el funcionamiento del sitio interactivo y no queden dudas en relación a lo solicitado en la consigna de trabajo.

Es esta la instancia de la recolección de datos en un proceso de modelización, o bien de la realidad si hacemos el juego en la clase o bien utilizando el sitio web. Es necesario que estos datos sean realizados y registrados por los participantes y en el trabajo con estudiantes. Esta aclaración es de suma importancia ya que es una oportunidad para ser partícipes de esta instancia del proceso de modelado; ya que generalmente, se suelen brindar los datos o recolectar datos ya elaborados que pueden servir para determinadas actividades pero que no dan lugar a la problematización en torno a la toma de datos y a la sistematización de los mismos.

Luego de finalizadas las carreras solicitadas y recolectados los datos, se solicita discutir sobre las siguientes cuestiones:¿Hay algún camello que no se haya movido de su posición inicial en todas las carreras?¿por qué ocurre esto?. Al lanzar los dados y sumar los puntos, ¿hay sumas que aparecen más a menudo que otras o salen todas más o menos con la misma frecuencia? ¿crees que todos los camellos tienen las mismas posibilidades de avanzar?. En caso negativo, ¿qué camellos crees que tienen más posibilidades? ¿sabrías decir por qué sucede eso?¿has mantenido tu apuesta en todas las carreras? ¿por qué?

Además, pensando en los resúmenes realizados por todos los grupos se buscará dar respuesta a las siguientes cuestiones:
¿Cuáles son las diferencias y similitudes de tu distribución con la de los demás? ¿cuáles son los valores en los que coinciden?
Si reunimos los resultados de todos los grupos, ¿cuáles son las características de la distribución?. Observando esas características, si tuvieras que apostar jugando con otras personas distintas, ¿a qué camello apostarías? ¿por qué? ¿piensas que siempre vas a ganar con ese camello? ¿por qué?
Se procede entonces al análisis de los resultados obtenidos. Para ello, por ejemplo, se podría completar en el pizarrón, con el resultado de todos los grupos, una tabla con la columna Total: suma las veces que avanzó cada camello en cada una de las carreras disputadas en cada uno de los grupos. Esa columna de totales indica el número de veces que hemos obtenido cada camello (suma de dados) en el total de carreras disputadas (Tabla 3).

Camello	**Total Grupo1**	**Total Grupo2**	**Total Grupo3**	**Total Grupo4**	**Total Grupo 5**	**total**
1						
2						
3						
…..						
12						
					Total	

Tabla 3: Registro de datos de todos los grupos

Una vez recolectados los datos y de haber reflexionado en torno a las preguntas presentadas, se inicia un proceso de abstracción para la construcción de un modelo estocástico para esta situación.
Algunas cuestiones que se plantean para reflexionar en esta instancia son:
¿Cuáles fueron los resultados obtenidos en las distribuciones representadas?¿qué patrones pueden encontrar? ¿existe alguna distribución diferente? ¿en qué difiere? ¿en qué se parecen?. Con estas cuestiones se busca aprovechar la variación, la variabilidad y el centro para iniciar el proceso de ver las características comunes que llevarían a pensar en los valores referentes (o parámetros) del modelo.
Luego es posible volver a la pregunta inicial:
¿Podrías decir con un número cual es la chance que tiene de avanzar el camello nº6?
Como se está pensando el taller para un grupo de docentes de matemática es probable que se calcule con anticipación estas probabilidades, desde una perspectiva clásica. Lo que se sugiere es poder reflexionar acerca del trabajo que se piensa para estudiantes de secundaria, partiendo desde la probabilidad frecuencial o experimental.
Una vez debatidas y construidas las respuestas en relación al problema y pensando como un trabajo posterior a la institucionalización de la noción de probabilidad frecuentista con los estudiantes, se propone iniciar la instancia de solución del problema planteado. Se realiza el análisis de los datos recolectados. En esta instancia, será posible tratar otra de las ideas

estocásticas fundamentales, como la de «Distribución» (patrón de variación de una variable aleatoria). Es posible a partir de este tipo de experimentos construir una tabla con la distribución de frecuencias (absolutas y relativas) así como un gráfico de barras. Además, reflexionar en torno a las cuestiones: ¿Por qué realizar estos análisis? ¿Por qué buscar patrones de la variación?
Es importante reflexionar acerca de la necesidad de poder predecir, explicar esa variación, con el fin de mejorar nuestras predicciones. Se espera que una distribución tenga un centro que representará los valores más comunes o esperados, pero también se espera que esos valores no coincidan todos en ese centro sino que estén alrededor de los más frecuentes. Esa variación la expresamos a través de la varianza o desviación de una distribución y será posible simular el lanzamiento de dos dados aumentando la cantidad de repeticiones en el sitio: http://www.math.uah.edu/stat/apps/index.html

Figura 2: Distribuciones de frecuencias relativas al lanzar dos dados

Volviendo a pensar en los primeros datos obtenidos, es posible que surjan ideas que aún no están claras o que aún pueden ser inadecuadas. Aun así, ello brinda buena información para ver las creencias o concepciones respecto de la aleatoriedad. Además, cuando se llega a esta situación del simulador, puede ser una ocasión propicia para que se puedan enfrentar con sus propios errores, ya que aquí con sólo colocar que n=2, es posible simular el lanzamiento de dos dados. El análisis nuevamente de lo frecuencial les permitirá seguir pensando y reflexionando sobre si el modelo inicial que imaginaron se ajusta o no a la situación.
Una vez concluido este trabajo alrededor de la probabilidad frecuencial, se propondrán las siguientes cuestiones, ¿dónde radica la aleatoriedad de este experimento?¿cuáles son todos los resultados posibles de este experimento?
En esta instancia, es posible hacer emerger las nociones de espacio muestral y de sucesos aleatorios, una vez que los estudiantes hayan explorado y formulado todos los resultados posibles de este experimento.
Si llamamos A al suceso de que la suma al lanzar dos dados sea 6. ¿Cuál es la fracción y decimal que representa la parte de veces que avanzó el camello nº6 en grupo 1? ¿cuál es la parte de veces que avanzó este camello si consideramos los totales de los grupos 1 y 2?

Prosiguiendo de esta manera hasta llegar a la cuestiones ¿cuál es la fracción o decimal que representa la parte de veces que avanzó el camello 6 tomado todos los grupos?
¿Qué se observa en relación a estas fracciones y decimales a medida que aumentamos la cantidad de repeticiones del experimento (lanzar 2 dados)?
Consideramos el espacio muestral, retomando las respuestas elaboradas en etapa anterior. Se espera reflexionar sobre la importancia de partir de las representaciones que los estudiantes puedan realizar para avanzar de estas representaciones a la representación formal del espacio muestral:
S= { (1,1);(1,2)..(1,6);(2,1);(2,2)…(2,6)…(6,1)..(6,6) }
Vemos que tenemos 36 resultados posibles de nuestro experimento y será interesante analizar las dificultades con las que se pueden encontrar los estudiantes ante este objetivo de precisar todos los resultados posibles de este experimento aleatorio.
A partir de este espacio muestral, el suceso de interés para el problema inicial lleva a definir el suceso A: Suma es 6
A = { (1,5);(2,4);(3,3);(4,2);(5,1)}
¿Podemos calcular con ello la parte (fracción y decimal) de la población que representa la parte de veces que avanzaría el camello nº6?
De esta manera, se está dando lugar a la probabilidad clásica de Laplace.
Mediante las siguientes preguntas y pensando en la situación aleatoria trabajada es posible formular las propiedades de la probabilidad:
¿Cuál es la menor probabilidad que puede tener un suceso? (Suceso imposible el que tiene esta probabilidad)
¿Cuál es la mayor probabilidad que puede tener un suceso? (Suceso seguro)
¿Cuánto da la suma de todas las probabilidades de todos los sucesos de un espacio muestral? (probabilidad total)
El número decimal que representa la probabilidad de un suceso cualquiera ¿entre que valores se encuentra?
Finalmente, para la instancia de validación del modelo estocástico construido se puede proponer someter las definiciones de probabilidad al experimento de lanzar una moneda y calcular la probabilidad de que salga cara. Puede hacerse de manera experimental real o nuevamente mediante sitio de simulación para lo cual se puede utilizar el link: http:/www.math.uah.edu/stat.

ALGUNAS REFLEXIONES

Considerando las actuales líneas de investigación en el área, una de las formas de promover la enseñanza y el aprendizaje estocástico con un sentido crítico es a través de fomentar el Razonamiento Inferencial Informal. Este tipo de propuestas de enseñanza permiten la integración de tres componentes complejas y a la vez fundamentales: aleatoriedad, modelización basada en datos y variabilidad. De esta manera, es posible ofrecer a los estudiantes un entorno de aprendizaje que brinde la posibilidad de aprender conceptos complejos por medio de la interrelación y aplicación de los mismos, encaminándonos así al tan deseado puente entre el Análisis Exploratorio de Datos y la Inferencia Estadística Formal.
Es así que en este trabajo presentamos y analizamos una propuesta elaborada a partir del enfoque de modelización teniendo implícita la construcción del Razonamiento Inferencial Informal, considerando algunos contenidos indicados en los diseños curriculares del Nivel Secundario e integrando las TIC's de una manera significativa dado que permiten ser la herramienta que propicie distintos razonamientos e ideas que pueden considerarse como hilo conductor para el desarrollo de las ideas estocásticas en los distintos niveles educativos.

REFERENCIAS

- Bakker, A.; Derry, J. y Konold, C. (2006). Using technology to support diagrammatic reasoning about center and variation. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador*, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education.
- Bassanezi, R.C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Sao Paulo: Contexto
- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística. En: *Atas do I Congresso de Estatística e Investigação Operacional da Galiza e Norte de Portugal y VII Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións.* Guimarães.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation*. New York: Springer Science.
- Davis, P. & Hersh, R. (1988). Experiencia matemática. 1. ed. Trad. L. Bou García. Madrid: Editorial Labor, 314 p. Traducción de: The mathematical experience.
- Devlin, K. (1994). *Mathematics the Science of Patterns*. Scientific American Library
- Esteley, C. (2014). *Desarrollo Profesional en Escenarios de Modelización Matemática: Voces y Sentidos.* [Versión E-Book]. Disponible en: http://www.ffyh.unc.edu.ar/editorial/wp-content/uploads/2013/05/EBOOK_ESTELEY.pdf
- Magallanes, A. N. y Esteley, C. (2016). Empoderamiento: Una Caracterización al Interior de la Educación Matemática. Revista Internacional de Educación para la Justicia Social, 5(2). Disponible en: https://revistas.uam.es/riejs/article/view/6876/7196
- Pfannkuch, M. (2007). Year 11 students' informal inferential reasoning: A case study about the interpretation of box plots. In: *International Electronic Journal of Mathematics Education,* Vol. 2, N. 3.
- Tauber, L. (2014). Argumentos utilizados por profesores de matemática para explicar conceptos asociados a la idea de aleatoriedad. En: *Memorias del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos.* Costa Rica: Tecnológica de Costa Rica.